

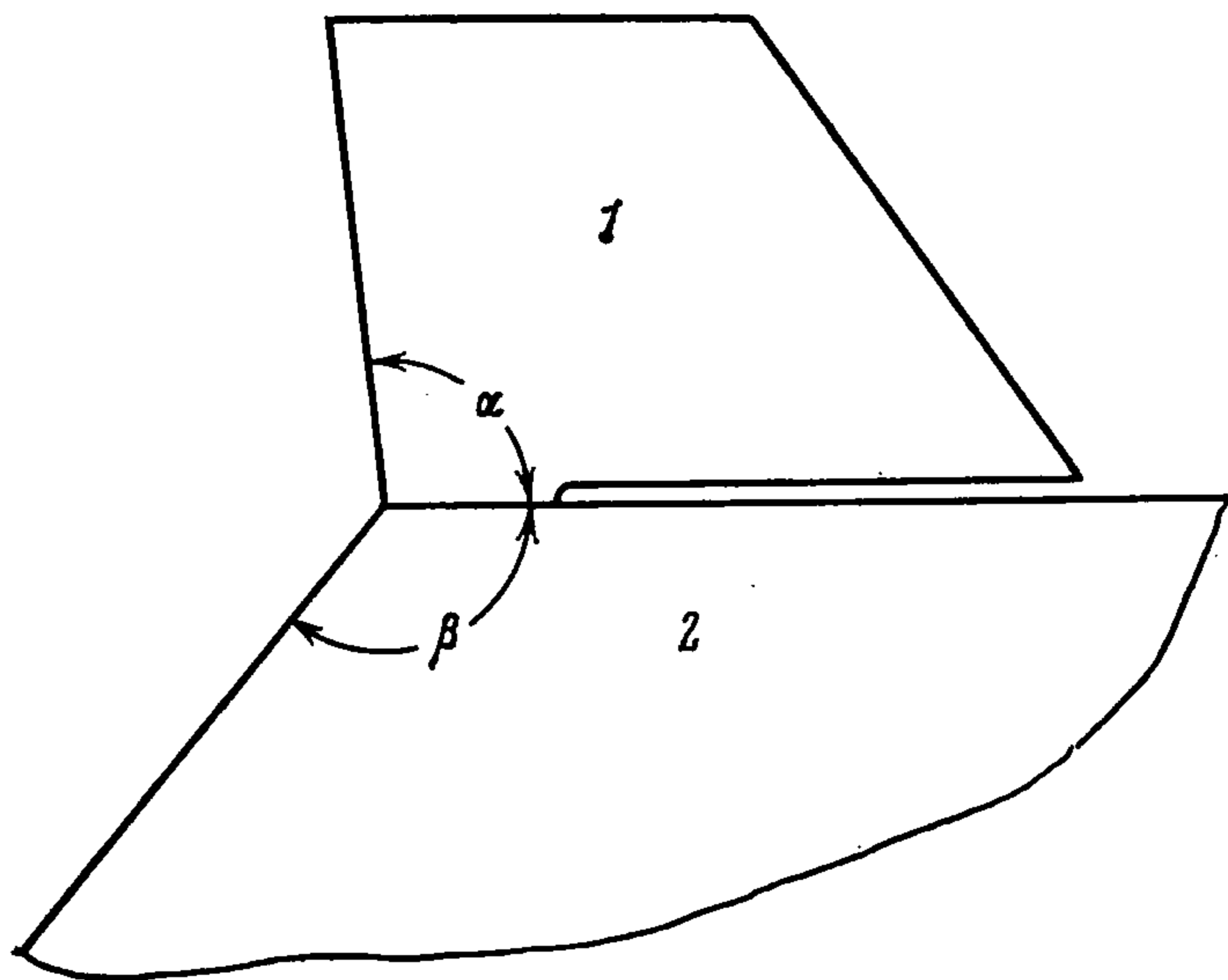
УДК 539.383

КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С ТРЕНИЕМ ДВУХ КЛИНОВИДНЫХ УПРУГИХ ТЕЛ ИЗ РАЗЛИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ

