

УДК 539.375

РАВНОВЕСИЕ УПРУГОГО СЛОЯ, ОСЛАБЛЕННОГО ПЛОСКИМИ ТРЕЩИНАМИ

Сметанин Б. И., Соболев Б. В.

Рассматривается пространственная задача об упругом равновесии слоя, в средней плоскости которого расположена система трещин. Трещины поддерживаются в раскрытом состоянии под действием нормальной нагрузки, приложенной к их берегам. Грани слоя зажаты между двумя жесткими гладкими основаниями. Задача сводится к решению интегрального уравнения первого рода. При построении решений этого уравнения для трещин эллиптической и прямоугольной формы в разных диапазонах изменения геометрических параметров применяются асимптотические методы «больших и малых λ » [1], а также методы последовательных приближений и вариационный.

1. **Постановка задачи, свойства ядра интегрального уравнения.** Пусть область, занятая упругой средой, определяется неравенствами $|z| \leq h$, $|x| < \infty$, $|y| < \infty$. В плоскости $z = 0$ расположена трещина, занимающая в плане некоторую область Ω . К берегам трещины приложена нагрузка $\sigma_z = -p(x, y)$, $z = \pm 0$. На гранях слоя, при $z = \pm h$, осуществляются следующие условия: $W = 0$, $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, где W — проекция вектора перемещений на ось Oz ; τ_{xz} , τ_{yz} — компоненты тензора напряжений.

Методами интегральных преобразований рассматриваемая задача сводится к решению интегрального уравнения первого рода

$$(1.1) \quad -\Delta \iint_{\Omega} \gamma(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{R} + \iint_{\Omega} \gamma(\xi, \eta) K_1\left(\frac{R}{h}\right) d\xi d\eta = \frac{2\pi p(x, y)}{\Theta}$$

$$(x, y) \in \Omega$$

$$K_1(\alpha) = \frac{1}{h^3} \int_0^{\infty} [L(u) - 1] u^2 J_0(\alpha u) du, \quad L(u) = \frac{\operatorname{sh} 2u + 2u}{\operatorname{ch} 2u - 1}$$

$$\gamma(x, y) = W(x, y, 0), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$R = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}, \quad \Theta = \frac{E}{2(1 - \nu^2)}$$

где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, $J_0(x)$ — функция Бесселя первого рода.

В результате использования известных интегральных представлений [1] интегральное уравнение (1.1) может быть преобразовано к виду

$$(1.2) \quad \iint_{\Omega} \gamma(\xi, \eta) K_2(\xi - x, \eta - y) d\xi d\eta = \frac{\pi^2 p(x, y)}{\Theta}, \quad (x, y) \in \Omega$$

$$K_2(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \sqrt{u^2 + v^2} L(h \sqrt{u^2 + v^2}) \cos \alpha u \cos \beta v du dv$$

Отметим следующие свойства функции $L(u)$:

$$(1.3) \quad L(u) = 1 + O(ue^{-2u}), \quad u \rightarrow \infty; \quad \lim_{u \rightarrow 0} uL(u) = 2$$

которые позволяют сформулировать следующее утверждение.

Лемма. Функция $K_1(\alpha)$ непрерывна со всеми производными при всех $0 \leq \alpha < \infty$. При $0 \leq \alpha < 4$ функция $K_1(\alpha)$ представима абсолютно

сходящимся рядом

$$(1.4) \quad K_1(\alpha) = \frac{1}{h^3} \sum_{k=0}^{\infty} l_k \alpha^{2k}$$

Доказательство леммы вытекает из свойств (1.3) и представления функции $J_0(\alpha u)$ в виде степенного ряда. Непосредственные вычисления позволяют получить $(\zeta(\alpha))$ — дзета-функция Римана)

$$l_k = \frac{(-1)^k (2k+2)! (k+2) \zeta(2k+3)}{(k!)^2 2^{4k+1}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Перейдем к рассмотрению методов решения полученных интегральных уравнений.

2. Трещина в слое большой относительной толщины. Введем безразмерный параметр, характеризующий относительную толщину слоя: $\lambda = h/a$, где $2a$ — наибольшее расстояние между двумя точками контура. Метод построения асимптотического решения интегральных уравнений вида (1.1) при достаточно больших значениях λ [2] подробно описан в [3].

Пусть Ω — эллиптическая область $s(x, y) \geq 0$; $s(x, y) = 1 - x^2/a^2 - y^2/b^2$; $a \geq b$. Для определенности положим $p(x, y) = p = \text{const}$. В этом случае асимптотическое разложение решения интегрального уравнения (1.1) с учетом (1.4) можно представить в виде

$$(2.1) \quad \gamma(x, y) = \frac{bp}{\Theta E(k)} \sqrt{s(x, y)} \left[1 + \frac{c_0 b^2 \pi}{2a^2 E(k) \lambda^3} + O(\lambda^{-5}) \right]$$

$$c_0 = -\frac{4\zeta(3)}{3\pi}, \quad k = \sqrt{1 - \varepsilon^2}, \quad \varepsilon = \frac{b}{a}$$

