Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 6, 1984

УДК 539.376

К ВОПРОСУ РЕШЕНИЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ ДЛЯ КОМБИНИРОВАННЫХ СТАРЕЮЩИХ ОСНОВАНИЙ

Коваленко Е. В.

Приводятся решения некоторых плоских и осесимметричных контактных задач о вдавливании без трения жесткого штампа в двухслойное стареющее вязкоупругое основание. Предполагается, что верхний слой тонкий относительно области контакта, неоднородно-стареющий; реологические свойства нижнего слоя описываются уравнениями линейной теории ползучести стареющих материалов; слои жестко сцеплены между собой; область контакта не изменяется с течением времени. В зависимости от соотношений между модулями упругомгновенных деформаций слоев смешанные задачи сводятся к интегральным уравнениям первого или второго рода, содержащим операторы Фредгольма и Вольтерра. Предлагается аналитический метод решения таких уравнений, позволяющий получить разложения для основных характеристик контактного взаимодействия при произвольным образом меняющейся во времени силе, действующей на штамп. Исследуются случаи искусственного и естественного старения двухслойного основания.

1. Изложение будем вести на примере осесимметричных задач, имея в виду, что к плоским аналогам этих задач можно перейти на основе принципа соответствия [1]. Пусть с поверхностью слоя толщины H, лежащего без трения на недеформируемом основании (либо соединенного с ним), жестко сцеплен слой малой толщины $0 \leqslant y \leqslant h$ ($ha^{-1} \ll 1$). Предположим, что в верхнюю границу такой составной среды вдавливается без трения силой $P(t)$ круговой в плане штамп. Поверхность основания последнего дается функцией $g(r)$, а область контакта определяется неравенством $0 \leqslant r \leqslant a$.

Реологические свойства двухслойного основания будем описывать уравнениями линейной теории ползучести стареющих материалов [2, 3] (каждому слою, считая сверху вниз, присвоим номер $n = 1, 2$)

$$e_{ij}^{(n)} = \frac{1+\nu_n}{E_n}\left[s_{ij}^{(n)} - \int_{\tau_0}^{t} s_{ij}^{(n)} K_n(t+\varkappa_n(z), \tau+\varkappa_n(z))\,d\tau\right]$$

$$\varepsilon^{(n)} = \frac{1-2\nu_n}{E_n}\left[\sigma^{(n)} - \int_{\tau_0}^{t} \sigma^{(n)} K_n(t+\varkappa_n(z), \tau+\varkappa_n(z))\,d\tau\right]$$

$$K_n(t,\tau) = E_n \frac{\partial}{\partial\tau} C_n(t,\tau)$$

Здесь $e_{ij}^{(n)}(t, r, z)$ и $s_{ij}^{(n)}(t, r, z)$ — девиаторы тензоров деформаций и напряжений, $3\varepsilon^{(n)}(t, r, z)$ — объемная деформация, $\sigma^{(n)}(t, r, z)$ — среднее гидростатическое давление, $K_n(t, \tau)$ — ядро ползучести при одноосном напряженном состоянии, $C_n(t, \tau)$ — мера ползучести, r и z — цилиндрические координаты точки тела, τ_0 — момент приложения нагрузки, $\varkappa_1(z)$ — функция неоднородного старения, $-\varkappa_2(z) = \tau_2$ — момент изготовления нижнего слоя, E_n и ν_n — постоянные модуль упругомгновенной деформации и коэффициент Пуассона. Отметим, что поскольку свойства меры ползучести $C_n(t, \tau)$, а также ядер ползучести $K_n(t, \tau)$ и релаксации

$R_n(t, \tau)$ ($R_n (t, \tau)$ — резольвента ядра $K_n (t, \tau)$) изложены в работах [2, 3], то здесь не будем на них останавливаться. Для простоты дальнейших рассуждений только предположим, что наследственные свойства материалов слоев одинаковы, т. е.

$$C_n (t, \tau) = C_n (t - \tau, \tau) = \varphi_n (\tau) f (t - \tau) \quad (n = 1, 2) \tag{1.1}$$

где $\varphi_n (\tau)$ — функции, учитывающие процесс старения материалов, а $f (t - \tau)$ — их наследственные свойства.