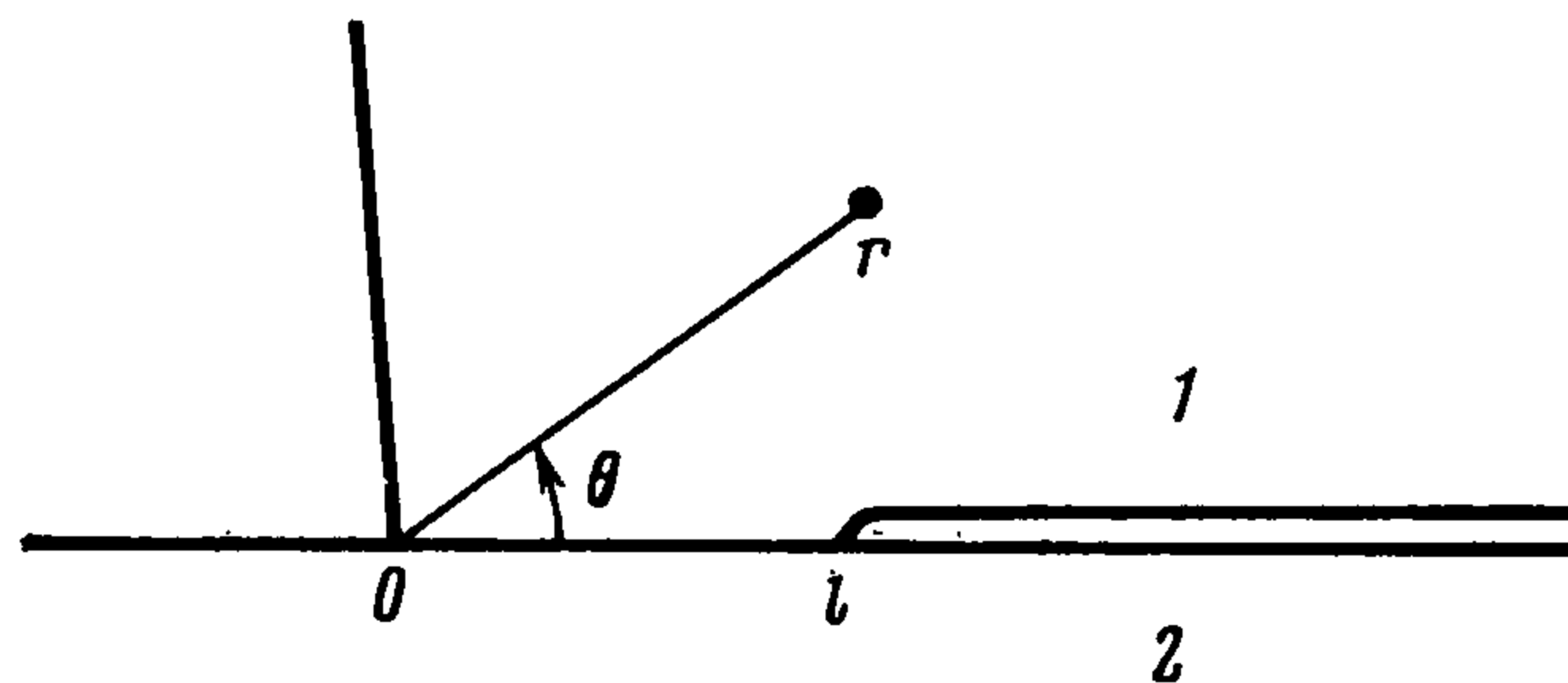
Кишнис Л. А., Черепанов Г. П.

Рассматривается плоская статическая контактная задача теории упругости о вдавливании одного в другое вдоль участков боковых поверхностей двух клиновидных тел из различных материалов. Участки соприкосновения обоих клиньев начинаются из вершин. Задача решается с учетом трения. В наиболее интересном для приложений случае, когда угол раствора одного из клиньев равен π , строится точное замкнутое решение в виде интегралов типа Коши. Однако излагаемый метод решения применим при любом угле раствора клина.

1. Постановка задачи. Рассмотрим два упругих клиновидных тела из различных материалов, вдавливающих одно в другое вдоль участков боковых поверхностей. Участки контакта у обоих клиньев начинаются из вершин (фиг. 1). Вне линии контакта грани клиньев свободны от напряжений. Предполагается, что длина линии контакта мала по сравнению с характерными размерами обоих тел.