где $K(k)$, $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

Перейдем теперь к рассмотрению задачи о двух симметричных относительно оси $x = 0$ трещинах, лежащих в плоскости $z = 0$. Пусть $\Omega: \Omega_1 \cup \Omega_2$. В этом случае, в силу симметрии задачи, интегральное уравнение (1.1) можно преобразовать к следующему виду:

$$(2.2) \quad -\Delta \iint_{\Omega_1} \gamma(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{R} + \iint_{\Omega_1} \gamma(\xi, \eta) \left[K_1\left(\frac{R}{h}\right) + \right. \\ \left. + K_3(x + \xi + 2l, \eta - y) + K_4(x + \xi + 2l, \eta - y) \right] d\xi d\eta = \frac{2\pi p}{\Theta}$$

$$(x, y) \in \Omega_1$$

$$K_3(\alpha, \beta) = -(\alpha^2 + \beta^2)^{-1/2}, \quad K_4(\alpha, \beta) = K_1\left(\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{h}\right)$$

Пусть области, занимаемые трещинами, имеют эллиптическую форму и описываются соотношениями

$$\Omega_1: x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1; \quad \Omega_2: (x + 2l)^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1$$

Введем два безразмерных геометрических параметра

$$\lambda_1 = h/a; \quad \lambda_2 = l/a \quad (0 < \lambda_1 < \infty; \quad 1 < \lambda_2 < \infty)$$

Во избежание громоздких вычислений при построении асимптотического разложения решения по двум этим параметрам введем обозначения: $\lambda_1 = t\lambda_2 = t\lambda$. Параметр t изменяется таким образом, чтобы параметры λ_2 и λ_1 оставались достаточно большими. Далее, применяя при решении интегрального уравнения (2.2) указанный выше метод, получим решение его

в виде асимптотического разложения

$$(2.3) \quad \gamma(x, y) = \frac{bp}{\Theta E(k)} \sqrt{s(x, y)} \left\{ 1 - \frac{b^2}{a^2 \lambda^3} \left[\frac{g_3}{E(k)} + \frac{g_4 x}{\lambda a k} \right] \right\} + O(\lambda^{-5})$$

$$k = [(2k^2 - 1) E(k) + (1 - k^2) K(k)] k^{-2}$$

$$(2.4) \quad g_3 = -\frac{1}{8} - \frac{3\pi}{2t^3} \left[c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{6}{t}\right)^{2n} c_n \right]$$

$$g_4 = \frac{3}{2} \left[\frac{1}{8} - \frac{\pi}{t^3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6}{t}\right)^{2n} n c_n \right]$$

$$c_n = -2l_n / (\pi 3^{n+1}) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

При вычислениях по формуле (2.3) удобно воспользоваться интегральными представлениями

$$\sum_{n=0}^{\infty} (3\alpha)^{2n} c_n = -\frac{2}{3\pi} \int_0^{\infty} [L(u) - 1] u^2 J_0(\alpha u) du$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (3\alpha)^{2n} n c_n = \frac{\alpha}{3\pi} \int_0^{\infty} [L(u) - 1] u^3 J_1(\alpha u) du$$

Если в (2.4) осуществить предельный переход при $t \rightarrow \infty$, то решение (2.3) будет соответствовать задаче о равновесии упругого пространства, ослабленного двумя симметричными эллиптическими трещинами.

Решение задачи о слое с одной эллиптической трещиной вытекает из (2.3) в результате осуществления одновременного предельного перехода при $\lambda \rightarrow \infty$, $t \rightarrow 0$. При этом в допустимых пределах сохраняется соотношение: $\lambda_1 = t\lambda$.

3. Трещина в слое малой относительной толщины. Было построено [1] «вырожденное» решение задачи о контакте штампа с упругим слоем в случае его малой относительной толщины. Проводя аналогичные рассуждения, получим

$$(3.1) \quad \gamma(x, y) = \frac{h}{2\Theta} \left[1 - \frac{1}{45} h^4 \Delta^2 + \dots \right] p(x, y), \quad (x, y) \in \Omega$$

Соотношение (3.1) дает «внутреннее» решение интегрального уравнения (1.1) при малых относительных толщинах слоя. Оно тем более точно, чем глубже рассматриваемая точка удалена по нормали от контура во внутренность области Ω . Точность построенного вырожденного решения определяется оценками, аналогичными [1]. При приближении к контуру трещины соотношение (3.1) теряет смысл.

Перейдем к построению решения типа погранслоя в окрестности контура трещины. При условии осевой симметрии задачи такое решение построено в [4]. Аналогичное решение трехмерной контактной задачи приведено в [1]. Реализация подобных рассуждений в рассматриваемом случае позволяет получить следующий результат:

$$(3.2) \quad \gamma(x, y) = \frac{ph}{2\Theta} \left\{ \operatorname{erf} \sqrt{Dn(x, y)} + \frac{2A}{\sqrt{\pi}} \exp[-BDn(x, y)] \times \right. \\ \left. \times F[A \sqrt{Dn(x, y)}] \right\}$$

$$A = 0,876; \quad B = 1,768; \quad D = 0,640; \quad n(x, y) = r(x, y)/h$$

($r(x, y)$ — расстояние от точки до контура трещины).

Отметим, что при $p(x, y) = p = \text{const}$ из (3.1) следует $\gamma(x, y) = rh/(2\Theta)$. Это же решение вытекает из (3.2) при $n \geq 1$.

