Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 6, 1984

УДК 531.383

ОДИН КЛАСС ДВИЖЕНИЙ ВОЛЧКА В СЛУЧАЕ ГОРЯЧЕВА — ЧАПЛЫГИНА

Докшевич А. И.

Исследуется решение системы уравнений Эйлера — Пуассона в случае Горячева — Чаплыгина [1] при условии, когда ультраэллиптические интегралы вырождаются в эллиптические [2]. Строится решение для класса движений, в котором обе величины u, v, введенные Чаплыгиным, меняются со временем, но одна из них при неограниченном возрастании времени асимптотически стремится к постоянной. Зависимость переменных Эйлера — Пуассона от времени выражается через эллиптические функции и эллиптический интеграл третьего рода. Указываются также достаточно простого вида приближенные формулы для всех шести искомых переменных.

1. Уравнения движения. При условиях Горячева — Чаплыгина возьмем уравнения Эйлера — Пуассона в традиционном виде [1] (производная по времени обозначена точкой)

$$4p^{\cdot} = 3qr,\ 4q^{\cdot} = -3rp - a\gamma'',\ r^{\cdot} = a\gamma' \tag{1.1}$$
$$\gamma^{\cdot} = r\gamma' - q\gamma'',\ \gamma'^{\cdot} = p\gamma'' - r\gamma,\ \gamma''^{\cdot} = q\gamma - p\gamma'$$

Эта система, если постоянная площадей равна нулю, допускает четыре алгебраических интеграла

$$4(p^2 + q^2) + r^2 - 2a\gamma = k,\ \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1 \tag{1.2}$$
$$4(p\gamma + q\gamma') + r\gamma'' = 0,\ r(p^2 + q^2) + ap\gamma'' = g$$

Введем две вспомогательные переменные u, v так, чтобы

$$u + v = r,\ uv = -4(p^2 + q^2) \tag{1.3}$$

Изменение этих величин со временем описывается дифференциальными уравнениями

$$2(u - v)u^{\cdot} = \sqrt{F(u)},\quad 2(v - u)v^{\cdot} = \sqrt{F(v)} \tag{1.4}$$
$$F(u) = f_1(u)f_2(u)$$
$$f_1(u) = -u^3 + (k + 2a)u + 4g,\ f_2(u) = u^3 + (2a - k)u - 4g$$

Система (1.4) представима через полные дифференциалы

$$\frac{du}{\sqrt{F(u)}} + \frac{dv}{\sqrt{F(v)}} = 0,\quad \frac{2udu}{\sqrt{F(u)}} + \frac{2vdv}{\sqrt{F(v)}} = dt \tag{1.5}$$

Положим $(k - 2a)^3 + 27\cdot 4g^2 = 0$, или в параметрическом виде (b — вспомогательная постоянная)

$$k - 2a = 3b^2,\ 2g = -b^3 \tag{1.6}$$

Тогда $f_2(u) = (u - b)^2(u + 2b)$, $f_1(u) = -(u - \alpha_1)(u - \alpha_2)(u - \alpha_3)$, где все три корня α_1, α_2, α_3 вещественны, причем $\alpha_1 < \alpha_2 < 0 < \alpha_3$, $-2b < \alpha_3$. Таким образом, полином $F(u)$ имеет кратный корень

$$F(u) = (u - b)^2 R(u),\ R(u) = (u + 2b)f_1(u) \tag{1.7}$$

Выясним вид множества, в котором изменяются переменные u, v. Будем считать $g \neq 0$, так как при $g = 0$ решение известно [3, 4]. Тогда $p^2 + q^2 \neq 0$, откуда ввиду (1.3) $uv \neq 0$. Не теряя в общности, можно считать, что $u > 0$, $v < 0$, $b < 0$. С учетом этого получим

