Отсюда

$$\frac{\sigma_i}{\sigma_j}=\frac{1+\delta_j}{1+\delta_i}\quad\left(0\leqslant M\leqslant \min\left\{\frac{2}{\sigma_l}\right\},\quad l=1,2,\ldots,L\right)$$

$$-\sigma_i\varkappa_i+\gamma_i=-\sigma_j\varkappa_j+\gamma_j,\quad \varkappa_i=\frac{-N+\gamma_i}{\sigma_i},\quad \varkappa_j=\frac{-N+\gamma_j}{\sigma_j}$$

$$(-1\leqslant\varkappa_l\leqslant 1,\quad \min(\gamma_l-\sigma_l)\leqslant N\leqslant\min(\gamma_l+\sigma_l),\quad l=1,2,\ldots,L)$$

Формула (8) позволяет применять данную методику к решению класса задач, описанных в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Манько Г. П., Рвачев В. Л.* Конструирование решений краевых задач с разрывными граничными условиями и условиями сопряжения для областей сложной формы.— В кн.: Теоретическая электротехника. Вып. 13. Львов: Изд-во Львов. ун-та, 1972, с. 124—128.
2. *Рвачев В. Л., Слесаренко А. П.* Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах. Киев: Наук. думка, 1976. 287 с.
3. *Рвачев В. Л., Слесаренко А. П., Литвин Н. Н.* Расчет температурного поля кусочно-однородных тел сложной формы.— В кн.: Теплофизика и теплотехника. Вып. 32. Киев: Наук. думка, 1977, с. 18—22.
4. *Шейко Т. И.* Метод R-функций в задаче о проводимости неоднородной среды в магнитном поле.— Ж. техн. физики, 1979, т. 49, вып. 12, с. 2527—2534.
5. *Рвачев В. Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наук. думка. 1982 551 с.

Харьков

Поступила в редакцию 17.XII.1982

УДК 539.375

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛОСКОСТИ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПАР ТРЕЩИН ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА

Новиков В. Г., Тулинов Б. М.

Методом тройных интегральных уравнений получено замкнутое решение задачи о периодической системе параллельных пар коллинеарных трещин продольного сдвига. Случай одной трещины конечной длины в полосе периодов при различных напряженных состояниях рассматривался в работах [1—5], а двух полубесконечных трещин — в [6, 7]. Задача о двух коллинеарных трещинах в бесконечной среде исследовалась в [8—11].

Пусть неограниченная упругая плоскость xOy ослаблена периодической системой разрезов $a\leqslant|x|\leqslant b$, $y=(2n+1)d$, $n=0,\pm1,\pm2\ldots$. Вне разрезов должны выполняться соотношения [12]

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0,\quad \sigma_{xz}=\mu\frac{\partial w}{\partial x},\quad \sigma_{yz}=\mu\frac{\partial w}{\partial y}\tag{1}$$

где μ — модуль сдвига, w — смещение вдоль оси z, σ_{xz} и σ_{yz} — компоненты тензора напряжений. Предположим, что смещение и напряжения — периодические функции координаты y с периодом $2d$. Тогда задача сводится к построению решения уравнений (1) в полосе $-d<y<d$, удовлетворяющего граничным условиям

$$w(x,\pm d)=0,\ |x|\leqslant a,\ |x|\geqslant b\tag{2}$$

$$\sigma_{yz}(x,\pm d)=-T(x),\quad a<|x|<b\tag{3}$$

Предположим, что нагрузка $T(x)$ — симметричная функция координаты x. Тогда можно ограничиться рассмотрением области $x\geqslant 0$, а решение уравнений (1) представить в виде

$$w=\int\limits_0^\infty\frac{1}{q}f(q)\,\mathrm{sh}\,qy\cos qx\,dq\tag{4}$$

$$\sigma_{yz}=\mu\int_0^\infty f(q)\operatorname{ch} qy\cos qx\,dq$$

$$\sigma_{xz}=\mu\int_0^\infty f(q)\operatorname{sh} qy\sin qx\,dq$$

Для определения функции $f(q)$ из граничных условий (2), (3) получаем тройные интегральные уравнения

$$\int_0^\infty f(q)\operatorname{sh} qd\sin qx\,dq=0,\quad 0<x<a,\quad x>b \tag{5}$$

$$\int_0^\infty f(q)\operatorname{ch} qd\cos qx\,dq=-\frac{T(x)}{\mu},\quad a<x<b$$

где соотношение (2) продифференцировано по x. Отметим, что решение аналогичных парных интегральных уравнений известно [13].