Проведенные рассуждения и построенное решение справедливы для любой односвязной области Ω , ограниченной гладким контуром.

4. Метод последовательных приближений. Рассматривается метод построения приближенных решений исследуемых интегральных уравнений первого рода. Решение уравнения строится в виде произведения двух функций, одна из которых является решением уравнения для одного из предельных значений параметра ядра. Для второй из упомянутых функций получено интегральное уравнение второго рода, решение которого можно строить, например, методом последовательных приближений.

Рассмотрим интегральное уравнение первого рода

$$(4.1) \quad -\Delta \iint_{\Omega} \gamma(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{R} + \iint_{\Omega} \gamma(\xi, \eta) K(x, \xi, y, \eta) d\xi d\eta = f(x, y),$$

$$(x, y) \in \Omega$$

Функция $K(x, \xi, y, \eta)$ — регулярная часть ядра интегрального уравнения, $f(x, y)$ — достаточно гладкая функция, Ω — односвязная область, ограниченная гладким контуром.

Решение уравнения (4.1) будем строить в виде

$$(4.2) \quad \gamma(x, y) = \gamma_*(x, y) \omega(x, y)$$

где $\gamma_*(x, y)$ — решение интегрального уравнения (4.1), полученное известными методами для предельного значения одного из параметров ядра.

Внося (4.2) в (4.1), получим интегральное уравнение для определения функции $\omega(x, y)$, решение которого может быть получено методом последовательных приближений, причем в качестве нулевого приближения следует взять выражение

$$(4.3) \quad \omega_0(x, y) = M(x, y) f(x, y)$$

$$M^{-1}(x, y) = -\Delta \iint_{\Omega} \gamma_*(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{R} + \iint_{\Omega} \gamma_*(\xi, \eta) K(x, \xi, y, \eta) d\xi d\eta$$

Для вычисления последующих приближений используются рекуррентные соотношения

$$\omega_n(x, y) = M(x, y) \left\{ f(x, y) + \Delta \iint_{\Omega} \gamma_*(\xi, \eta) \omega_{n-1}(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{R} - \right.$$

$$\left. - \omega_{n-1}(x, y) \Delta \iint_{\Omega} \gamma_*(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{R} - \iint_{\Omega} \gamma_*(\xi, \eta) \times \right.$$

$$\left. \times [\omega_{n-1}(\xi, \eta) - \omega_{n-1}(x, y)] K(x, \xi, y, \eta) d\xi d\eta \right\}, (x, y) \in \Omega$$

$$(n = 1, 2, \dots)$$

Построим решение интегрального уравнения (4.1) методом последовательных приближений в случае, когда регулярная часть ядра представима следующим асимптотическим рядом:

$$(4.4) \quad K(x, \xi, y, \eta) = \frac{1}{a^3 \lambda^3} \left[g_3 + g_4 \frac{x + \xi}{a\lambda} \right] + O(\lambda^{-5})$$

Пусть область смены граничных условий $\Omega : s(x, y) \geq 0$; $f(x, y) = 2\lambda p/\Theta = \text{const}$ (g_3, g_4 — произвольные числа).

Предельному случаю соответствует решение

$$(4.5) \quad \lambda \rightarrow \infty, \gamma_*(x, y) = A \sqrt{s(x, y)} \quad (A = bp [\Theta E(k)]^{-1})$$

В результате вычислений по формулам (4.3) с учетом (4.4), (4.5) имеем

$$(4.6) \quad \omega_0(x, y) = 1 - \frac{g_3 b^2}{3a^2 E(k) \lambda^3} - \frac{g_4 b^2 x}{3a^2 E(k) \lambda^4} + O(\lambda^{-5})$$

и, применяя далее предложенный алгоритм, получим следующее соотношение для последовательного вычисления приближений искомой функции $\omega(x, y)$:

$$(4.7) \quad \omega_n(x, y) = \omega_{n-1}(x, y) + \omega_0(x, y) \left\{ 1 + \frac{A\theta}{2\pi p} \left[\Delta \int_{\Omega} \int_{\Omega} \sqrt{s(\xi, \eta)} \omega_{n-1}(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{R} - \int_{\Omega} \int_{\Omega} \sqrt{s(\xi, \eta)} \omega_{n-1}(\xi, \eta) K(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta \right] \right\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Выше было построено асимптотическое разложение точного решения исследуемого интегрального уравнения в ряд по отрицательным степеням параметра λ . При $a \geq b$ ему соответствует соотношение

$$(4.8) \quad \omega^* = 1 - \frac{g_3 b^2}{3a^2 E(k) \lambda^3} - \frac{g_4 b^2}{3a^2 \lambda^4} \frac{x}{ak} + O(\lambda^{-5})$$

Из сопоставления формул (4.6) и (4.8) видно, что уже нулевое приближение для функции $\omega(x, y)$ дает точные значения членов разложений $\omega_n(x, y)$ при λ^{-3} и более низкого порядка малости.

Реализация в формулах (4.7) разложений (4.4) и (4.6) и вычисление соответствующих интегралов позволяют получить рекуррентные соотношения для вычисления членов при λ^{-4} и более высокого порядка.