Пользуясь теперь относительной малостью толщины верхнего слоя ($\Lambda = ha^{-1} \ll 1$), рассмотрим некоторые соотношения между значениями модулей упругомгновенных деформаций слоев.

Пусть $\theta_1\theta_2^{-1} \sim \Lambda^m$ (const $= m > 0$; $\Lambda \ll 1$; $\theta_n = 0{,}5E_n (1 - \nu_n^2)^{-1}$; $n = 1, 2$). Тогда, принимая в расчет результаты работ [4, 5] и принцип соответствия [2], получим интегральное уравнение относительно неизвестных под штампом контактных давлений $q (r, t)$. Вводя безразмерные переменные и обозначения

$$\begin{gathered}\rho^* = \rho a^{-1},\ r^* = ra^{-1},\ t^* = t\tau_0^{-1},\ \tau^* = \tau\tau_0^{-1} \\ \varkappa_1^* (z) = \varkappa_1 (z) \tau_0^{-1},\ q^* (r^*, t^*) = q (r, t) \theta_2^{-1},\ \delta^* (t^*) = \delta (t) a^{-1} \\ g^* (r^*) = g (r) a^{-1},\ \lambda = Ha^{-1}, \quad c = 0{,}5\Lambda\theta_2\theta_1^{-1} (1 - 2\nu_1) (1 - \nu_1)^{-2} \\ C_n^* (t^*, \tau^*) = E_nC_n (t, \tau),\ P (t) (a^2\theta_2)^{-1} = N (t^*)\end{gathered} \tag{1.2}$$

(звездочку далее опустим), запишем его в форме

$$\begin{gathered}c \left[q (r, t) - \int_1^t q (r, \tau) \overline{K}_1 (t, \tau) d\tau \right] + \\ + \int_0^1 \rho k \left(\frac{\rho}{\lambda}, \frac{r}{\lambda}\right) \left[q (\rho, t) - \int_1^t q (\rho, \tau) K_2 (t - \tau_2, \tau - \tau_2) d\tau \right] d\rho = \\ = \delta (t) - g (r) \quad (0 \leqslant r \leqslant 1,\ 1 \leqslant t \leqslant T < \infty) \\ \overline{K}_1 (t, \tau) = \frac{1}{h} \int_0^h K_1 (t + \varkappa_1 (z), \tau + \varkappa_1 (z))\, dz\end{gathered} \tag{1.3}$$

$$k (\alpha, \beta) = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty L (u) J_0 (u\alpha) J_0 (u\beta)\, du \tag{1.4}$$

Здесь $\delta (t)$ — жесткое перемещение штампа, $J_0 (u)$ — функция Бесселя, а вид функции $L (u)$ приведен в [6] для случаев жесткого защемления нижней грани второго слоя или ее гладкого контакта с недеформируемым основанием.

К уравнению (1.3) необходимо добавить условие квазистатики

$$N (t) = 2\pi \int_0^1 \rho q (\rho, t)\, d\rho \tag{1.5}$$

Допустим теперь, что $\Lambda\theta_1\theta_2^{-1} = D$ ($D =$ const, $\Lambda \ll 1$), т. е. мгновенная жесткость верхнего слоя больше мгновенной жесткости нижнего. В этом случае тонкий слой будет работать по типу неоднородно-стареющей накладки [7]. Если далее предположить, что постоянная D достаточно мала, то, переходя к безразмерным переменным и обозначениям (1.2), получим

$$\int_0^1 q(\rho, t)\rho k\left(\frac{\rho}{\lambda}, \frac{r}{\lambda}\right)d\rho - \int_1^t K_2(t-\tau_2, \tau-\tau_2)\,d\tau \times \tag{1.6}$$

$$\times \int_0^1 q(\rho, \tau)\rho k\left(\frac{\rho}{\lambda}, \frac{r}{\lambda}\right)d\rho = \delta(t) - g(r)$$

$$(0 \leqslant r \leqslant 1,\ 1 \leqslant t \leqslant T < \infty)$$

Таким образом пришли к контактной задаче для однородно-стареющего вязкоупругого слоя.