Фиг. 1



Фиг. 2

Применяя «принцип микроскопа» [1, 2], приходим к сингулярной краевой задаче, граничные условия которой имеют вид (фиг. 2)

$$(1.1) \quad \theta = \alpha, \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0; \quad \theta = -\pi, \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$$

$$\theta = 0, [\sigma_\theta] = [\tau_{r\theta}] = 0, \tau_{r\theta} = -k\sigma_\theta$$

$$(1.2) \quad \theta = 0, r < l, [u_\theta] = f(r); \quad \theta = 0, r > l, \sigma_\theta = 0$$

$$(1.3) \quad \int_0^l \sigma_\theta(r, 0) dr = Y$$

$$r \rightarrow \infty, V \equiv (\sigma_\theta, \tau_{r\theta}, \sigma_r) = O(1/r)$$

Здесь r, θ — полярные координаты, $\sigma_\theta, \tau_{r\theta}, \sigma_r$ — напряжения, u_θ, u_r — смещения, $[N]$ — скачок величины N , $k > 0$ — коэффициент трения, $f(r)$ — заданная функция, $(-kY, Y)$ — заданный главный вектор усилий на участке $\theta = 0, 0 < r < l$.

Угол раствора одного из клиньев принят равным π , так как именно этот случай представляет наибольший интерес в связи с возможными

приложениями построенного ниже решения в технологических задачах обработки и разрушения материалов (например, при резании металлов). При этом рассматриваемую задачу можно трактовать также как задачу о движении упругого клина с трением по поверхности полупространства из другого упругого материала. Однако излагаемый далее метод решения пригоден для любого угла раствора клина (любые α и β на фиг. 1).

Подобные задачи рассматривались в [3]. Их решения строились в виде бесконечных произведений.

При $r \rightarrow 0$ решение рассматриваемой задачи ведет себя как удовлетворяющее условию непрерывности смещений в угловой точке асимптотически наибольшее решение канонической сингулярной задачи с граничными условиями

$$\begin{aligned} \theta = \alpha, \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0; \quad \theta = -\pi, \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \\ \theta = 0, \quad [\sigma_\theta] = [\tau_{r\theta}] = 0, \quad \tau_{r\theta} = -k\sigma_\theta, \quad [u_\theta] = 0 \end{aligned}$$

Указанное решение канонической сингулярной задачи строится методом сингулярных решений [1, 2] и должно реализоваться как асимптотика при $r \rightarrow 0$ искомого решения исходной задачи. Таким образом, в исходной задаче вблизи угловой точки имеют место следующие асимптотики для напряжений при $0 \leq \theta \leq \alpha$, $r \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} (1.4) \quad \sigma_\theta &\sim C_0 \{ [\lambda \sin(\lambda + 2)\theta - (\lambda + 2) \sin \lambda\theta] \Delta_+ - \\ &- k(\lambda + 2) [\cos \lambda\theta - \cos(\lambda + 2)\theta] \Delta_- - \\ &- 2[k(\lambda + 2) \sin \lambda\theta + \lambda \cos(\lambda + 2)\theta] \delta_+ + \\ &+ 2(\lambda + 2) [\cos \lambda\theta + k \sin(\lambda + 2)\theta] \delta_- \} \\ \tau_{r\theta} &\sim C_0 \{ \lambda [\cos \lambda\theta - \cos(\lambda + 2)\theta] \Delta_+ - \\ &- k[\lambda \sin \lambda\theta - (\lambda + 2) \sin(\lambda + 2)\theta] \Delta_- - \\ &- 2\lambda [\sin(\lambda + 2)\theta - k \cos \lambda\theta] \delta_+ + \\ &+ 2[\lambda \sin \lambda\theta - k(\lambda + 2) \cos(\lambda + 2)\theta] \delta_- \} \\ \sigma_r &\sim C_0 \{ [(\lambda - 2) \sin \lambda\theta - \lambda \sin(\lambda + 2)\theta] \Delta_+ - \\ &- k[(\lambda + 2) \cos(\lambda + 2)\theta - (\lambda - 2) \cos \lambda\theta] \Delta_- + \\ &+ 2[\lambda \cos(\lambda + 2)\theta + k(\lambda - 2) \sin \lambda\theta] \delta_+ - \\ &- 2[k(\lambda + 2) \sin(\lambda + 2)\theta + (\lambda - 2) \cos \lambda\theta] \delta_- \} \\ C_0 &= \frac{C(2\pi r)^\lambda}{8\lambda \sin \pi\lambda}, \quad \Delta_\pm = \sin 2(\lambda + 1)\alpha \pm (\lambda + 1) \sin 2\alpha \\ \delta_\pm &= \sin^2(\lambda + 1)\alpha \pm (\lambda + 1) \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

