

УДК 539.383

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГИХ ШЕРОХОВАТЫХ ТЕЛ ПРИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ НЕРОВНОСТЕЙ

Галанов Б. А.

На основании работ [1, 2] строится модель контакта жесткого штампа с шероховатым телом, учитывающая упругопластические деформации неровностей. Модель контакта шероховатых тел при упругих деформациях неровностей является ее частным случаем. В математической формулировке контактной задачи применяется классический подход, использующий граничные интегральные уравнения. При весьма общих предположениях (например, многосвязности искомой области контакта) исследуется существование и единственность решения задачи. Разработан метод определения контактного давления, сближения тел, а также площадки контакта, состоящей в общем случае из двух частей: зоны упругопластических деформаций неровностей и зоны их упругого деформирования. Эффективность метода показана на примерах новых контактных задач. Решение представляется в виде, удобном для анализа влияния шероховатости. Это имеет существенное значение для методов испытания материалов контактным способом. Достаточно полный обзор работ по контактным задачам для шероховатых тел содержится в [1—4].

1. Постановка задачи. Рассмотрим контактную задачу для шероховатого упругого полупространства $z \geq 0$. В полупространство силой P вдавливается жесткий штамп, ограниченный поверхностью $z = -\beta f(x, y) < 0$, $\beta = \text{const} > 0$. Штамп занимает область $z \leq -\beta f(x, y)$. Предполагается, что $f(x, y) \in C(E_2)$ (E_2 — плоскость $z = 0$).

Будем считать, что нормальные перемещения $w(M)$ границы полупространства в точке $M(x, y)$ имеют вид $w(M) = w_1(M) + w_2(M)$ и трение между штампом и полупространством отсутствует. Здесь $w_1(M)$ — перемещения за счет упругопластических деформаций неровностей (шероховатого слоя), а $w_2(M)$ — упругие перемещения полупространства.

Согласно результатам [1, 2], перемещения $w_1(M)$ — функция контактного давления $p(M)$, т. е. $w_1(M) = \Phi(p(M))$. Конкретный вид функциональной связи $w_1 = \Phi(p)$ будет рассмотрен ниже.

Перемещения $w_2(M)$ определяются так [5]:

$$w_2(M) = \theta \int_S K(M, N) p(N) dS_N$$

$$K(M, N) = R_{MN}^{-1} = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{-1/2}, \quad \theta = \frac{1 - \sigma^2}{\pi E}$$

где $S \subset E_2$ — площадка контакта, R_{MN} — расстояние между точками $M(x, y)$ и $N(\xi, \eta)$, E, σ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

Пусть $h > 0$ — осадка штампа и $g(M) = h - \beta f(M)$. Тогда геометрическое условие контакта штампа с полупространством $w_1(M) + w_2(M) = g(M)$ имеет вид

$$\Phi(p(M)) + \theta \int_S K(M, N) p(N) dS_N = g(M); \quad M, N \in S$$

Таким образом, контактная задача сводится к нахождению величин $p(M)$, S , h из системы (L — граница S)

$$(1.1) \quad \Phi(p(M)) + \theta \int_S K(M, N) p(N) dS_N = g(M)$$

$$\int_S p(N) dS_N = P; \quad p(M) \geq 0, \quad p(L) = 0, \quad M \in S$$

$$\theta \int_S K(M, N) p(N) dS_N > g(M); \quad p(M) = 0, \quad M \in (E_2 \setminus S)$$

При упругих деформациях неровностей функция $\Phi(p)$ имеет вид [1—4]

$$(1.2) \quad w_1 = \Phi(p) \equiv Ap^\alpha; \quad A = \text{const} > 0, \quad 0 < \alpha = \text{const} \leq 1$$

Если $p \geq [p_c] = \text{const} > 0$, то неровности деформируются упруго-пластически и функция $w_1 = \Phi(p)$ представляется неявно формулами ([2], с. 86)

$$(1.3) \quad pD(c\sigma_T D)^{-2\nu-1} \left(\frac{\Delta}{5,4}\right)^\nu = \frac{\sqrt{5,4}K_\nu}{2\sqrt{\pi}} I_\psi\left(\frac{5}{2}, \nu-1\right) \psi^{-\nu-1/2} +$$

$$+ \left(\frac{1-\psi}{\psi}\right)^{\nu-1} \left(\frac{1-\psi}{\psi} + \nu\right) \equiv \varphi(\psi); \quad \psi = R_{\max} \frac{\delta_k}{w_1}, \quad D = \pi\theta$$

Здесь I_ψ — отношение неполной бета-функции, σ_T — предел текучести, ν — показатель степени опорной кривой профиля шероховатой поверхности (остальные обозначения в (1.3) см. в [2]).

Формулы (1.2), (1.3) показывают, что зависимость $w_1 = \Phi(p)$ определяется как геометрическими параметрами шероховатого слоя, так и упругопластическими свойствами материала полупространства. Постоянная $[p_c]$ (см. [2]) указывает уровень контактного давления, выше которого некоторая доля неровностей начинает деформироваться пластически, т. е. определяет область упругопластических деформаций неровностей $\omega = \{M : p(M) \geq [p_c]\}$; $\omega \subset S$.