2. Изложим методы решения интегральных уравнений (1.3), (1.6) в предположении, что сила $N(t)$, прижимающая штамп к основанию, изменяется во времени по закону

$$N(t) = N_\infty + N_*(t) \quad (N_\infty = \text{const};\ N_*(t) \to 0,\ t \to \infty) \tag{2.1}$$

Рассмотрим вначале уравнение (1.3) и перейдем в соответствии со схемой, изложенной в [8—10], к эквивалентному ему интегральному уравнению

$$Aq \equiv c\left[q(r, t) - q(r, 1) - \int_1^t q(r, \tau)\overline{K}_1(t, \tau)\,d\tau\right] + \tag{2.2}$$

$$+ \int_0^1 [q(\rho, t) - q(\rho, 1)]\rho k\left(\frac{\rho}{\lambda}, \frac{r}{\lambda}\right)d\rho -$$

$$- \int_1^t K_2(t-\tau_2, \tau-\tau_2)\,d\tau \int_0^1 q(\rho, \tau)\rho k\left(\frac{\rho}{\lambda}, \frac{r}{\lambda}\right)d\rho = \delta(t) - \delta(1)$$

$$(r \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$$

$$cq(r, 1) + \int_0^1 q(\rho, 1)\rho k\left(\frac{\rho}{\lambda}, \frac{r}{\lambda}\right)d\rho = \delta(1) - g(r) \quad (r \leqslant 1) \tag{2.3}$$

Будем искать решение (2.2) в форме [9—11]

$$q(r, t) = q_\infty(r) + q_*(r, t), \quad N_\infty = 2\pi\int_0^1 \rho q_\infty(\rho)\,d\rho \tag{2.4}$$

$$\delta(t) = \delta + \delta_\infty\Delta(t) + \delta_*(t) \tag{2.5}$$

Тогда, как можно заметить, получим с учетом формул (1.1), (1.3) и свойств меры ползучести $C_n(t, \tau)$ [2, 3]

$$\Delta(t) = \overline{C}_1(t, 1),\ \Delta(1) = 0,\ \overline{C}_1(t, \tau) = \overline{\varphi}_1(\tau)f(t-\tau) \tag{2.6}$$

$$\overline{\varphi}_1(\tau) = \frac{1}{h}\int_0^h \varphi_1(\tau + \varkappa_1(z))\,dz, \quad F = \frac{\varphi_2(1-\tau_2)}{\overline{\varphi}_1(1)}$$

$$cq_\infty(r) + F\int_0^1 q_\infty(\rho)\rho k\left(\frac{\rho}{\lambda}, \frac{r}{\lambda}\right)d\rho = \delta_\infty \quad (r \leqslant 1) \tag{2.7}$$

$$Aq_* = \delta_*(t) - \delta_*(1) \quad (r \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T) \tag{2.8}$$

При этом связь между постоянными δ_∞ и N_∞ найдется согласно второму условию (2.4) после решения интегрального уравнения (2.7) [1].

Потребуем теперь в соответствии с условием квазиравновесия (1.5) и представлением (2.1), чтобы

$$q_*(r,\ t) = q_1(t) + q_2(r,\ t) \tag{2.9}$$

$$\int_0^1 \rho q_2(\rho,\ t)\, d\rho = 0, \quad 2\pi \int_0^1 \rho q_1(t)\, d\rho = \pi q_1(t) = N_*(t)$$

Если теперь к левой части (2.8) прибавить и вычесть выражения (E — пока неопределенная постоянная)

$$E[q_1(t) - q_1(1)], \quad \int_0^1 [q_2(\rho,\ t) - q_2(\rho,\ 1)]\, \rho B(\rho)\, d\rho$$

$$B(\rho) = 2\int_0^1 \xi k\left(\frac{\rho}{\lambda},\ \frac{\xi}{\lambda}\right) d\xi, \quad E\int_1^t q_1(\tau) K_2(t - \tau_2,\ \tau - \tau_2)\, d\tau$$

$$\int_1^t K_2(t - \tau_2,\ \tau - \tau_2)\, d\tau \int_0^1 q_2(\rho,\ \tau)\, \rho B(\rho)\, d\rho$$