Асимптотики при $-\pi \leq \theta \leq 0$, $r \rightarrow 0$ имеют вид, аналогичный (1.4), при замене Δ_\pm на $\cos \pi\lambda$, $2\delta_\pm$ на $-\sin \pi\lambda$ и C_0 на

$$-\frac{2C_0\delta}{\sin \pi\lambda}, \quad \delta = \sin^2(\lambda + 1)\alpha - (\lambda + 1)^2 \sin^2 \alpha$$

Здесь C — действительная постоянная, имеющая размерность силы, деленной на длину в степени $\lambda + 2$, которая определена ниже из построенного решения исходной задачи, $\lambda = \lambda(\alpha, k, E, \nu_1, \nu_2)$ — единственный корень характеристического уравнения

$$\begin{aligned} \Delta_+ \sin \pi\lambda + 2En\delta \cos \pi\lambda + 2k(\lambda + 1)(\lambda + 2) \sin \pi\lambda \sin^2 \alpha + \\ + 4Uk\delta \sin \pi\lambda = 0 \\ \left(E = \frac{E_1}{E_2}, \quad n = \frac{1 - \nu_2^2}{1 - \nu_1^2}, \quad U = \frac{1 - 2\nu_1}{4(1 - \nu_1)} - \frac{1 - 2\nu_2}{4(1 - \nu_2)} En \right) \end{aligned}$$

E	$\alpha=10^\circ$	30°	50°	70°	90	110°	130°	150°	180°				
10^{-4}	$k = 0,001$					698	563	512	500				
10^{-2}						696	563	512	500				
10^{-1}						682	557	511	500				
1						606	532	507	500				
10				661	558	521	506	501	500				
10^2		804	563	519	507	502	500	500	500				
10^4	595	504	500	500	500	500	500	500	500				
10^{-4}	$k = 0,1$					761	596	530	511				
10^{-2}						758	594	529	511				
10^{-1}						738	586	527	509				
1									839	632	545	511	502
10				674	561	519	502	496	494				
10^2		813	560	514	500	495	493	493	493				
10^4	589	496	493	493	492	492	492	492	492				
10^{-4}	$k = 1$							706	603				
10^{-2}												703	601
10^{-1}												679	588
1											679	561	516
10				836	593	504	464	446	439				
10^2			532	463	440	431	426	425	424				
10^4	532	427	423	422	422	423	422	422	422				

на интервале $-1 < \lambda < 0$ (E_1, E_2 и ν_1, ν_2 — модули Юнга и коэффициенты Пуассона материалов 1, 2).

При тех значениях $\alpha, k, E, \nu_1, \nu_2$, при которых уравнение не имеет корней на упомянутом интервале, напряжения в исходной задаче при $r \rightarrow 0$ ограничены.

Значения величины $(\lambda + 1) \cdot 10^3$ приведены в таблице при $\nu_1 = 0,250, \nu_2 = 0,333$. Пустые клетки означают, что при соответствующих значениях параметров характеристическое уравнение не имеет корней на интервале $-1 < \lambda < 0$.

Асимптотика искомого решения при $r \rightarrow l$ получается из предыдущей при $\alpha = \pi$, если индексы 1 и 2 поменять местами. В частности

$$(1.5) \quad \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)} \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right] \Big|_{\theta=0} \sim (1 + En) R [2\pi(r-l)]^{-\gamma/\pi} \quad (r \rightarrow l + 0)$$

$$\sigma_\theta(r, 0) \sim (1 + En) Rq [2\pi(l-r)]^{-\gamma/\pi} \quad (r \rightarrow l - 0)$$

$$R = 1/4 (\pi/\gamma) K, \quad \gamma = \arccos(-qkU), \quad q = 2 [(1 + En)^2 + 4k^2U^2]^{-1/2}$$

Здесь K — коэффициент, имеющий размерность силы, деленной на длину в степени $2 - \gamma/\pi$ и подлежащий определению.