Если принять обозначения

$$\omega_n(x, y) = 1 - \alpha_n \frac{g_3 b^2}{3a^2 E(k) \lambda^3} - \beta_n \frac{g_4 b^2 x}{3a^3 \lambda^4} + O(\lambda^{-5})$$

то

$$(4.9) \quad \alpha_n = \alpha_0 = 1, \quad \beta_n = \beta_0 + [1 - \kappa/E(k)] \beta_{n-1}, \quad \beta_0 = 1/E(k)$$

Соответствующие коэффициенты разложения точного решения вычисляются по формулам

$$(4.10) \quad \alpha^* = 1, \quad \beta^* = 1/\kappa$$

Можно убедиться, что $-1/2 \leq 1 - \kappa/E(k) \leq 0$. Это свидетельствует о том, что последовательность значений β_n сходящаяся, ее пределом является β^* .

В частности, при $k^2 = 0,6$ непосредственные вычисления по формулам (4.9), (4.10) дают

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \beta^* = 0,5776$$

Таким образом, разложение по параметру λ^{-1} решения, получаемого методом последовательных приближений, в целом сходится к асимптотическому разложению точного решения задачи.

Границы применимости решения, полученного таким путем, будут определяться радиусом сходимости разложения (4.4). Нулевое приближение в форме (4.5) практически можно использовать в качестве приближенного решения исходного уравнения при $4 \leq \lambda < \infty$. Если же брать точные представления ядер, то область, в которой с достаточной для практики точностью в качестве приближенного решения можно брать нулевое приближение, существенно расширяется.

Вычисления по формулам (4.3) в рассматриваемой здесь задаче позволяют получить

$$(4.11) \quad \omega_0(x, y) = \left[1 + \frac{ab}{2\pi AE(k)} \iint_{\Omega} \sqrt{s(\xi, \eta)} K(x, \xi, y, \eta) d\xi d\eta \right]^{-1}$$

5. Вариационный метод. Рассмотренные выше методы позволяют строить решение исследуемого интегрального уравнения в простой по структуре форме. С целью установления границ, в которых полученные решения дают достаточную для практического использования точность, используется также вариационный метод, который дает гарантированную точность. При этом решение интегрального уравнения в форме (1.2) в случае эллиптической области Ω будем искать в виде

$$(5.1) \quad \gamma(x, y) = A \sqrt{s(x, y)} \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N A_{mn} \cos\left(m\pi \frac{x}{a}\right) \cos\left(n\pi \frac{y}{b}\right)$$

Коэффициенты A_{mn} будем определять методом Ритца из условия минимума функционала

$$(5.2) \quad J(\gamma) = \iint_{\Omega} \gamma(x, y) \iint_{\Omega} \gamma(\xi, \eta) K_2(\xi - x, \eta - y) d\xi d\eta dx dy - \\ - 2 \frac{\pi^2}{\theta} \iint_{\Omega} \gamma(x, y) p(x, y) dx dy$$

Заметим, что аналогичный подход к решению интегральных уравнений несколько иного вида использован в [5], где в качестве координатных функций были выбраны степенные.

Внося (5.1) в (5.2) и выписывая условие минимума функционала $J(\gamma)$, получим систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов A_{mn}

$$(5.3) \quad \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N P_{ijmn} A_{ij} = \pi E(k) F(\pi m, \pi n)$$

$$(m = 0, 1, 2, \dots, M; n = 0, 1, 2, \dots, N)$$

$$F(\alpha, \beta) = \sin H/H^3 - \cos H/H^2, \quad H = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$(5.4) \quad P_{ijmn} = \frac{1}{8} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} S_{ijmn}(\alpha, \beta) L(\lambda \sqrt{(\alpha\varepsilon)^2 + \beta^2}) d\alpha d\beta$$

$$S_{ijmn}(\alpha, \beta) = [F(\alpha - \pi m, \beta - \pi n) + F(\alpha - \pi m, \beta + \pi n) + F(\alpha + \pi m, \beta - \pi n) + F(\alpha + \pi m, \beta + \pi n)] [F(\alpha - \pi i, \beta - \pi j) + F(\alpha - \pi i, \beta + \pi j) + F(\alpha + \pi i, \beta - \pi j) + F(\alpha + \pi i, \beta + \pi j)] \sqrt{(\alpha\varepsilon)^2 + \beta^2}$$

Из (5.4) видно, что $P_{ijmn} = P_{mnij}$.

При вычислениях коэффициенты P_{ijmn} удобно представить в виде $P_{ijmn} = P_{ijmn}^{\infty} + P_{ijmn}^*$, где P_{ijmn}^{∞} соответствует предельному случаю $\lambda \rightarrow \infty$. Подынтегральная функция в P_{ijmn}^* при больших значениях аргумента, в силу свойства (1.3) функции $L(u)$, экспоненциально убывает.

В аналогичном виде вариационный метод решения интегрального уравнения (1.2) можно применить и в том случае, когда трещина занимает прямоугольную область.