то интегральное уравнение (2.8) будет удовлетворено, когда функции $q_1(t)$ и $q_2(r,\ t)$ будут доставлять решения, соответственно, уравнениям

$$\begin{aligned}(c + E)[q_1(t) - q_1(1)] &- c\int_1^t q_1(\tau) \overline{K}_1(t,\ \tau)\, d\tau = \delta_*(t) - \delta_*(1) - \\ &- \int_0^1 [q_2(\rho,\ t) - q_2(\rho,\ 1)]\, \rho B(\rho)\, d\rho + E\int_1^t q_1(\tau) K_2(t - \tau_2,\ \tau - \tau_2)\, d\tau + \\ &+ \int_1^t K_2(t - \tau_2,\ \tau - \tau_2)\, d\tau \int_0^1 q_2(\rho,\ \tau)\, \rho B(\rho)\, d\rho\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}& c\left[q_2(r,\ t) - q_2(r,\ 1) - \int_1^t q_2(r,\ \tau) \overline{K}_1(t,\ \tau)\, d\tau\right] + \\ &+ \int_0^1 [q_2(\rho,\ t) - q_2(\rho,\ 1)]\, \rho k^\circ\left(\frac{\rho}{\lambda},\ \frac{r}{\lambda}\right) d\rho - \\ &- \int_1^t K_2(t - \tau_2,\ \tau - \tau_2)\, d\tau \int_0^1 q_2(\rho,\ \tau)\, \rho k^\circ\left(\frac{\rho}{\lambda},\ \frac{r}{\lambda}\right) d\rho = \\ &= h(r,\ t) \quad (r \leqslant 1,\quad 0 \leqslant t \leqslant T) \\ & h(r,\ t) = e(t)[E - {}^1/_2 B(r)], \quad e(t) = q_1(t) - q_1(1) - \\ &- \int_1^t q_1(\tau) K_2(t - \tau_2,\ \tau - \tau_2)\, d\tau\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$k^\circ(\rho/\lambda,\ r/\lambda) = k(\rho/\lambda,\ r/\lambda) - B(\rho) - B(r) \tag{2.12}$$

Заметим, что ядро $k^\circ(\alpha,\ \beta)$ вида (2.12) симметрично и обладает тем свойством, что

$$\int_0^1 \int_0^1 q_2(\rho,\ t)\, \rho r k^\circ\left(\frac{\rho}{\lambda},\ \frac{r}{\lambda}\right) d\rho\, dr = 0 \tag{2.13}$$

Введем в рассмотрение пространство $L_2^\circ(\Omega)$ функций, интегрируемых с квадратом в круге Ω: $r \leqslant 1$ и удовлетворяющих условию

$$\int_0^1 r h(r)\, dr = 0 \tag{2.14}$$

Можно доказать, что пространство $L_2^\circ(\Omega)$ является полным подпространством $L_2(\Omega)$.

Теорема 1. Интегральный оператор

$$Hq = \int_0^1 q(\rho)\rho k^\circ\left(\frac{\rho}{\lambda}, \frac{r}{\lambda}\right) d\rho \tag{2.15}$$

является самосопряженным, вполне непрерывным и положительным оператором, действующим из $L_2^\circ(\Omega)$ в $L_2^\circ(\Omega)$.

Доказательство теоремы 1 проводится по схеме работы [1].

Далее, методами работ [1, 10] построим систему собственных функций $\{h_n(r)\}$ $(n \geqslant 1)$ и соответствующую им последовательность собственных чисел $\{\mu_n\}$ оператора (2.15). В силу теоремы 1 эта система ортонормирована и полна в $L_2^\circ(\Omega)$, а все $\mu_n \geqslant 0$, причем $\mu_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Выбирая постоянную E во втором соотношении (2.11) таким образом, чтобы выполнялось условие типа (2.14), т. е. $h(r, t) \in L_2^\circ(\Omega)$ по r, представим функции $q_2(r, t)$ и $h(r, t)$ в форме следующих рядов:

$$q_2(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) h_n(r) \tag{2.16}$$

$$h(r, t) = e(t) \sum_{n=1}^{\infty} c_n h_n(r) \tag{2.17}$$

$$c_n = -\int_0^1\int_0^1 \rho r h_n(r) k\left(\frac{\rho}{\lambda}, \frac{r}{\lambda}\right) d\rho\, dr$$