Существование при $p \geq 0$ строго монотонной непрерывной функции $w_1 = \Phi(p)$ следует из строгой монотонности непрерывной функции $\varphi(\psi)$.

Далее будем считать функцию $\Phi(p)$ продолженной на значения $p < 0$ по формуле $w_1 = A \text{sign } p |p|^\alpha$ и обозначать через H обратную функцию для Φ . Функция $p = H(w_1)$ определена для всех w_1 , непрерывна, строго возрастает, $0 = H(0)$, и существует такая постоянная c_* , что $|H(w_1)| \leq c_* |w_1|^{1/\alpha}$.

Относительно функции $f(M)$ дополнительно предположим, что для любого $h < \infty$ существует ограниченная область: $\Omega_h = \{M : g(M) > 0\}$ и $g(M) \leq 0$ при $M \notin \Omega_h$ (область Ω_h может быть многосвязной). Очевидно, $\Omega_{h_1} \subset \Omega_{h_2}$ при $h_2 > h_1$.

Предложение 1. Если $\{p, S, h\}$ — решение системы (1.1), то $S \subset \bar{\Omega}_h$ и $p(M) \in C(E_2)$.

Первое включение $S \subset \bar{\Omega}_h$ очевидно. Доказательство второго включения проводится от противного.

Имеется альтернатива: 1) $p(M)$, $M \in S$ — разрывная ограниченная измеримая функция; 2) $p(M)$, $M \in S$ — неограниченная измеримая функция. При первой возможности сумма $\Phi(p(M)) + w_2(M)$ — разрывная ограниченная функция (поскольку $w_2(M)$ непрерывна [6] и $\Phi(p)$ — строго монотонная непрерывная функция), что противоречит непрерывности $g(M)$. При второй возможности сумма $\Phi(p(M)) + w_2(M)$ неотрицательных функций, из которых по крайней мере одна неограниченная, является неограниченной. Это опять противоречит непрерывности $g(M)$. Полученные противоречия доказывают предложение 1.

Введем положительно однородный ограниченный оператор Q , ставящий в соответствие функции $u(M)$, $M \in \Omega$ функцию $u^+(M)$, $M \in \Omega$ по правилу

$$u^+(M) = Q(u(M)) = \max\{u(M), 0\}$$

Для $u \in C(\Omega)$ и $u' \in C(\Omega)$ имеем

$$\|u^+\| \leq \|u\|, |Qu - Qu'| \leq |u - u'| \leq \|u - u'\|$$

Рассмотрим в $C(\Omega)$ относительно неизвестной функции $u(M)$ уравнение Гаммерштейна

$$(1.4) \quad u(M) - \theta \int_{\Omega} K(M, N) Q(H(g(N) - u(N))) dS_N = 0; \quad M, N \in \Omega$$

где Ω — произвольная ограниченная область, содержащая замыкание Ω_h .

Если $u(M)$ — решение уравнения (1.4), то $p(M) = Q(H(g(M) - u(M)))$, $S = \{M : g(M) \geq u(M)\}$ и h — решения системы (1.1) для $P = \int_{\Omega} Q(H(g(N) - u(N))) dS_N$, причем $S \neq \emptyset$ при $\Omega_h \neq \emptyset$. Обратное: если $\{p, S, h\}$ — решение системы (1.1), то функция

$$u(M) = \begin{cases} g(M) - \Phi(p(M)), & M \in S \\ \theta \int_S K(M, N) p(N) dS_N, & M \in (\Omega \setminus S) \end{cases}$$

есть решение уравнения (1.4).

В уравнении (1.4) в дальнейшем полагаем $\Omega = \{M : \beta f(M) \leq h_0\}$ для всех $h \in [0, h_0]$.

Для сокращения записи представим (1.4) в операторной форме

$$(1.5) \quad u - \theta KQH(g - u) = 0; \quad u \in C, \quad g \in C$$

и обозначим

$$g_0(M) = h_0 - \beta f(M); \quad \theta_1 = r_0 c_*^{-1} \|K\|^{-1} (\|g_0\| + r_0)^{-1/\alpha}$$

$$P_0 = \int_{\Omega} Q(H(g_0(N) - u_0(N))) dS_N; \quad U = \{u : \|u\| \leq r_0\}$$

Здесь KQH — вполне непрерывный оператор в $C(\Omega)$ и u_0 — решение уравнения (1.5) при $h = h_0$ (h_0 — осадка штампа под силой P_0).

Достаточные условия разрешимости задачи (1.1) устанавливает

Предложение 2. Если $\theta \leq \theta_1$, то система (1.1) при $P \in [0, P_0]$ имеет единственное решение:

$$p(M) = Q(H(g(M) - u(M))) \in C(\Omega)$$

$$S = \{M : g(M) \geq u(M)\} \subset \Omega; \quad h \in [0, h_0]$$

($u(M) \in C(\Omega)$ — решение уравнения (1.4)), существующее для всех $h \in [0, h_0]$ ($p(M) = 0$ для $M \notin \Omega$). При этом $h = h(P)$, $P \in [0, P_0]$ — непрерывная строго возрастающая функция, а область S может быть многосвязной.