Пусть в функционале (5.2) область интегрирования $\Omega: \{|x| \leq a, y \leq b\}$. В окрестности точек гладкости контура трещин искомое решение, как и прежде, должно иметь асимптотику

$$(5.5) \quad \gamma(x, y) = \Gamma_0(x, y) \rho_{\Sigma}^{1/2}$$

где ρ — расстояние от точки с координатами (x, y) до контура. Как установлено в [6], асимптотика поведения функции $\gamma(x, y)$ вблизи угловой точки контура трещины иная и, в частности, в случае прямого угла она имеет следующий вид:

$$(5.6) \quad \gamma(x, y) = B(\alpha) (r/a)^{0,816}$$

где r, α — полярные координаты с полюсом в угловой точке контура трещины.

Как и в задаче об эллиптической трещине, выберем систему координатных функций, явно учитывающих асимптотику (5.5). Решение задачи в случае $p(x, y) = p = \text{const}$ будем искать в виде

$$(5.7) \quad \gamma(x, y) = a \frac{p}{\theta} \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)} \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N A_{mn} \cos\left(m\pi \frac{x}{a}\right) \cos\left(n\pi \frac{y}{b}\right)$$

Аналогичное решение задачи о равновесии упругого пространства, ослабленного прямоугольной трещиной¹, можно получить из (5.7) предельным переходом при $\lambda \rightarrow \infty$.

Коэффициенты разложения, подобно (5.3), определяются из следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$(5.8) \quad \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N P_{ijmn} A_{ij} = 2\epsilon F(\pi m, \pi n), \quad F(\alpha, \beta) = \frac{J_1(\alpha) J_1(\beta)}{\alpha\beta}$$

$(m = 0, 1, 2, \dots, M; n = 0, 1, 2, \dots, N)$

(смысл всех обозначений, кроме $F(\alpha, \beta)$, сохраняется из (5.4)).

6. Анализ и сопоставление численных результатов. При обсуждении результатов исследования задачи об эллиптической трещине в упругом слое удобно ввести в рассмотрение величину $N = K_I/K_{I\infty}$, где K_I — коэффициент интенсивности нормальных напряжений в рассматриваемой задаче, $K_{I\infty}$ соответствует предельному случаю $\lambda \rightarrow \infty$. Можно убедиться, что

$$(6.1) \quad N = \lim_{\rho \rightarrow 0} [\gamma(x, y)/\gamma_{\infty}(x, y)]$$

Так, для решения задачи методом «больших λ » получим (Γ — контур области Ω)

$$(6.2) \quad N = 1 - \frac{b^2}{3a^2\lambda^3} \left[\frac{g_3}{E(k)} + \frac{g_4 x}{\lambda a x} \right] + O(\lambda^{-5}), \quad (x, y) \in \Gamma$$

В результате решения задачи методом «малых λ » из (3.2) получим значения N в вершинах эллиптической области

$$(6.3) \quad N|_{(a, 0)} = \frac{E(k)}{b} \sqrt{\frac{ah}{\pi}}, \quad N|_{(0, b)} = \frac{E(k)}{b} \sqrt{\frac{bh}{\pi}}$$

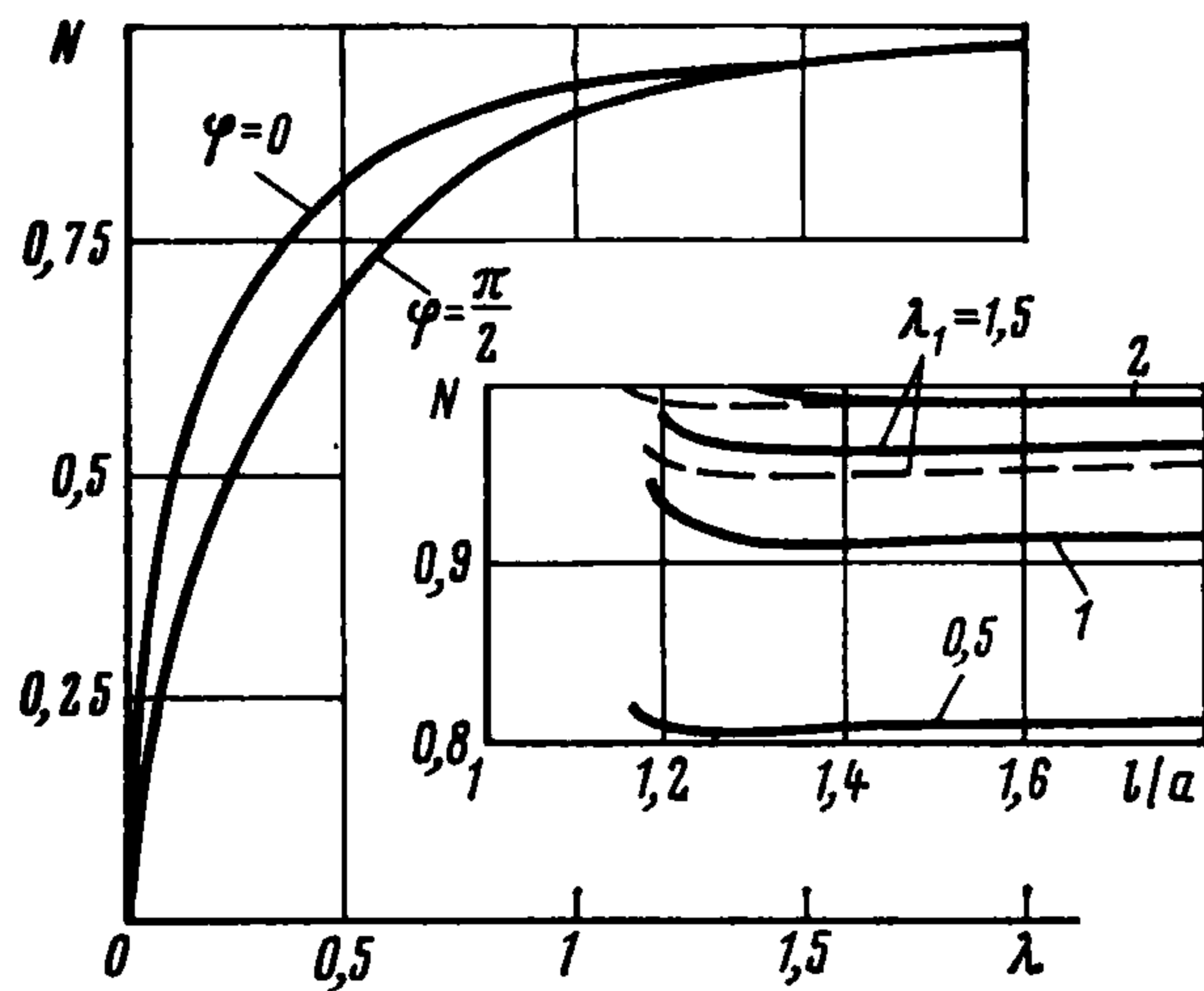
Заметим, что из формул (6.3) в результате осуществления предельного перехода при $a/b \rightarrow \infty$ вытекает соответствующий результат для полосовой трещины ширины $2b$ в слое [4]