Внося затем выражения (2.16), (2.17) в интегральное уравнение (2.11) и приравнивая в полученном соотношении коэффициенты левой и правой частей при собственных функциях оператора H одинакового номера, придем к уравнению

$$a_n(t) - \int_1^t a_n(\tau) M_n(t, \tau)\, d\tau = a_n(1) + \frac{c_n}{c+\mu_n} e(t) \quad (1 \leqslant t \leqslant T)$$

$$M_n(t, \tau) = (c + \mu_n)^{-1}\left[c\overline{K}_1(t, \tau) + \mu_n K_2(t - \tau_2, \tau - \tau_2)\right]$$

решение которого представимо в форме

$$a_n(t) = a_n(1)\left[1 + \int_1^t \Gamma_n(t, \tau)\, d\tau\right] + \frac{c_n}{c+\mu_n}\left[e(t) + \int_1^t e(\tau)\Gamma_n(t, \tau)\, d\tau\right] \tag{2.18}$$

где $\Gamma_n(t, \tau)$ — резольвента ядра $M_n(t, \tau)$ [2].

Используя теперь формулы (2.9), (2.10), (2.16) и (2.18), найдем неизвестную под штампом добавку к осадке основания $\delta_*(t)$ и функцию $q_2(r, t)$ с точностью до счетного множества постоянных $a_n(1)$. Последние определим, подставив контактные напряжения $q(r, 1)$ в интегральное уравнение (2.3) (вопрос о разрешимости интегрального уравнения (2.3), равно как и уравнения (2.7), изучен в работе [1]) и проделав следующие преобразования. Дополним систему $\{h_n(r)\}$ $(n \geqslant 1)$ собственных функций оператора Hq (2.15) элементом $h_0(r) = \sqrt{2}$. Тогда последовательность функций $\{h_n(r)\}$ $(n \geqslant 0)$ будет ортонормирована и полна в пространстве $L_2(\Omega)$. Разложим принадлежащие $L_2(\Omega)$ функции $g(r)$, $B(r)$, $q_\infty(r)$ в ряды по системе $\{h_n(r)\}$ $(n \geqslant 0)$

$$g(r) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n h_n(r), \quad B(r) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n h_n(r) \tag{2.19}$$

$$q_\infty(r) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n h_n(r)$$

Ряды (2.19) сходятся, по крайней мере, по норме пространства $L_2(\Omega)$, а соответствующие коэффициенты принадлежат пространству квадратично суммируемых последовательностей l_2 и определяются при помощи условия ортонормированности функций $\{h_n(r)\}$ $(n \geqslant 0)$. Из формул (2.1), (2.4), (2.9) и (2.16) найдем

$$q(r, 1) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n h_n(r), \quad X_0 = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} N(1) \tag{2.20}$$

$$X_n = d_n + a_n(1) \quad (n \geqslant 1)$$

С учетом разложений (2.19), (2.20) и условия ортогональности системы функций $\{h_n(r)\}$ $(n \geqslant 0)$ из уравнения (2.3) получим

$$X_n = -(c + \mu_n)^{-1}(g_n + X_0 b_n/\sqrt{2}) \tag{2.21}$$

$$X_0 = (\sqrt{2}c + b_0)^{-1}[\delta(1) - \sum_{n=1}^{\infty} X_n b_n - \sqrt{2} g_0]$$

Здесь также было принято во внимание, что $\{h_n(r)\}$ $(n \geqslant 1)$ являются собственными функциями оператора (2.15) и удовлетворяют условию (2.14). Теперь из первого соотношения (2.21) и (2.20) найдем систему постоянных $a_n(1)$; далее по формуле (2.10) определим $\delta_*(t)$, а из второго равенства (2.21) — постоянную δ, входящую в представление (2.5).