Доказательство. Рассмотрим шар $U = \{u : \|u\| \leq r_0\}$ и оператор $Gu \equiv \theta KQH(g - u)$, $u \in C(\Omega)$. При $h = h_0$ и $u \in U$ имеем

$$\|Gu\| \leq \theta c_* \|K\| \|g_0 - u\|^{1/\alpha} \leq \theta c_* \|K\| (\|g_0\| + r_0)^{1/\alpha} \leq \theta_1 c_* \|K\| (\|g_0\| + r_0)^{1/\alpha} = r_0$$

т. е. оператор G преобразует шар U в себя и имеет (по теореме Шаудера) в нем неподвижную точку u_0 . Этой точке при $P = P_0$ соответствует следующее решение системы (1.1):

$$p(M) = Q(H(g_0(M) - u_0(M))), \quad S = \{M : g_0(M) \geq u_0(M)\}, \quad h = h_0$$

Поскольку $\|g\| \leq \|g_0\|$ и $\Omega_h \subset \Omega$ для $h \in [0, h_0]$, то аналогично доказывается существование решений $u(M)$ уравнения (1.5) при всех $h \in [0, h_0]$ и, следовательно, существование функции

$$P(h) = \int_{\Omega} Q(H(g(M) - u(M))) dSM; \quad h \in [0, h_0]$$

Пусть u_1, u_2 — решения уравнения (1.5) соответствующие значениям $h = h_1 \leq h_0$ и $h = h_2 \leq h_0$. Введем обозначения

$$(a, b) = \int_{\Omega} a(N) b(N) dS_N, \quad v = g - u$$

$$g_1 = h_1 - \beta f, \quad g_2 = h_2 - \beta f, \quad v_1 = g_1 - u_1$$

$$v_2 = g_2 - u_2, \quad \varepsilon = v_2 - v_1, \quad d = QHv_2 - QHv_1$$

и запишем уравнение (1.5) в виде

$$(1.6) \quad v + \theta KQHv = g; \quad v \in C, \quad g \in C$$

Тогда из (1.6) получим

$$(1.7) \quad \varepsilon + \theta Kd = h_2 - h_1$$

$$(\varepsilon, d) + \theta(Kd, d) = (h_2 - h_1)(P(h_2) - P(h_1))$$

$$(\varepsilon, \varepsilon) + \theta(Kd, \varepsilon) = (h_2 - h_1, \varepsilon)$$

В силу свойств Q и строгого возрастания H верны неравенства

$$(1.8) \quad d(M) \geq 0 \text{ при } \varepsilon(M) > 0; \quad d(M) \leq 0 \text{ при } \varepsilon(M) < 0$$

Отсюда (поскольку K — строго положительный оператор) второе равенство (1.7) при $h_1 = h_2$ возможно только при $d = 0$. Это означает, что $\varepsilon \equiv 0$ (следствие первого равенства (1.7)). Иными словами, уравнения (1.6), (1.5) могут иметь только одно решение. Поэтому и система (1.1) может иметь только одно решение $\{p, S, h\}$.

Пусть теперь $h_1 \neq h_2$. Так как при этом $d \neq 0$, то из второго равенства (1.7) (1.8) следует строгое возрастание функций $P = P(h)$ и $h = h(P)$.

Пусть величина h_1 фиксирована и $h_2 \rightarrow h_1$. Тогда (поскольку $(Kd, \varepsilon)^2 \leq (Kd, d)(K\varepsilon, \varepsilon)$, $(Kd, d) \rightarrow 0$, функции ε ограничены в совокупности для всех $h_2 \leq h_0$) из последнего равенства (1.7) следует, что $(\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow 0$. Отсюда и из непрерывности оператора QH получаем

$$P(h_2) - P(h_1) = \int_{\Omega} (QH(v_2(N)) - QH(v_1(N))) dS_N \rightarrow 0, \quad h_2 \rightarrow h_1$$

т. е. функция $P = P(h)$ непрерывна при $h \in [0, h_0]$. Поэтому (учитывая строгое возрастание $P(h)$) заключаем, что функция $h = h(P)$ непрерывна и строго возрастает. Этим завершается доказательство предложения 2.

Таким образом, задача решения системы (1.1) эквивалентна задаче отыскания пары $\{u(M), h\}$ из системы, состоящей из уравнения (1.5) и уравнения

$$P = \int_{\Omega} Q(H(g(N) - u(N))) dS_N$$

Для решения указанной системы могут быть применены различные приближенные методы, в которых наиболее трудоемким элементом является процесс решения уравнения (1.5).

Пусть функция $H(w_1)$ при $|w_1| \leq \|g_0\| + r_0$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной L , $\theta_2 = L^{-1} \|K\|^{-1}$, $\theta < \min\{\theta_1, \theta_2\}$, $h \in [0, h_0]$. Тогда метод последовательных приближений

$$u_{n+1} = \theta KQH(g - u_n), \quad u_0 = 0; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

сходится к решению уравнения (1.5). Для решения уравнения (1.5) могут быть использованы и другие приближенные методы [7, 8].

Все построения, сделанные выше, могут быть выполнены в более широких пространствах, чем $C(\Omega)$. Кроме того, рассмотренный метод исследования обладает значительной общностью и может быть распространен на контактные задачи, учитывающие силы трения и моменты, действующие на штамп.