$$N = \sqrt{h/(\pi b)}$$

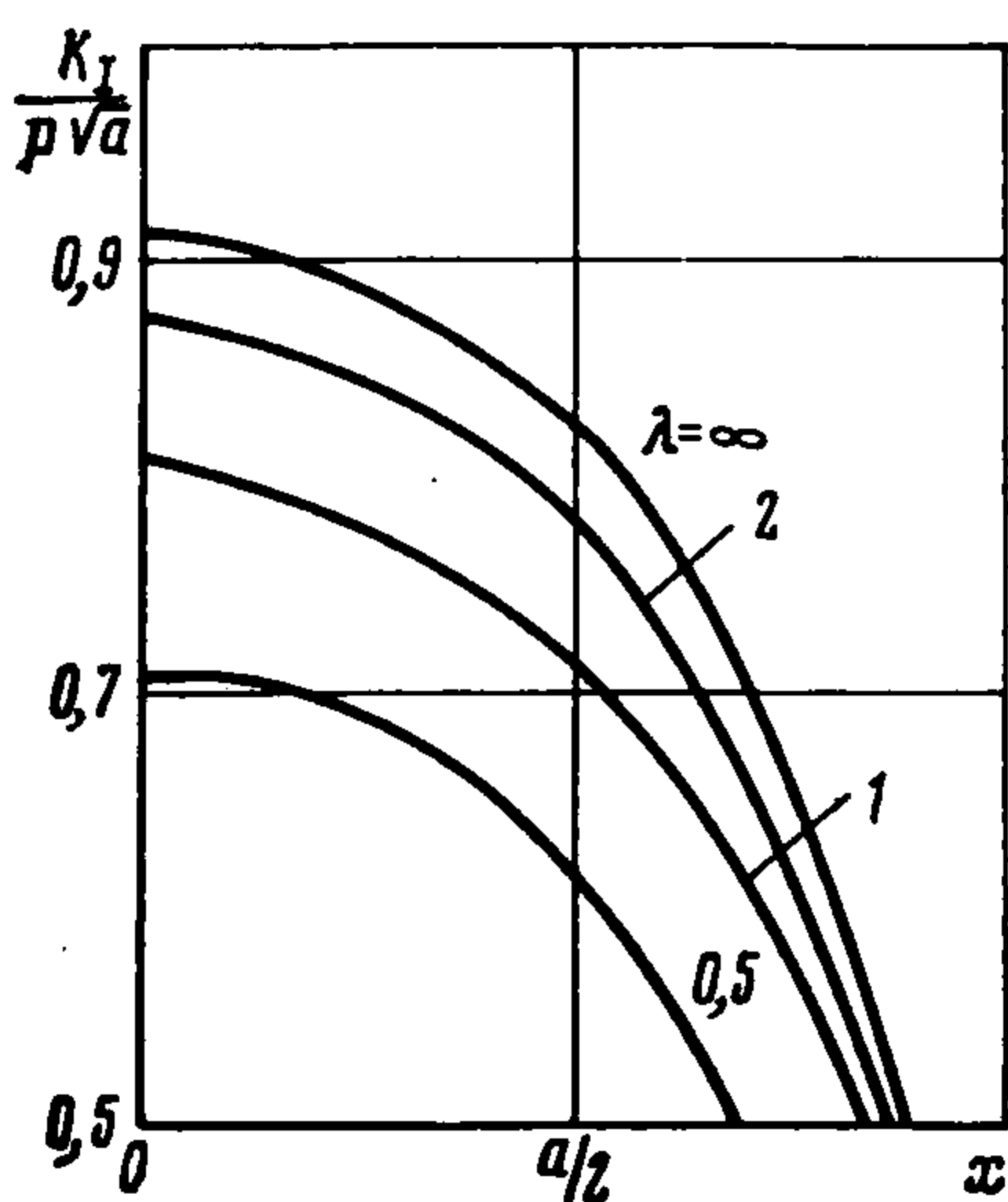
Использование метода, изложенного в п. 4, позволяет получить следующий результат