Если длина l линии контакта неизвестна (для гладкой функции $f(r)$), то она определяется из условия равенства нулю коэффициента K .

2. Решение уравнения Винера — Хопфа. Применяя интегральное преобразование Меллина к уравнениям равновесия, условию совместности деформаций, закону Гука, «сквозным» условиям (1.1) и учитывая «дуальные» условия (1.2), приходим к функциональному уравнению Винера — Хопфа рассматриваемой задачи

$$(2.1) \quad \Phi^-(p) = G_0(p) [\Phi^+(p) + g(p)] \quad (-\lambda - 1 < \operatorname{Re} p < 0)$$

$$\Phi^+(p) = \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)} \int_1^\infty \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right] \Big|_{\theta=0} \rho^p d\rho$$

$$\Phi^-(p) = \int_0^1 \sigma_{\theta}(\rho l, 0) \rho^p d\rho, \quad g(p) = \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)} \int_0^1 f'(\rho l) \rho^p d\rho$$

$$G_0(p) = -4d(p) \sin p\pi/\Delta(p), \quad d(p) = \sin^2 p\alpha - p^2 \sin^2 \alpha$$

$$\Delta(p) = (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) \sin p\pi + 2End(p) \cos p\pi - \\ - 2kp(p-1) \sin p\pi \sin^2 \alpha - 4Ukd(p) \sin p\pi$$

(В случаях, когда характеристическое уравнение, приведенное в предыдущем пункте, не имеет корней на интервале $(-1, 0)$, полагаем $\lambda = 0$.)

Функции $\Phi^-(p)$, $\Phi^+(p)$ в уравнении (2.1) аналитичны соответственно в полуплоскостях $\operatorname{Re} p > -\lambda - 1$, $\operatorname{Re} p < 0$. Используя асимптотики (1.5), по теореме абелева типа [4] получаем

$$(2.2) \quad p \rightarrow \infty, \quad \Phi^-(p) \sim qZp^{\nu/\pi-1}, \quad \Phi^+(p) \sim Z(-p)^{\nu/\pi-1} \\ Z = R(1 + En) \Gamma(1 - \nu/\pi) (2\pi l)^{-\nu/\pi}$$

($\Gamma(z)$ — гамма-функция).

Уравнение (2.1) перепишем в следующем виде:

$$(2.3) \quad \Phi^-(p) = -\frac{q \sin p\pi}{\sin(p\pi + \gamma)} G(p) [\Phi^+(p) + g(p)] \quad (-\lambda - 1 < \operatorname{Re} p < 0) \\ G(p) = 2[(1 + En) \cos p\pi - 2Uk \sin p\pi] d(p)/\Delta(p)$$

Функция $\operatorname{Re} G(it)$ ($-\infty < t < \infty$) представляет собой положительную четную функцию t , стремящуюся к единице при $t \rightarrow \infty$, а функция $\operatorname{Im} G(it)$ ($-\infty < t < \infty$) — нечетную функцию t , стремящуюся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, индекс функции $G(p)$ по мнимой оси равен нулю и справедлива факторизация [5]

$$(2.4) \quad G(p) = \frac{G^+(p)}{G^-(p)} \quad (\operatorname{Re} p = 0) \\ \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln G(\tau)}{\tau - p} d\tau \right] = \begin{cases} G^+(p), & \operatorname{Re} p < 0 \\ G^-(p), & \operatorname{Re} p > 0 \end{cases}$$

Используем следующее представление:

$$(2.5) \quad \frac{p + \gamma/\pi}{p} \frac{\sin p\pi}{\sin(p\pi + \gamma)} = K^+(p) K^-(p), \quad K^{\pm}(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p \mp \gamma/\pi)}{\Gamma(1 \mp p)}$$

Функции $K^-(p)$, $K^+(p)$ аналитичны и не имеют нулей соответственно в полуплоскостях $\operatorname{Re} p > -1$, $\operatorname{Re} p < 1 - \gamma/\pi$. Кроме того, справедливы асимптотики

$$(2.6) \quad p \rightarrow \infty, \quad K^+(p) \sim (-p)^{-\nu/\pi}, \quad K^-(p) \sim p^{\nu/\pi}$$