$$0 < -2b \leqslant u \leqslant \alpha_3 \tag{1.8}$$

Итак, величина u изменяется в промежутке (1.8). Для второй переменной v множество изменения более сложно. В зависимости от начальных данных возможны три варианта: 1) $\alpha_1 \leqslant v < b < 0$, 2) $b < v \leqslant \alpha_2$, 3) $v = b = \text{const}$. Последний вариант сравнительно прост и решение для него известно [2]

$$4p = (2b - r)\gamma'', \quad 4(p^2 + q^2) = b(b - r), \quad b(r + b) = -a\gamma''^2 \tag{1.9}$$
$$2a(\gamma + 1) = (r + b)(r - 2b), \quad b\gamma' = 2q\gamma''$$
$$4(r^{\cdot})^2 = (r + b)[4a(r - b) - (r + b)(r - 2b)^2]$$

В общем случае, когда величина v переменна, известно [2], что движение асимптотически приближается к предельному режиму, который определяется соотношениями (1.9).

2. **Построение решения.** При условиях (1.6), применив соотношение (1.7), уравнения (1.4), (1.5) можно привести к виду

$$2(u - v)u^{\cdot} = (u - b)\sqrt{R(u)}, \quad 2(v - u)v^{\cdot} = (v - b)\sqrt{R(v)} \tag{2.1}$$

$$\frac{du}{\sqrt{R(u)}} + \frac{dv}{\sqrt{R(v)}} = \frac{dt}{2}, \quad \frac{du}{(u - b)\sqrt{R(u)}} + \frac{dv}{(v - b)\sqrt{R(v)}} = 0 \tag{2.2}$$

Совершим дробно-линейное преобразование переменных u, v

$$z_1 = m + \frac{n}{u + 2b}, \quad z_2 = m + \frac{n}{v + 2b} \tag{2.3}$$

где m, n — постоянные: $24m = R''(-2b)$, $4n = R'(-2b)$; штрих означает производную. В новых переменных равенства (2.2) приобретают форму (τ_{10}, τ_{20} — произвольные постоянные)

$$\frac{dz_1}{\sqrt{\varphi(z_1)}} + \frac{dz_2}{\sqrt{\varphi(z_2)}} = d\tau_1, \quad \frac{dz_1}{(z_1 - b_1)\sqrt{\varphi(z_1)}} + \frac{dz_2}{(z_2 - b_1)\sqrt{\varphi(z_2)}} = -d\tau_2 \tag{2.4}$$
$$\varphi(z) = 4z^3 - g_2 z - g_3, \quad \tau_1 = \frac{t}{2} + \tau_{10}, \quad \tau_2 = \frac{t}{2a_1} + \tau_{20}$$

Выполнив все элементарные выкладки, получим

$$a_1 = \frac{2a}{3}, \quad b_1 = \frac{2a - 3k}{12}, \quad m = a_1 + b_1, \quad n = -3ba_1, \quad g_2 = 12b_1^2,$$
$$g_3 = -8b_1^3 - 2a_1^3$$

Системы такого типа возникают также при исследовании случая Ковалевской [5—7]. Построим решение уравнений (2.4) в форме, удобной для приложений. Введем новые переменные u_1, u_2 и постоянную α так, чтобы

$$z_1 = P(u_1), \quad z_2 = P(u_2), \quad b_1 = P(\alpha) \tag{2.5}$$

где $P(u)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса с инвариантами g_2, g_3. Проинтегрировав систему, полученную из (2.4), в результате замены (2.5) найдем

$$u_1 + u_2 = \tau_1, \quad I(u_1) + I(u_2) = P'(\alpha)\tau_2, \quad I(u) = P'(\alpha)\int_0^u \frac{du}{P(u) - P(\alpha)} \tag{2.6}$$

Формально вопрос решен — конечные соотношения (2.6) определяют общее решение исходной системы (2.1) в неявном виде. Однако переменные u, v можно записать и в явном виде, причем как остаточно простые аналитические функции времени. С этой целью воспользуемся для интегралов $I(u)$ теоремой сложения аргументов [8], которую запишем в виде

$$\frac{\sigma(u_1 - \alpha)\sigma(u_2 - \alpha)\sigma(u_1 + u_2 + \alpha)}{\sigma(u_1 + \alpha)\sigma(u_2 + \alpha)\sigma(u_1 + u_2 - \alpha)} = e^{\varphi} \tag{2.7}$$
$$\varphi = I(u_1) + I(u_2) - I(u_1 + u_2)$$

где $\sigma(u)$ — целая функция, введенная Вейерштрассом.