Для построения решения уравнений (5) разложим функцию $f(q)$ в интеграл Канторовича — Лебедева [14]

$$f(q)=\int_0^\infty A(s)\,K_{i2qd/\pi}(s)\,ds \tag{6}$$

Подставляя представление (6) в уравнения (5) и используя значение интеграла [14]

$$\int_0^\infty K_{it}(s)\cos\alpha t\,dt=\frac{\pi}{2}e^{-s\operatorname{ch}\alpha},\quad |\operatorname{Im}\alpha|<\frac{\pi}{2} \tag{7}$$

получаем для функции $A(s)$ тройные интегральные уравнения

$$\int_0^\infty A(s)\sin sp\,ds=0,\quad 0<p<a_1,\quad p>b_1 \tag{8}$$

$$\int_0^\infty A(s)\cos sp\,ds=-\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\frac{d}{\mu}F(p),\quad a_1<p<b_1 \tag{9}$$

$$\left(p=\operatorname{sh}\frac{\pi x}{2d},\quad a_1=\operatorname{sh}\frac{\pi a}{2d},\quad b_1=\operatorname{sh}\frac{\pi b}{2d},\quad F(p)=T(x)\right)$$

Ищем функцию $A(s)$ в виде

$$A(s)=\int_{a_1}^{b_1}\varphi(t)\sin st\,dt \tag{10}$$

Учитывая ортогональность функций $\sin s\alpha$ и $\sin s\beta$ при $\alpha\neq\beta$ и формулу [15]

$$\int_0^\infty \sin qx\,dq=\frac{1}{x}$$

можно показать, что уравнения (8) удовлетворяются тождественно, а из (9) получаем уравнение для определения функции $\varphi(t)$

$$\int_{a_1}^{b_1}\frac{t\varphi(t)}{t^2-p^2}\,dt=-\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\frac{d}{\mu}F(p)$$

решение которого имеет вид [16]

$$\varphi(t)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^4\frac{d}{\mu}\frac{1}{\sqrt{(t^2-a_1^2)(b_1^2-t^2)}}\left[\frac{\pi C}{2d}+\right. \tag{11}$$

$$\left.+\int_{a_1}^{b_1}\frac{\sqrt{(p^2-a_1^2)(b_1^2-p^2)}}{p^2-t^2}\,pF(p)\,dp\right]$$

где C — постоянная, значение которой будет определено ниже, а интеграл в формуле (11) понимается в смысле главного значения. Другими методами уравнения (8), (9) рассматривались в работах [17—19].

Распределение напряжений выражается непосредственно через функцию $\varphi(t)$. Подставляя соотношение (6) в формулы (4) и используя (7), получаем

$$\sigma_{yz}+i\sigma_{xz}=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\frac{\mu}{d}\int\limits_0^\infty A(s)\,e^{-s\xi}ds,\quad \xi=\operatorname{ch}\frac{\pi(x+iy)}{2d} \tag{12}$$

Из выражений (10) и (12) следует

$$\sigma_{yz}+i\sigma_{xz}=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\frac{\mu}{d}\int\limits_{a_1}^{b_1}\frac{t\varphi(t)\,dt}{t^2+\xi^2} \tag{13}$$

Для смещений аналогичным образом получаем представление

$$w=\frac{\pi}{4}\operatorname{Im}\int\limits_{a_1}^{b_1}\frac{\varphi(t)}{\sqrt{t^2+1}}\ln\left(\frac{\sqrt{t^2+1}\,\xi+t\zeta}{\sqrt{t^2+1}\,\xi-t\zeta}\right)dt,\quad \zeta=\operatorname{sh}\frac{\pi(x+iy)}{2d}$$

Подставляя функцию $\varphi(t)$ из (11) в (13), получаем окончательный вид распределения напряжений.