Используя факторизации (2.4), (2.5) и представление

$$(2.7) \quad K^+(p) G^+(p) g(p) = g^+(p) - g^-(p) \quad (\operatorname{Re} p = 0)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} K^+(\tau) G^+(\tau) g(\tau) \frac{d\tau}{\tau - p} = \begin{cases} g^+(p), & \operatorname{Re} p < 0 \\ g^-(p), & \operatorname{Re} p > 0 \end{cases}$$

функциональное уравнение (2.3) запишем так:

$$(2.8) \quad (p + \gamma/\pi) [K^-(p)]^{-1} \Phi^-(p) G^-(p) - qpg^-(p) = \\ = -qpk^+(p) \Phi^+(p) G^+(p) - qpg^+(p) \quad (\operatorname{Re} p = 0)$$

Функции в левой и правой частях равенства (2.8) аналитичны соответственно в полуплоскостях $\operatorname{Re} p > 0$, $\operatorname{Re} p < 0$. На основании принципа непрерывного продолжения они равны одной и той же функции, анали-

тической во всей плоскости p . Из (2.2), (2.4), (2.6), (2.7) следует, что функции в левой и правой частях (2.8) стремятся к постоянной

$$a = q(Z - \delta), \quad \delta = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} K^+(p) G^+(p) g(p) dp$$

при $p \rightarrow \infty$. По теореме Лиувилля единая аналитическая функция тождественно равна этой постоянной во всей плоскости p .

Принимая во внимание (1.3), находим

$$(2.9) \quad a = \frac{G^-(0)}{\Gamma(\gamma/\pi)} \frac{Y}{l}$$

Решение функционального уравнения (2.1) имеет вид

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \Phi^+(p) &= -[qpK^+(p)G^+(p)]^{-1} [a + qpg^+(p)] \quad (\operatorname{Re} p < 0) \\ \Phi^-(p) &= (p + \gamma/\pi)^{-1} K^-(p) [G^-(p)]^{-1} [a + qpg^-(p)] \quad (\operatorname{Re} p > 0) \end{aligned}$$

3. Коэффициенты K и C . Формула для контактного напряжения. Из равенства $q(Z - \delta) = a$, в котором a выражается формулой (2.9), находим

$$(3.1) \quad K = \frac{8\gamma(2\pi)^{\gamma/\pi-1}}{q(1 + En)\Gamma(1 - \gamma/\pi)} (a + q\delta) l^{\gamma/\pi}$$

Для гладкой функции $f(r)$ следует определить длину l площадки контакта. Так как в этом случае $K = 0$, то согласно (2.9), (3.1)

$$l = -\frac{G^-(0)}{q\Gamma(\gamma/\pi)} \frac{Y}{\delta}$$

При помощи (2.1) и (2.10) получаем следующую формулу для контактного напряжения ($\theta = 0$, $0 < r < l$):

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{4d(p) \sin p\pi}{\Delta(p)} \{ [qpK^+(p)G^+(p)]^{-1} \times \\ &\times [a + qpg^+(p)] - g(p) \} \left(\frac{r}{l}\right)^{-p-1} dp \end{aligned}$$

Используя (3.2) и формулу для напряжений вблизи точки O , приведенную в п. 1, находим коэффициент C , характеризующий поведение напряжений в угловой точке

$$C = \frac{8\lambda \sin^2 \pi\lambda}{(2\pi)^\lambda \Delta'(-\lambda - 1)} \times \left[\frac{q(\lambda + 1)g^+(-\lambda - 1) - a}{q(\lambda + 1)K^+(-\lambda - 1)G^+(-\lambda - 1)} - g(-\lambda - 1) \right] l^{-\lambda}$$

($\Delta'(p)$ — производная функции $\Delta(p)$ по p).

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г. П. О сингулярных решениях в теории упругости. — В кн.: Проблемы механики твердого деформированного тела. Л.: Судостроение, 1970, с. 467—479.
2. Черепанов Г. П. Mechanics of Brittle Fracture. N. Y.: McGraw-Hill, 1979. 952 p.
3. Дыхнов А. Е. Контактная задача для упругих клиньев при наличии трения вдоль примыкающего к общей вершине участка граней. — Докл. АН СССР, 1979, т. 249, № 4, с. 804—808.
4. Нобл Б. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.
5. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.