В дополнение к принятым выше ограничениям на $f(M)$ далее будем считать, что $f(M)$ — положительно однородная функция степени m .

Сделаем в (1.1) замену переменных

$$x = \kappa x_*; y = \kappa y_*; \kappa = (h/\beta)^{1/m}; S = H_0^\kappa(S_*)$$

$$p(M) = \theta^{-1} (h^{m-1}\beta)^{1/m} F(q(M_*)); \mu = A\theta^{-\alpha} (\beta^\alpha h^{(m-1)\alpha-m})^{1/m} \geq 0$$

Здесь

$$F(q) = \begin{cases} \text{sign} q |q|^{1/\alpha}, & q \leq [q] \\ 2K_v^{-1} (\pi/5, 4)^{1/2} [q]^{1/\alpha} \varphi\left(\frac{[q]}{q}\right), & q > [q] \end{cases}$$

H_0^κ — гомотетия с центром O и коэффициентом κ , $[q] = A [p_c]^\alpha (\mu h)^{-1} > 0$, причем $[q]$ не зависит от h при $m = 1$, $\alpha = 2/(2\nu + 1)$.

Функцию $p_*(M_*) = F(q(M_*))$ будем называть приведенным контактным давлением, а область $\omega_* = \{M_*: p_*(M_*) \geq [q]^{1/\alpha}\} \subset S_*$ — приведенной областью упругопластических деформаций ($\omega = H_0^\kappa(\omega_*)$).

Относительно неизвестных $q(M_*)$, S_* , h получим систему

$$(1.9) \quad \mu q(M_*) + \int_{S_*} K(M_*, N_*) F(q(N_*)) dS_{N_*} = 1 - f(M_*)$$

$$q(M_*) \geq 0; \quad q(L_*) = 0; \quad \mu = A\theta^{-\alpha} (\beta^\alpha h^{\alpha(m-1)-m})^{1/m}$$

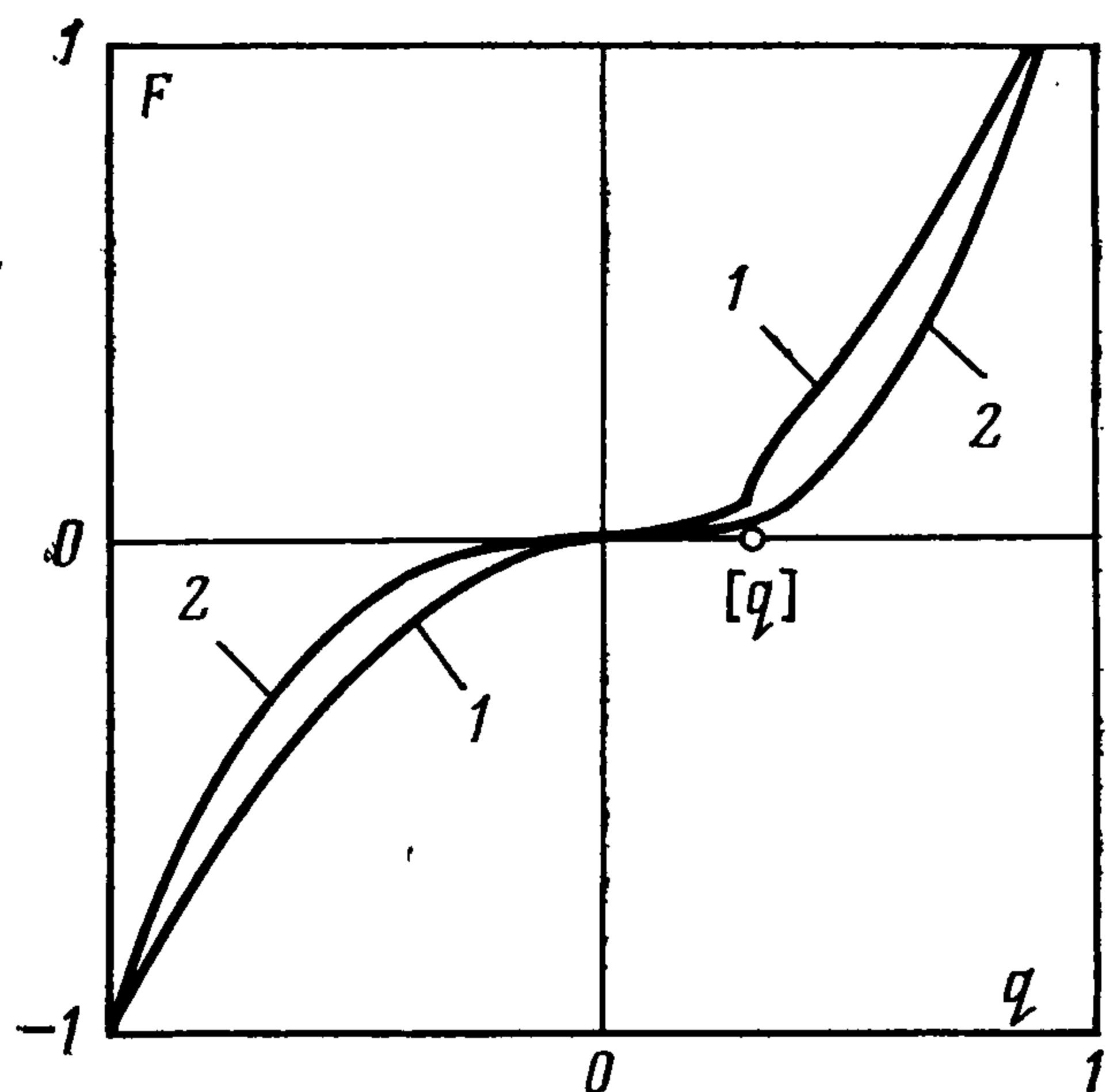
$$h = h_* \beta^{1/(m+1)} (P\theta)^{m/(m+1)}, \quad M_* \in S_*$$