Теорема 2. Ряд (2.16) сходится в $L_2^\circ(\Omega)$ равномерно по t на $[1, T]$, а формулы (2.4), (2.9) и (2.16) определяют обобщенное решение уравнения (1.3), (1.4).

Не приводя доказательства теоремы 2, отметим, что оно аналогично построенному в работе [11].

3. Остановимся теперь на решении интегрального уравнения (1.6). Для этого, как можно увидеть, в соответствующих формулах п. 2 необходимо положить $\overline{K}_1(t, \tau) = c \equiv 0$. Тогда соотношения (2.3), (2.6), (2.7), (2.10) и (2.11) перепишутся в форме

$$\int_0^1 q(\rho, 1)\rho k\left(\frac{\rho}{\lambda}, \frac{r}{\lambda}\right) d\rho = \delta(1) - g(r) \quad (r \leqslant 1) \tag{3.1}$$

$$\Delta(t) = \varphi_2(1 - \tau_2) f(t - 1), \ \Delta(1) = 0$$

$$\int_0^1 q_\infty(\rho)\rho k\left(\frac{\rho}{\lambda}, \frac{r}{\lambda}\right) d\rho = \delta_\infty \quad (r \leqslant 1) \tag{3.2}$$

$$E\left[q_1(t) - q_1(1) - \int_1^t q_1(\tau) K_2(t - \tau_2, \tau - \tau_2) d\tau\right] = \delta_*(t) - \delta_*(1) +$$

$$+ \int_1^t K_2(t - \tau_2, \tau - \tau_2) d\tau \int_0^1 q_2(\rho, \tau)\rho B(\rho) d\rho$$

$$(3.3)\qquad \int_0^1 [q_2(\rho, t) - q_2(\rho, 1)]\,\rho k^\circ\left(\frac{\rho}{\lambda}, \frac{r}{\lambda}\right)d\rho -$$

$$- \int_1^t K_2(t-\tau_2, \tau-\tau_2)\,d\tau \int_0^1 q_2(\rho, \tau)\,\rho k^\circ\left(\frac{\rho}{\lambda}, \frac{r}{\lambda}\right)d\rho =$$

$$= h(r, t), \quad B(\rho) = \int_0^1 \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\,k\left(\frac{\rho}{\lambda}, \frac{\xi}{\lambda}\right)d\xi \quad (r \leqslant 1,\ 1 \leqslant t \leqslant T)$$

Заметим, что, в отличие от предыдущего случая, решения интегральных уравнений (3.1) — (3.3) имеют уже особенность типа квадратного корня на краю линии контакта ($r = 1$) [6], поэтому дальнейшие рассуждения целесообразно вести по следующему плану. Поскольку ядро $k^\circ(\alpha, \beta)$ (2.12) симметрично и выполняется равенство (ср. с (2.13))

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{\omega_2(\rho, t)\,\rho r}{\sqrt{(1-\rho^2)(1-r^2)}}\,k^\circ\left(\frac{\rho}{\lambda}, \frac{r}{\lambda}\right)d\rho\,dr = 0, \quad q_2(r, t) = \frac{\omega_2(r, t)}{\sqrt{1-r^2}}$$

то введем пространство $\overset{\circ}{L}_{2,\,{}^1/_2}(\Omega)$ функций, суммируемых с квадратом в области Ω и весом $(1-r^2)^{-1/2}$, интеграл от которых по Ω равен нулю. Можно показать, что $\overset{\circ}{L}_{2,\,{}^1/_2}(\Omega)$ — полное подпространство гильбертова пространства $L_{2,\,{}^1/_2}(\Omega)$ квадратично интегрируемых с весом $(1-r^2)^{-1/2}$ по области Ω функций. Кроме того, как и выше, имеет место [1].

Теорема 3. Оператор $H\omega$ (2.15), $q(r) = \omega(r)/\sqrt{1-r^2}$ является самосопряженным, вполне непрерывным и положительно-определенным оператором, действующим в гильбертовом пространстве $\overset{\circ}{L}_{2,\,{}^1/_2}(\Omega)$.