$$(6.4) \quad N = \omega_0(x, y)|_{\Gamma}$$

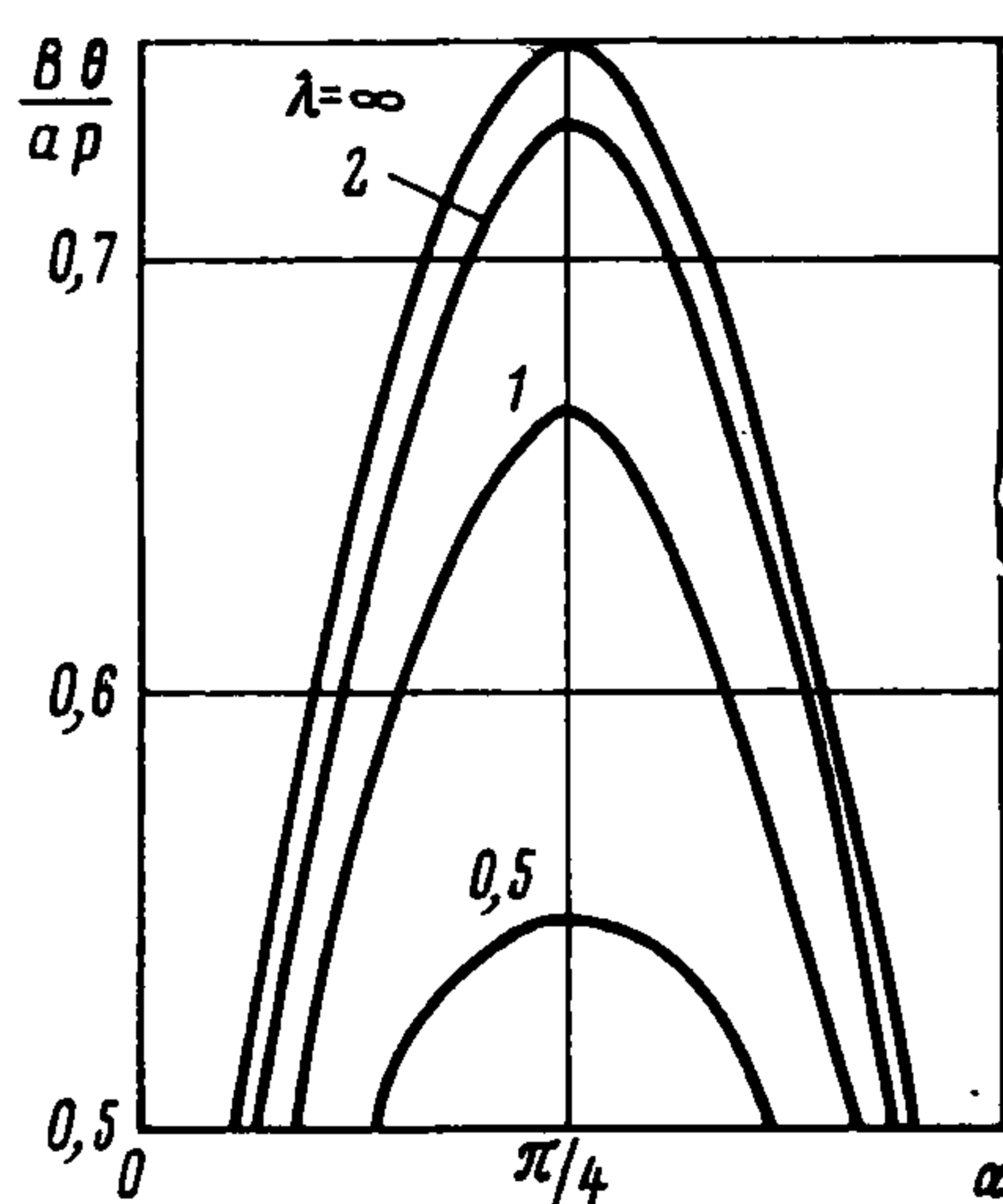
¹ Гольдштейн Р. В., Ентов В. М., Заговский А. Ф. Решение смешанных краевых задач прямым вариационным методом. — Препринт Ин-та проблем механики АН СССР. М., 1976, № 78. 54с.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Наконец, в результате решения задачи вариационным методом выражение для исследуемой величины запишем в виде

$$(6.5) \quad N = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N A_{mn} \cos\left(m\pi \frac{x}{a}\right) \cos\left(n\pi \frac{y}{b}\right) \Big|_{\Gamma}$$

При обходе точки (x, y) по контуру трещины в выражениях (6.2)—(6.5) удобно положить $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$, где угол φ отсчитывается от положительного направления оси Ox .