$$\int_{S_*} K(M_*, N_*) F(q(N_*)) dS_{N_*} > 1 - f(M_*); \quad q(M_*) = 0, \quad M_* \notin S_*$$

$$h_* = \left(\int_{S_*} F(q(N_*)) dS_{N_*} \right)^{-m/(m+1)}$$

Здесь L_* — граница области S_* , а q , F , S_* , μ , α , h_* — безразмерные величины.

Очевидно, что скаляр h_* зависит от μ , α , $[q]$, f . Случай $\mu \equiv 0$ ($[p_c] = \infty$) соответствует постановке контактной задачи по Герцу для идеально



Фиг. 1

но гладких упругих тел. При $0 < \alpha < 2/3$ функция $F(q)$ определена для всех q , непрерывна, строго возрастает и существует постоянная c_* , такая, что $|F(q)| \leq c_* |q|^{1/\alpha}$. При $0,4 < \alpha < 2/3$ и $q = [q]$ производная $F'(q)$ — разрывная функция ($\lim F'(q) = \infty$ при $q \rightarrow [q] + 0$). Если пластические деформации отсутствуют, то функция $F(q)$ определена при всех q и непрерывно дифференцируема для $0 < \alpha \leq 1$.

На фиг. 1 даны графики функции $F(q)$. Кривые 1, 2 построены для $[q] = 0,3$ и значений $\nu = 1, 5$ и $\nu = 2,5$ соответственно.

Исходя из этого будем различать два случая: а) F — непрерывно дифференцируемая функция, т. е. пластические деформации неровностей отсутствуют или $0 < \alpha \leq 0,4$ при упругопластических деформациях неровностей; б) производная F' — разрывная функция при $q = [q]$, т. е. существуют упругопластические деформации и $0,4 < \alpha < 2/3$.

Введем обозначения: $L_{\omega_*} = \{M_* : q(M_*) = [q]\}$, $S^- = S_* \setminus L_{\omega_*}$. Тогда дополнительные свойства решения $q(M_*)$ системы (1.9) устанавливает следующее

Предложение 3. Если $f(M_*) \in \text{Lip}_r(S_*)$, $0 < r < 1$, производная $f'(M_*)$ по какому-либо направлению l непрерывна в точке $T \in S_*$ в случае а) или в точке $T \in S^-$ в случае б), то $q(M_*) \in \text{Lip}_r(S_*)$ и соответствующая производная $q'(M_*)$ непрерывна при $M_* = T$ (если $T \in L_*$, то $q'(T) = \lim q'(T_1)$ при $T_1 \rightarrow T$, где T_1 — внутренняя точка S_* , лежащая на l ; $\text{Lip}_r(S_*)$ — класс функций, удовлетворяющих на S_* условию Липшица с показателем r).

Предложение 3 — следствие теоремы 4 ([6], с. 422) и теоремы 1.5 ([7], с. 339). Из этих теорем непосредственно следует вывод: если в случае б) $f(M_*) \in \text{Lip}_r(S_*)$, $0 < r < 1$ и точка $T \in L_{\omega_*}$, то непрерывность $f'(M_*)$ при $M_* = T$ не гарантирует непрерывности соответствующей производной $q'(M_*)$ в точке $M_* = T$. Иными словами, на границе области ω контактное давление $p(M)$ не будет, вообще говоря, гладкой функцией (вследствие разрывности производной $F'(q)$ при $q = [q]$ и $0,4 < \alpha < 2/3$).

Рассмотрение контактной задачи для полупространства не ограничивает общности. Это объясняется тем, что каждое из контактирующих тел может быть заменено полупространством, если радиусы кривизны этих тел велики по сравнению с размерами площадки контакта [3].

2. Метод решения. Решение системы (1.9) осуществляется методом последовательных приближений. Суть метода заключается в том, что по приближению $S_*^{(k)}$ к области S_* и приближению $h^{(k)}$ к h ($k = 0, 1, 2, \dots$) определяется $\mu^{(k)}$ и решение $q^{(k)}(M_*)$ интегрального уравнения Гаммерштейна (1.9), по которому затем определяется приближение $p_*^{(k)}(x_*, y_*)$ к приведенному контактному давлению $p_*(x_*, y_*) = F(q(x_*, y_*))$ и следующие приближения $S_*^{(k+1)}$, $h^{(k+1)}$. При этом построение последовательности $S_*^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ осуществляется аналогично [9]. В качестве начальных приближений $S_*^{(0)}$, $h^{(0)}$ может быть взято решение соответствующей задачи Герца. Поскольку $q(M_*) \geq 0$, то за начальное приближение $S_*^{(0)}$ может быть взята также область $S_*^{(0)} = \{M_* : f(M_*) \leq 1\} \supset S_*$.