При помощи соотношений (2.6) величину φ можно найти как явную функцию времени

$$\varphi = P'(\alpha)\tau_2 - I(\tau_1) \tag{2.8}$$

Далее, левую часть равенства (2.7) можно представить в виде

$$\frac{s_\nu(u_1 + u_2 + \alpha)s_\nu(\alpha) + s_\nu(u_1)s_\nu(u_2)}{s_\nu(u_1 + u_2 - \alpha)s_\nu(\alpha) - s_\nu(u_1)s_\nu(u_2)}$$

где $s_\nu(u) = \sigma_\nu(u)/\sigma(u)$ ($\nu = 1, 2, 3$) — эллиптические функции, и разрешить равенство (2.7) относительно произведения $s_\nu(u_1) s_\nu(u_2)$. Получим

$$(2.9) \qquad s_\nu(u_1) s_\nu(u_2) = L_\nu(t)$$

$$L_\nu(t) = s_\nu(\alpha) \frac{s_\nu(\tau_1 - \alpha) e^\varphi - s_\nu(\tau_1 + \alpha)}{1 + e^\varphi}, \quad \nu = 1, 2, 3$$

Эллиптические функции $s_\nu(u)$ ($\nu = 1, 2, 3$) весьма просто связаны с функцией $P(u)$ Вейерштрасса: $P(u) = s_1^2(u) + e_1 = s_2^2(u) + e_2 = s_3^2(u) + e_3$, где e_1, e_2, e_3 — корни полинома $\varphi(z) = 4z^3 - g_2 z - g_3 = 4(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)$. Приняв во внимание зависимости (2.5), получим $s_\nu(u_1) = \sqrt{z_1 - e_\nu}$, $s_\nu(u_2) = \sqrt{z_2 - e_\nu}$, ввиду чего равенствам (2.9) можно придать вид

$$(2.10) \qquad \sqrt{(z_1 - e_\nu)(z_2 - e_\nu)} = L_\nu(t)$$

Соотношения (2.10) и дают искомый ответ. По этим формулам можно найти симметрические функции: $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$ как линейные комбинации известных функций времени $L_\nu(t)$, т. е. как однозначные аналитические функции времени, а затем построить и сами величины z_1, z_2.

3. Вычисление переменных Эйлера — Пуассона. Имея z_1, z_2, по формулам (2.3) найдем переменные u, v Чаплыгина. Применив затем четыре алгебраических интеграла (1.2) и зависимости (1.3), можно вычислить переменные Эйлера — Пуассона: p, q, r, γ, γ', γ''. Однако окончательные формулы довольно громоздки.

Обратим внимание на асимптотический характер движения. Это свойство теперь легко доказать. В самом деле, дифференцируя (2.8), найдем

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{P'(\alpha)}{2a_1} \frac{P(\tau_1) + m}{P(\tau_1) - b_1}$$

Можно убедиться, что $d\varphi/dt > \omega > 0$, где ω — некоторая постоянная, ввиду чего величина φ — монотонная функция времени, и при $t \to \infty$ будет $e^{-|\varphi|} \to 0$, $L_\nu(t) \to s_\nu(\tau_1 \pm \alpha)$, где знак перед постоянной α зависит от знака φ. Отсюда и следует указанное свойство движения.

В связи с этим искомые переменные можно представить в виде степенных рядов по малой переменной величине $e^{-|\varphi|}$ с периодическими коэффициентами.