Построим теперь, как показано в [10], систему собственных функций $\{h_n(r)\}$ $(n \geqslant 1)$ и соответствующую им последовательность собственных чисел $\{\mu_n\}$ оператора H, взяв в качестве координатных элементы $\sqrt{4j+1}\,P_{2j}(\sqrt{1-r^2})$ ($P_j(r)$ — полиномы Лежандра). Поскольку в силу теоремы 3 система $\{h_n(r)\}$ ортонормирована и полна в $\overset{\circ}{L}_{2,\,{}^1/_2}(\Omega)$, а $\mu_n > 0$, $\mu_n \to 0$ $(n \to \infty)$, то дальнейшее решение задачи воспроизводит рассуждения п. 2 с соответствующими очевидными видоизменениями.

Далее обратим внимание на одно обстоятельство. Чтобы выписать интегральные уравнения плоских аналогов изученных задач, необходимо воспользоваться следующим принципом соответствия [1, 6, 12]. Если известно ядро Фредгольма интегрального уравнения осесимметричной контактной задачи, представленное в форме (1.4), то ядро Фредгольма соответствующей плоской задачи имеет вид

$$(3.4)\qquad k(y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty L(u)\,u^{-1}\cos uy\,du, \quad y = \frac{\xi - x}{\lambda}$$

При этом условие квазистатики (1.5) трансформируется в следующие:

$$(3.5)\qquad N_0(t) = \int_{-1}^1 q(x, t)\,dx, \quad N_1(t) = N_0(t)\,\varepsilon(t) = \int_{-1}^1 xq(x, t)\,dx$$

которые служат для определения связи между $N_0(t)$ и $\delta(t)$, $\alpha(t)$ и $\varepsilon(t)$. Здесь $\varepsilon(t)$ и $\alpha(t)$ — соответственно эксцентриситет приложения силы $N_0(t)$ и угол поворота штампа.

Что касается решения интегральных уравнений (1.3), (1.6), (3.4), (3.5), то к ним применимы методы, изложенные в пп. 2, 3. При этом только нужно иметь в виду, что при нахождении собственных функций оператора

$$Hq = \int_{-1}^{1} q(\xi)\, k\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi$$

методом работы [10] в качестве координатных элементов необходимо брать в первом случае систему ортонормированных полиномов Лежандра, а во втором — полиномы Чебышева первого рода.

4. Остановимся на численном анализе уравнения (1.3) — (1.5). Пусть

$$\varphi_1 [\tau + \varkappa_1 (z)] = A_0 + A_1 \exp \{-\beta [\tau + \varkappa_1 (z)]\}$$

Тогда в согласии с формулой (2.6)

$$\bar{\varphi}_1 (\tau) = A_0 + A_1 \mu e^{-\beta\tau}, \quad \mu = \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\beta\varkappa_1(z)}\, dz$$

Допустим $\varkappa_1 (z) \geqslant 0$, т. е. возраст верхнего слоя растет по высоте, что происходит, если слой подвержен влиянию внешних воздействий (облучение, температура и т. д.) — искусственное старение. В этом случае $0 < \mu \leqslant 1$. Если $-1 < \varkappa_1 (z) \leqslant 0$, т. е. возраст тонкого слоя уменьшается по высоте — естественное старение, что соответствует процессу возведения верхнего слоя на нижнем, то $1 \leqslant \mu < e^{\beta}$. Таким образом, изменяя параметр μ в указанных пределах, можно построить решение поставленной задачи для любых функций $\varkappa_1 (z)$. Кроме того, заметим, что выбором начала отсчета времени можно распорядиться так, чтобы $\tau_2 \equiv 0$.

Числовые расчеты проводились для случая: $g (r) = 0$ (штамп имеет плоское основание); $N (t) \equiv 1$; $\lambda = 6$; $c = 0{,}2$; $A_0 = 0{,}5522$; $A_1 = 4$; $f (t - \tau) = 1 - e^{-\gamma(t-\tau)}$; $L (u) = (\mathrm{ch}\, 2u - 1)(\mathrm{sh}\, 2u + 2u)^{-1}$ (значения параметров β, γ и τ_0 брались из [13]) и сравнивались с таковыми из работы [13], в которой исследуемое интегральное уравнение (1.3) — (1.5) решалось методами, изложенными в [9—11]. Результаты сравнения показали совпадение числовых значений основных характеристик рассматриваемой задачи с погрешностью, не превышающей 3%.