Процесс отыскания последовательных приближений состоит из двух основных этапов: получения решения $q(M_*) = q^{(k)}(M_*)$ интегрального уравнения (1.9) при фиксированной области интегрирования $S_* = S_*^{(k)}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) и построения по полученному решению $q^{(k)}(M_*)$ следующего приближения $S_*^{(k+1)}$ к области S_* .

При больших μ интегральное уравнение (1.9) может быть решено методом последовательных приближений

$$(2.1) \quad q_{i+1}(M_*) = -\frac{1}{\mu} \int_{S_*} K(M_*, N_*) F(q_i(N_*)) dS_{N_*} + \frac{1}{\mu} (1 - f(M_*))$$

$$i = 0, 1, 2, \dots$$

В рассмотренных далее задачах сходимость метода (2.1) наблюдалась при $\mu > 1$. Практически более важными являются значения $\mu \leq 1$. Для этих значений μ и значений параметра α , при которых оператор левой части интегрального уравнения (1.9) дифференцируем в $C(S_*)$ по Фреше [6], эффективным оказался метод Ньютона

$$(2.2) \quad q_{i+1}(M_*) = q_i(M_*) + \Delta_i(M_*); i = 0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} \mu \Delta_i(M_*) + \int_{S_*} K(M_*, N_*) F_{q'}(q_i(N_*)) \Delta_i(N_*) dS_{N_*} &= \\ = 1 - f(M_*) - \varepsilon_i(M_*) & \\ \varepsilon_i(M_*) = \mu q_i(M_*) + \int_{S_*} K(M_*, N_*) F(q_i(N_*)) dS_{N_*} & \end{aligned}$$

В случае недифференцируемости указанного оператора (при $0,4 < \alpha < 2/3$ и упругопластических деформациях неровностей) применялся итерационный процесс

$$(2.3) \quad \begin{aligned} q_{i+1}(M_*) &= q_i(M_*) + \gamma \Delta_i(M_*); \quad 0 < \gamma \leq 1, \quad i = 0, 1, 2, \dots \\ \mu \Delta_i(M_*) + \int_{S_*} K(M_*, N_*) n |q_i(N_*)|^{n-1} \Delta_i(N_*) dS_{N_*} &= \\ = 1 - f(M_*) - \varepsilon_i(M_*) & \end{aligned}$$

где величина ε_i определена в формулах (2.2) и $n = 1/\alpha$.

Рассмотрим теперь процесс получения последовательных приближений $S_*^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Перейдем к полярным координатам r, φ . Пусть $r = \rho_k(\varphi)$ — уравнение границы области $S_*^{(k)}$ и $q^{(k)}(r, \varphi)$ — решение интегрального уравнения (1.9), соответствующее этой границе. Введем вспомогательную функцию $\rho_k^+(\varphi)$ следующим способом:

$$(2.4) \quad |p_*^{(k)}(\rho_k^+, \varphi)| = \min_{0 \leq r \leq \rho_k} |p_*^{(k)}(r, \varphi)| \equiv \min_{0 \leq r \leq \rho_k} |F(q^{(k)}(r, \varphi))|$$

Если в (2.4) $\rho_k^+ = \rho_k$ и $p_*^{(k)}(\rho_k, \varphi) \neq 0$, то полагаем

$$\rho_k^+ = \rho_k + \left(\frac{\partial}{\partial r} p_*^{(k)}(\rho_k, \varphi) \right)^{-1} p_*^{(k)}(\rho_k, \varphi)$$

и $p_*^{(k)}(\rho_k^+, \varphi) = 0$.

Тогда итерационный процесс, который использовался для отыскания области S_* , записывается в виде

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \rho_{k+1} &= \rho_k + \gamma (\rho_k - \rho_k^+) \frac{p_*^{(k)}(\rho_k, \varphi)}{|p_*^{(k)}(\rho_k^+, \varphi)| + |p_*^{(k)}(\rho_k, \varphi)|} \\ \rho_0 &= (f(\cos \varphi, \sin \varphi))^{-1/m}; \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad 0 < \gamma \leq 1 \end{aligned}$$

Итерационный метод (2.5) можно рассматривать как совокупность одномерных итерационных процессов, работающих на каждом луче $\varphi = \text{const}$, лежащем в плоскости Ox_*y_* и исходящем из точки O . Для осесимметричных задач при отыскании круга контакта эффективен также метод бисекции.

3. Численный анализ. Рассмотренные ниже примеры позволяют оценить возможности метода и влияние шероховатости. Все вычисления выполнялись на БЭСМ-6. Системы линейных алгебраических уравнений, отвечающие дискретным постановкам задач, решались методом Гаусса. Надежность получаемых результатов определялась (в основном) их устойчивостью к увеличению числа узлов сетки в 2 раза и более.