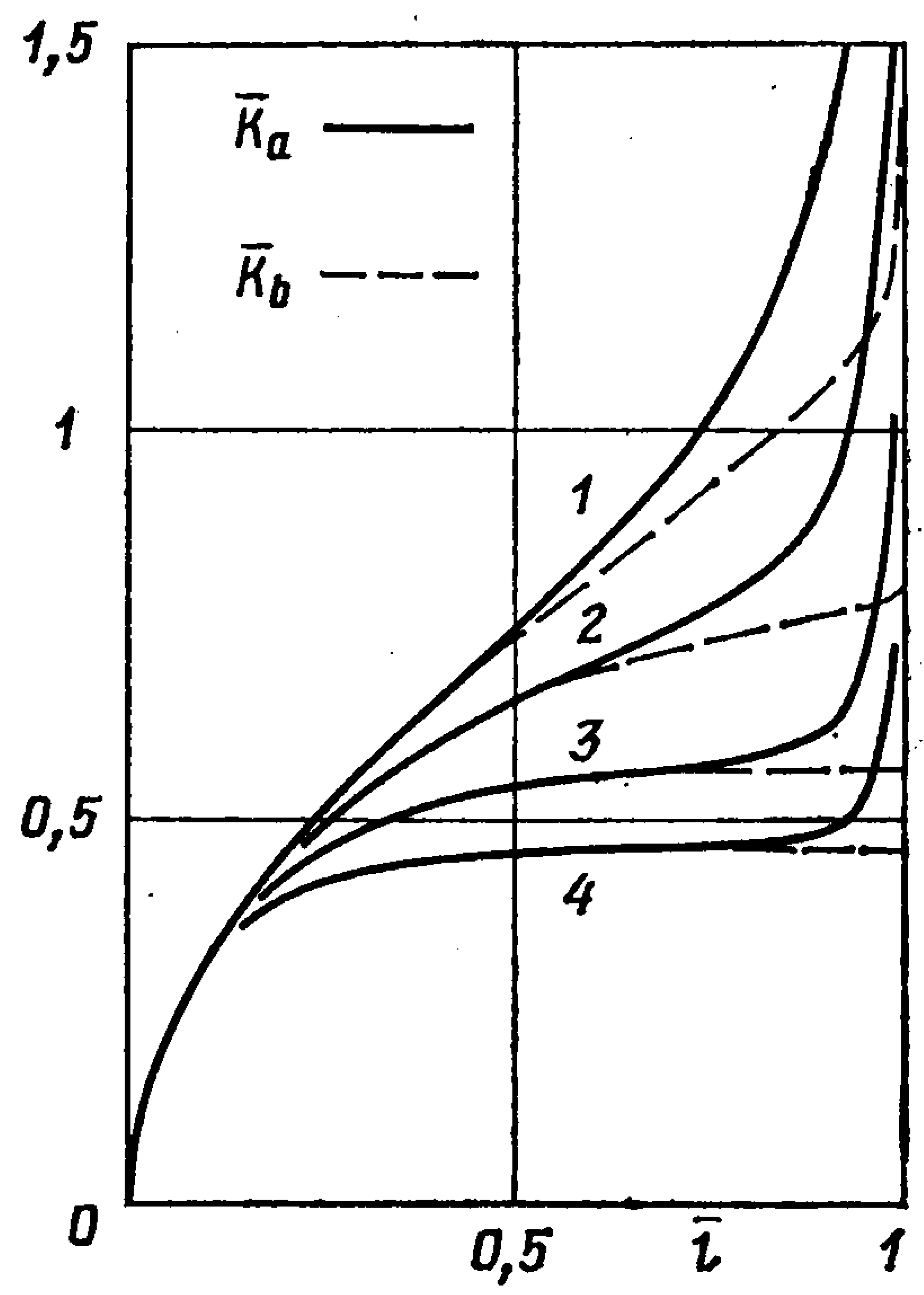
Из (11), (13) и асимптотического выражения для напряжений на продолжении трещины $\sigma_{yz}\simeq K/\sqrt{2\Delta}$, где Δ — расстояние от вершины разреза, следуют выражения для коэффициентов K_a, K_b интенсивности напряжений в точках $x=a$ и $x=b$. Эти выражения содержат постоянную C, значение которой должно определяться из условия однозначности вектора смещений при обходе вдоль контура трещины [12]. Можно показать, что это условие выражается через функцию $\varphi(t)$ следующим образом:

$$\int\limits_{a_1}^{b_1}\frac{\varphi(t)\,dt}{\sqrt{t^2+1}}=0$$

В случае однородной нагрузки $T(x)=\tau_0$ отсюда получаем

$$C=-\frac{\tau_0 d}{2}\left[a_1^2+b_1^2-2a_1^2\frac{\Pi(n,k)}{K(k)}\right]$$

$$n=1-\frac{a_1^2}{b_1^2},\quad k^2=\frac{n}{1+a_1^2}$$



где $K(k)$ и $\Pi(n,k)$ — полные эллиптические интегралы первого и третьего рода соответственно. Для коэффициентов интенсивности напряжений в случае однородной нагрузки имеем

$$\frac{K_a}{K_0}=\bar{K}_a=\sqrt{\frac{2d}{\pi l_0}\operatorname{th}\left(\frac{\pi a}{2d}\right)}\frac{a_1}{\sqrt{b_1^2-a_1^2}}\left[\frac{\Pi(n,k)}{K(k)}-1\right]$$