Построим приближенные выражения для переменных Эйлера — Пуассона, пользуясь для простоты непосредственно уравнениями движения (1.1). Поступим так. Предельное движение реализуется при дополнительном условии — если в начальный момент времени $v(0) = b$. Разложим решение в ряды по степеням малого параметра $\mu = v(0)/b - 1$

$$(3.1) \qquad p = p_0 + \mu p_1 + \ldots, \; q = q_0 + \mu q_1 + \ldots, \; r = r_0 + \mu r_1 + \ldots$$
$$a\gamma = \alpha_0 + \mu\alpha_1 + \ldots, \; a\gamma' = \beta_0 + \mu\beta_1 + \ldots, \; a\gamma'' = \gamma_0 + \mu\gamma_1 + \ldots$$

Главные члены этих рядов: $p_0, q_0, \ldots, \gamma_0$ характеризуют предельное движение, которое в согласии с (1.9) описывается соотношениями

$$(3.2) \qquad 4ap_0 = (2b - r_0)\gamma_0, \; 4(p_0^2 + q_0^2) = b(b - r_0), \; ab(r_0 + b) = \gamma_0^2$$
$$2(\alpha_0 + a) = (r_0 + b)(r_0 - 2b), \; b\beta_0 = 2q_0\gamma_0, \; \gamma_0^{\cdot} = -aq_0$$

Подставив ряды (3.1) в (1.1), (1.2) и приравняв члены первого порядка малости, получим

$$(3.3) \qquad 4p_1^{\cdot} = 3(q_0 r_1 + q_1 r_0), \; 4q_1^{\cdot} = -3(r_0 p_1 + r_1 p_0) - \gamma_1, \; r_2^{\cdot} = \beta_1$$
$$\alpha_1^{\cdot} = \beta_0 r_1 + \beta_1 r_0 - \gamma_0 q_1 - \gamma_1 q_0, \; \beta_1^{\cdot} = \gamma_0 p_1 + \gamma_1 p_0 - \alpha_0 r_1 - \alpha_1 r_0$$
$$\gamma_1^{\cdot} = \alpha_0 q_1 + \alpha_1 q_0 - \beta_0 p_1 - \beta_1 p_0$$
$$4(p_0 p_1 + q_0 q_1) + r_0 r_1 - \alpha_1 = 0, \; \alpha_0\alpha_1 + \beta_0\beta_1 + \gamma_0\gamma_1 = 0$$
$$4(p_0\alpha_1 + p_1\alpha_0 + q_0\beta_1 + q_1\beta_0) + r_0\gamma_1 + r_1\gamma_0 = 0$$
$$2r_0(p_0 p_1 + q_0 q_1) + r_1(p_0^2 + q_0^2) + \gamma_0 p_1 + \gamma_1 p_0 = 0$$

Найдем сначала переменные Чаплыгина:

$$(3.4) \qquad u = u_0 + \mu u_1 + \ldots, \; v = v_0 + \mu v_1 + \ldots$$

Подставив ряды (3.4) в уравнения (2.1) и приравняв сначала главные члены, а затем члены первого порядка малости, получим

$$(3.5) \qquad 2u_0^{\cdot} = \sqrt{R(u_0)}, \quad v_0^{\cdot} = 0$$

$$(3.6) \qquad (u_0 - v_0)u_1^{\cdot} + (u_1 - v_1)u_0^{\cdot} = f'(u_0)u_1$$
$$(v_0 - u_0)v_1^{\cdot} + (v_1 - u_1)v_0^{\cdot} = f'(v_0)v_1, \quad 2f((u) = (u - b)\sqrt{R(u)})$$

Из (3.5) следует, что $v_0 = \mathrm{const} = b$, а переменная u_0 — периодическая функция времени.