Пример 1. В полупространство $z \geq 0$ вдавливается пирамида $z = -\beta \max(|x|, |y|)$, $\beta = \text{ctg } \gamma$ (γ — угол между осью z и гранью пирамиды). На фиг. 2 для $\mu = 0,5$ и $\alpha = 0,5$ показано полученное распределение контактного давления $p_*(M_*)$ при упругой деформации неровностей. Здесь же для сравнения штрихами изображена граница площадки контакта, соответствующая постановке задачи по Герцу, $\mu \equiv 0$ [9]. Получено значение $h_* = 2,35$, вместо $h_* = 2,03$ в постановке по Герцу.

На фиг. 3 показаны распределения контактных давлений на оси Ox_* при учете и без учета (штриховая кривая) шероховатого слоя.

На фиг. 4 для $\mu = 0,5$, $\alpha = 0,2$, $[q] = 0,4$ показаны площадка контакта S_* и распределение контактного давления $p_*(M_*)$ на ней ($h_* = 2,81$). Штриховая линия

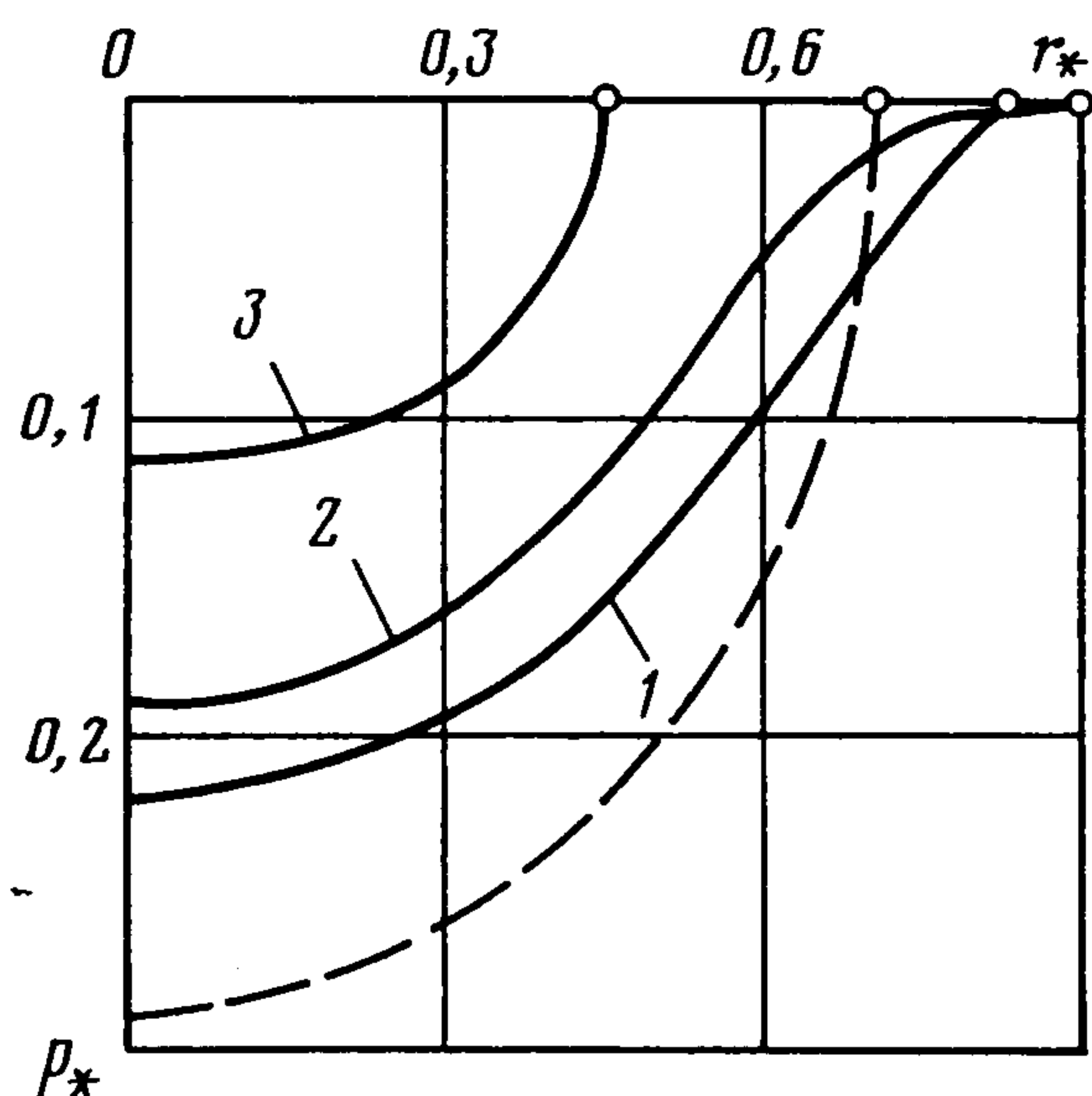
ческих деформациях неровностей в области $\omega_* = \{r_* : p_*(r_*) \geq 0,4^2\}$; линия 2 отвечает значениям $\mu = 0,2$, $\alpha = 0,4$, $[q] = 0,05$ при упругопластических деформациях неровностей в области $\omega_* = \{r_* : p_*(r_*) \geq 0,05^2,5\}$.