На фиг. 1 представлены результаты вычисления величины N по формулам (6.2)—(6.5) при $b/a = 0,5$; $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$ в зависимости от относительной толщины слоя λ .

Результаты вычислений свидетельствуют о том, что решение рассматриваемой здесь задачи об эллиптической трещине в упругом слое методом больших λ с достаточной для практики точностью можно использовать в диапазоне $\lambda \geq 1,5$ (погрешность не превосходит 2%). Метод, изложенный в п. 4, оказывается эффективным при $\lambda \geq 0,5$. Решение задачи методом малых λ дает достаточную точность лишь при очень малых относительных толщинах слоя ($\lambda \leq 0,5$). Исследование задачи вариационным методом дает практически точное решение во всех рассмотренных случаях ($\lambda \geq 0,25$), и в указанной задаче этот метод используется лишь для оценки точности полученных асимптотических решений.

На врезке к фиг. 1 изображены некоторые результаты исследования задачи о равновесии упругого слоя, ослабленного двумя симметричными эллиптическими трещинами. Вычисления, проведенные в точке контура трещины Ω_1 , где их взаимное влияние наиболее ощутимо ($\varphi = \pi$). Результаты представлены для $\lambda_1 = 2; 1,5; 1; 0,5$. Сплошными линиями изображены результаты исследования задачи методом, изложенным в п. 4. Здесь же штриховой линией для сравнения в случае достаточно большой относи-

тельной толщины слоя ($\lambda_1 = 2; 1,5$) представлены результаты решения задачи методом больших λ . Проведенные расчеты показали, что расхождение результатов вычислений по методу больших λ и методом, описанным выше, не превосходят 3% в следующих диапазонах геометрических параметров задачи: $h/a \geq 1,5$; $l/a \geq 1,5$; $b/a \leq 1,5$.

Перейдем к анализу численных значений коэффициента интенсивности нормальных напряжений K_I при обходе по контуру прямоугольной трещины. В данном случае оказывается более удобным рассматривать его абсолютные значения, поскольку в этой задаче точного решения в предельном случае $\lambda \rightarrow \infty$ не имеется.

Коэффициенты интенсивности нормальных напряжений вдоль каждой из сторон прямоугольника вычисляются по формулам

$$(6.6) \quad K_I^a = p \sqrt{\frac{2a^2}{b}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N A_{mn} \cos\left(m\pi \frac{x}{a}\right)$$

$$K_I^b = p \sqrt{2a} \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N A_{mn} \cos\left(n\pi \frac{y}{b}\right)$$

На фиг. 2 изображены графики изменения величины $K_I/(p\sqrt{a})$ вдоль большей стороны ($b/a = 0,5$) при разных значениях λ .

Отметим, что рассмотренные в работе задачи при указанных условиях на гранях слоя физически соответствуют также равновесию упругого пространства, ослабленного цепочкой трещин. Трещины расположены в параллельных плоскостях на расстоянии $2h$.

Построение решения $\gamma(x, y)$ в окрестности угловых точек контура трещины осуществлялось следующим образом. Вдоль лучей, исходящих из угловой точки под разным углом α , вычислялись значения отношения $B(\alpha) = \gamma(x, y)/(r/a)^{0,816}$. Непосредственные вычисления позволяют установить, что имеется интервал изменения r/a , в котором указанное отношение остается постоянным вдоль каждого луча (отклонения не превышают 4%) и меняется лишь при переходе с одного луча на другой. Эта закономерность ранее была установлена для предельного случая рассматриваемой здесь задачи, соответствующего $\lambda \rightarrow \infty$ (см. сноску на с. 1036). Расположение и размеры этой зоны обусловлены относительной толщиной слоя λ и другими геометрическими параметрами. Таким образом, определив для каждого значения α величину $B(\alpha)$, оказывается возможным достроить решение $\gamma(x, y)$ непосредственно до вершины угла трещины по асимптотической формуле (5.6).

На фиг. 3 приведены графики функции $B(\alpha)$ при разных относительных толщинах слоя в случае $b/a = 0,5$. Заметим, что хотя область, занятая трещиной, не симметрична относительно биссектрисы угла, для функции $\gamma(x, y)$ в окрестности угловой точки контура эта симметрия наблюдается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
2. Александров В. М., Ворович И. И. О действии штампа на упругий слой конечной толщины. — ПММ, 1960, т. 24, вып. 2, с. 323—333.
3. Сметанин Б. И., Соболев Б. В. Растяжение упругого полупространства с трещиной, расположенной перпендикулярно к его поверхности. — ПММ, 1981, т. 45, вып. 5, с. 940—943.
4. Сметанин Б. И. Некоторые задачи о щелях в упругом клине и слое. — Инж. ж. МТТ, 1968, № 2, с. 115—122.
5. Гольдштейн Р. В. Плоская трещина произвольного разрыва в упругой среде. — Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 3, с. 111—126.
6. Bazant Z. P. Three-dimensional harmonic functions near termination or intersection of gradient singularity lines: a general numerical method. — Internat. J. Engng Sci., 1974, v. 12, No. 3, p. 221—243.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
I.VI.1983