$$\frac{K_b}{K_0}=\bar{K}_b=\sqrt{\frac{2d}{\pi l_0}\operatorname{th}\left(\frac{\pi b}{2d}\right)}\frac{b_1}{\sqrt{b_1^2-a_1^2}}\left[1-\frac{a_1^2\Pi(n,k)}{b_1^2K(k)}\right]$$

$$(2l_0=a+b,\quad K_0=\tau_0\sqrt{l_0})$$

На фигуре приведены зависимости $\bar{K}_a$ (сплошные линии) и $\bar{K}_b$ (штриховые линии) от параметра $\bar{l}=l/l_0$, где $2l=b-a$ — длина отдельной трещины. Кривым *1*, *2*, *3*, *4* соответствуют значения $d/l_0=\infty$ (две коллинеарные трещины), 1, $^1/_2$ и $^1/_3$. При увеличении длины трещины коэффициенты интенсивности напряжений монотонно возрастают. При слиянии коллинеарных трещин коэффициент K_a обращается в бесконечность, а K_b остается конечным. При малых d/l_0 кривые $\bar{K}_a(\bar{l})$ и $\bar{K}_b(\bar{l})$ имеют пологий участок, на котором значения K_a и K_b практически постоянны и равны $\tau_0\sqrt{2d/\pi}$ — коэффициенту интенсивности напряжений для системы параллельных полубесконечных трещин.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Smith E.* The spread of plasticity from stress concentrations.— Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1964, v. 282, No. 1390, p. 422—432.
2. *Smith E.* The opening of parallel cracks by an applied tensile stress.— Internat. J. Engng Sci., 1966, v. 4, No. 1, p. 41—52.
3. *Ichikava M., Ohashi M., Yokobori T.* Interaction between parallel cracks in an elastic solid and its effect on fracture.— Repts Res. Inst. Strength and Fract. Mater. Tohoku Univ., 1965, v. 1, No. 1, p. 1—14.
4. *Саврук М. П.* Напряжения в пластине с бесконечным рядом параллельных трещин при симметричной нагрузке.— Физ.-хим. механика материалов, 1971, т. 7, № 6, с. 104—106.
5. *Саврук М. П.* Напряжения в пластине с бесконечным рядом параллельных трещин при антисимметричной нагрузке.— Физ.-хим. механика материалов, 1972, т. 8, № 4, с. 109—111.
6. *Саврук М. П.* Напряжения в пластине с бесконечным рядом внешних параллельных трещин при симметричной нагрузке.— Прикл. механика, 1975, т. 11, вып. 5, с. 126—129.
7. *Саврук М. П.* Напряжения в пластине с периодической системой внешних параллельных трещин при антисимметричной нагрузке.— Физ.-хим. механика материалов, 1977, т. 13, № 1, с. 117—119.
8. *Tranter C. J.* The opening of a pair of coplanar Griffith cracks under internal pressure.— Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1961, v. 14, No. 3, p. 283—292.
9. *Lowengrub M., Srivastava K. N.* On two coplanar Griffith cracks in an infinite elastic medium.— Internat. J. Engng Sci., 1968, v. 6, No. 6, p. 359—362.
10. *Tweed J.* The determination of the stress intensity factors of a pair of coplaner Griffith cracks whose surfaces are loaded asymmetrically.— Engng Fract. Mech., 1971, v. 3, No. 4, p. 381—402.
11. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 443 с.
12. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 343 с.
13. *Бабloян А. А.* Решение некоторых парных интегральных уравнений.— ПММ, 1964, т. 28, вып. 6, с. 1015—1023.
14. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Наука, 1974. 542 с.
15. *Брычков Ю. А. Прудников А. П.* Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977. 287 с.
16. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
17. *Tranter C. J.* Some triple integral equations.— Proc. Glasgow Math. Assoc., 1960, v. 4, No. 4, p. 200—203.
18. *Srivastava K. N., Lowengrub M.* Finite Hilbert transform technique for triple integral equations with trigonometric kernels.— Proc. Roy. Soc. Edinb. Sect. A, 1970, v. 68, p. 309—321.
19. *Бабloян А. А., Мхитарян С. М.* К решению некоторых «тройных» уравнений с тригонометрическими функциями.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1969, т. 22, № 6, с. 3—9.

Москва

Поступила в редакцию
12.V.1983

Технический редактор *В. М. Пахомова*

Сдано в набор 25.07.84 Подписано к печати 12.09.84 Т-13191 Формат бумаги 70×108¹/₁₆
Высокая печать Усл. печ. л. 15,4 Усл. кр.-отт. 34,0 тыс. Уч.-изд. л. 15,6 Бум. л. 5,5
Тираж 2183 экз. Зак. 398

Издательство «Наука». 103717 ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука», 121099, Москва, Шубинский пер., 10