Напомним некоторые механические выводы.

В случае $t = 1$ и при любых значениях параметра μ основание будет представлять собой упругий слой, армированный по верхней границе упругим покрытием винклеровского типа [5]. При этом минимальные значения контактных давлений (при $r = 0$) будут меньше таковых в случае естественного старения и больше — в случае искусственного, а максимальные (при $r = 1$) — наоборот, меньше контактных напряжений для случая искусственного старения, но больше — в случае естественного.

С ростом естественной неоднородности (с ростом параметра μ) максимальные контактные давления уменьшаются, а минимальные увеличиваются.

С ростом искусственной неоднородности, что соответствует уменьшению параметра μ от 1 до 0, максимальные контактные давления будут расти, а минимальные уменьшаться.

Осадка основания под штампом $\delta (t)$ с течением времени будет возрастать и стремиться к предельному значению, которое тем больше, чем больше параметр μ.

Если параметр неоднородности $\mu=1$ и слои изготовлены из одного и того же материала, а сила, действующая на штамп с плоским основанием от времени не зависит, получим, что распределение давлений под штампом будет таким же, как в аналогичной упругой задаче, т. е. ползучесть в этом случае не оказывает влияния на распределение контактных напряжений.

Пусть $\mu = 0$. Тогда верхний слой будет работать по типу основания, реологические свойства которого подчиняются закону линейной наследственности Вольтерра [14].

Вариант $\mu = e^{\beta}$ соответствует случаю кусочно-однородного старения рассматриваемого основания и исследован в [11].

В заключение отметим, что существует тесная связь между контактными задачами для составных вязкоупругих оснований и контактными задачами для линейно-деформируемых оснований при наличии абразивного износа [8, 15]. При исследовании последних возникают такого же типа интегральные уравнения, как (1.3) или (1.6).

Автор благодарит Н. Х. Арутюняна и В. М. Александрова за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров В. М., Коваленко Е. В., Марченко С. М.* О двух контактных задачах теории упругости для слоя с покрытием винклеровского типа.— Прикл. механика, 1983, т. 19, № 10, с. 47—54.
2. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.— Л.: Гостехиздат, 1952. 324 с.
3. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно-стареющих тел.— Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 3, с. 153—164.
4. *Коваленко Е. В., Теплый М. И.* Контактные задачи при нелинейном законе изнашивания для тел с покрытиями. I.— Трение и износ, 1983, т. 4, № 3, с. 440—448.
5. *Александров В. М., Мхитарян С. М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
6. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
7. *Мирзоян С. Е., Мхитарян С. М.* О некоторых задачах контактного взаимодействия между бесконечными стрингерами и полосами с учетом неоднородности старения материалов.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1981, т. 34, № 5, с. 27—40.
8. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Осесимметричная контактная задача для линейно-деформируемого основания общего типа при наличии износа.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 5, с. 58—66.
9. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Об одном классе интегральных уравнений смешанных задач механики сплошных сред.— Докл. АН СССР, 1980, т. 252, № 2, с. 324—328.
10. *Коваленко Е. В.* О приближенном решении одного типа интегральных уравнений теории упругости и математической физики.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1981, т. 34, № 5, с. 14—26.
11. *Коваленко Е. В., Манжиров А. В.* Контактная задача для двухслойного стареющего вязкоупругого основания.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 4, с. 674—682.
12. *Коваленко Е. В., Теплый М. И.* Контактные задачи при нелинейном законе изнашивания для тел с покрытиями. II.— Трение и износ, 1983, т. 4, № 4, с. 676—682.
13. *Манжиров А. В.* Осесимметричные контактные задачи для неоднородно-стареющих вязкоупругих слоистых оснований.— ПММ, 1983, т. 47, вып. 4, с. 684—693.
14. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
15. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Плоские контактные задачи теории упругости для неклассических областей при наличии износа.— ПМТФ, 1980, № 3, с. 163—172.

Москва

Поступила в редакцию
25.X.1983