Обратимся теперь к системе (3.6). Из второго уравнения этой системы найдем $v_1 = C_0 e^{\lambda}$, где C_0' — произвольная постоянная, $\lambda^{\cdot} = l/(b - u_0)$, $l = f'(b) = \frac{1}{2}\sqrt{R(b)} = b\sqrt{3a}$. Можно показать, что $\lambda^{\cdot} = \varphi^{\cdot}$, в силу чего $v_1 = lC_1 e^{\varphi}$, где C_1 — произвольная постоянная. Зная же зависимость v от времени, из первого уравнения системы (3.6) найдем

$$u_1 = u_0^{\cdot}\,(C_2 - C_1 e^{\varphi}) \tag{3.7}$$

где C_2 — вторая постоянная интегрирования.

Таким образом, величины u_0, v_0, u_1, v_1 построены и теперь можно, применив соотношения (1.3), (3.3), вычислить переменные p_1, q_1, r_1, α_1, β_1, γ_1. Получим

$$p_1 = p_0^{\cdot}N + \frac{C_1 l}{2ab}(ap_0 + lq_0)\,e^{\varphi}, \quad q_1 = q_0^{\cdot}N + \frac{C_1 l}{2ab}(-lp_0 + aq_0)\,e^{\varphi} \tag{3.8}$$

$$r_1 = r_0^{\cdot}N + C_1 l e^{\varphi}, \quad \alpha_1 = \alpha_0^{\cdot}N + \frac{C_1 l}{2}(u_0 + 2b)\,e^{\varphi}, \quad \beta_1 = \beta_0^{\cdot}N + \frac{(l - \beta_0)\,l}{b - u_0}C_1 e^{\varphi}$$

$$\gamma_1 = \gamma_0^{\cdot}N + C_1 l\left[\frac{\gamma_0\alpha_0}{2ab} - \frac{2q_0(l - \beta_0)}{b(b - u_0)}\right]e^{\varphi}, \quad N = C_2 - C_1 e^{\varphi}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чаплыгин С. А.* Новый случай вращения тяжелого твердого тела, подпертого в одной точке. Собр. соч. Т. 1. М.— Л.: Гостехиздат, 1948, с. 118—124.
2. *Докшевич А. И.* Качественное исследование решения Горячева — Чаплыгина.— В кн.: Механика твердого тела. Вып. 4. Киев: Наук. думка, 1972, с. 3—7.
3. *Горячев Д. Н.* О движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае $A = B = 4C$.— Матем. сб., 1900, 21, вып. 3, с. 431—438.
4. *Докшевич А. И.* Об одном из решений Д. Н. Горячева задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки.— В кн.: Механика твердого тела. Вып. 1. Киев: Наук. думка, 1969, с. 73—77.
5. *Козлов В. В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: Изд-во МГУ, 1980. 230 с.
6. *Архангельский Ю. А.* Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. 328 с.
7. *Аппельрот Г. Г.* Не вполне симметричные тяжелые гироскопы.— В кн.: Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. М.— Л.: Изд-во АН СССР, 1940, с. 61—155.
8. *Уиттеккер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. Т. 2. М.: Физматгиз, 1963. 515 с.

Донецк

Поступила в редакцию
28.XII.1983

УДК 531.36

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ ПРИ ОТЫСКАНИИ ВЫСШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Стрыгин В. В.

Рассматриваются системы в стандартной форме по Н. Н. Боголюбову, а также системы с быстрыми фазами. Решение предлагается искать в виде асимптотического ряда по малому параметру с коэффициентами, представимыми в виде суммы двух функций. Первая из них зависит от медленного времени и находится как решение более простого уравнения на конечном отрезке. Вторая — тригонометрический полином времени (или угловых переменных) с коэффициентами, зависящими от медленного времени (она находится явным образом). Результаты удобно использовать при решении некоторых задач небесной механики.

При вычислении высших приближений решения с фиксированным начальным условием использование метода усреднения Боголюбова — Митропольского — Воло-