При наличии шероховатостей контактное давление $p_*(r_*)$ — непрерывная функция (предложение 1), но, как отмечалось выше, вообще говоря, не гладкая. Вычисления показали большую вероятность излома на границе области ω_* графика функции $p_*(r_*)$ при $\mu = 0,4$, $\alpha = 0,5$, $[q] = 0,4$ (фиг. 5, кривая 1).

Дискретизация осуществлялась с учетом осевой симметрии. Круг контакта $S_*^{(k)}$ радиуса $a_*^{(k)}$ делился на равновеликие по площади элементарные площадки. При этом разбиение по радиусу принималось равномерным. Узлы сетки размещались внутри элементарных площадок. Полярные углы узлов, расположенных на окружности $r = a_*^{(k)} (j-1)/(N-1)$ ($j = 1, 2, \dots, N$), равны:

$$\varphi_i = \begin{cases} \frac{\pi(i-1)}{4(j-1)} & \text{при } i = 1, 2, \dots, 8(j-1) \text{ и } j = 2, 3, \dots, (N-1) \\ \frac{\pi(i-1)}{2(N-1)} & \text{при } i = 1, 2, \dots, 4(N-1), j = N \end{cases}$$

Здесь N — порядок системы линейных алгебраических уравнений. Результаты даны для $N = 11$ и 401 узла. Итерационный процесс оканчивался при выполнении условия: $|p_*^{(k)}(a_*^{(k)})| \leq 5 \cdot 10^{-8}$. Время счета для одного значения группы параметров μ , α , $[q]$: при упругих деформациях — 30 с; при упругопластических деформациях и гладкой функции F — 1 мин; при упругопластических деформациях и разрывной функции F' — 15 мин.



Фиг. 6

Кривая 1 соответствует значениям $\mu = 0,6$, $\alpha = 0,6$; кривая 2 — значениям $\mu = 0,6$, $\alpha = 0,2$; кривая 3 — значениям $\mu = 0,6$, $\alpha = 0$.

При $\alpha = 0$ шероховатый слой не препятствует внедрению штампа и параметр μ указывает толщину шероховатого слоя по отношению к h . Поэтому при малых α (когда сопротивление шероховатого слоя внедрению штампа невелико) и больших μ (когда в дополнение к небольшому сопротивлению шероховатого слоя его толщина по отношению к h значительна) контактное давление в достаточно широкой окрестности границы площадки контакта близко к нулю, а вблизи центра площадки контакта подобно герцевскому (фиг. 6, кривая 2). В этом случае основное сопротивление внедрению штампа оказывает упругое полупространство: штамп как бы продавливают слабый шероховатый слой и «садится» на более жесткое упругое основание. Этим объясняется наличие точки перегиба на кривой 2.

Результаты даны при такой же дискретизации задачи, как в примере 2. Время счета для одного значения пары параметров μ , α — 30 с. Аналогичная задача была решена другим методом в работе [10]. Приведенные там численные результаты для графиков 1, 2 (радиусы площадок контакта, контактные давления) практически совпали с результатами настоящей работы (графикам 1, 2 работы [10] отвечают соответственно значения параметров $\mu = 0$ и $\mu = 0,5$, $\alpha = 2/3$). Первое начальное приближение в методах (2.1) — (2.3) во всех примерах полагалось равным: $q_0(M_*) = 0,5$.

На основании проведенного анализа можно определить влияние шероховатости тел на механические характеристики контакта. Как указывалось, случай $\mu \equiv 0$ соответствует постановке задачи по Герцу для идеально гладких тел. Чем больше значение μ , тем больше отличие задачи (1.9) от задачи в постановке Герца. Из соотношений (1.9)

следует, что для малых глубин внедрения h (т. е. при достаточно малых величинах R) значение параметра μ может быть велико. Большие значения μ могут достигаться при сравнительно хорошей обработке поверхностей для высоко модульных материалов и для поверхностей с низким качеством обработки, т. е. при больших A и малых α . В основном шероховатость тел приводит к сглаживанию эпюры контактных давлений, увеличению сближения тел, а также площади контакта (по сравнению с соответствующими характеристиками контакта идеально гладких тел).

ЛИТЕРАТУРА

1. Демкин Н. Б. Контактное взаимодействие шероховатых поверхностей. М.: Наука, 1970. 227 с.
2. Крагельский И. В., Добычин М. Н., Комбалов В. С. Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 528 с.
3. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 304 с.
4. Горячева И. Г. Плоские и осесимметричные контактные задачи для шероховатых упругих тел. — ПММ, 1979, т. 43, вып. 1, с. 99—105.
5. Развитие теории контактных задач в СССР./Под ред. Л. А. Галина. М.: Наука, 1976. 493 с.
6. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 744 с.
7. Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А., Михлин С. Г., Раковщик Л. С., Стеценко В. Я. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 448 с.
8. Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М.: Наука, 1972. 416 с.
9. Галанов Б. А. О приближенном решении некоторых задач упругого контакта двух тел. — Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 5, с. 61—67.
10. Рабинович А. С. Осесимметричная контактная задача для шероховатых упругих тел. — Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 4, с. 163—166.

Киев

Поступила в редакцию
30.I.1984