

5. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
6. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1976. 327 с.
7. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Об одном классе интегральных уравнений смешанных задач механики сплошных сред.— Докл. АН СССР, 1980, т. 252, № 2, с. 324—327.
8. *Коваленко Е. В.* О приближенном решении одного типа интегральных уравнений теории упругости и математической физики.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1981, т. 34, № 5, с. 14—26.
9. *Коваленко Е. В.* Об эффективном методе решения контактных задач для линейно-деформируемого основания с тонким усиливающим покрытием.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1979, т. 32, № 2, с. 76—82.
10. *Найфэ А. Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
11. *Маричев О. И.* Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул). Минск: Наука и техника, 1978. 310 с.
12. *Миролюбов А. А., Солдатов М. А.* Линейные однородные разностные уравнения. М.: Наука, 1981. 206 с.
13. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
14. *Нуллер Б. М., Спесивцева Л. Ф.* Об одном классе задач для упругих областей, ослабленных неоднородным включением.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 2, с. 46—52.
15. *Попов Г. Я., Тихоненко Л. Я.* Точное решение плоских задач о контакте полубесконечных балок с упругим клином.— ПММ, 1975, т. 39, вып. 6, с. 1100—1109.

Москва

Поступила в редакцию  
2.III.1983

УДК 539.374

## МЕТОД В-ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧАХ РАСЧЕТА ПОЛЕЙ ДЛЯ ТЕЛ, ФИЗИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОТОРЫХ ИМЕЮТ РАЗРЫВЫ ПЕРВОГО РОДА

Рвачев В. Л., Шейко Т. И.

Предлагается новая методика учета условий стыковки, возникающих в телах, состоящих из частей с различными физическими характеристиками. Методика основана на представлении структур решения различными аналитическими выражениями в различных подобластях. Рассматриваются два типа условий стыковки, возникающих в задачах расчета электрических полей для локально изотропных и анизотропных проводимостей. Решение реализуется на основе метода Ритца. Приводятся численные результаты.

В задачах теплопроводности, электростатики, теории упругости для тел, состоящих из частей с различными физическими характеристиками кроме обычных краевых условий на границе рассматриваемого тела появляются условия стыковки внутри области  $\Omega$  (фиг. 1). Вид этих условий определяется физической постановкой задачи. Рассматривались [1—5] разные типы условий стыковки, однако во всех случаях после построения структуры решения  $u = B(\Phi)$ , учитывающей все краевые условия на внешней границе  $\partial\Omega$ , в ней производилось сохраняющее границу  $\partial\Omega$  отображение

$$(1) \quad Q = \{x^1 = x + \omega^2(x)\alpha(x)\}$$

$$x^1 = \{x_i^1\}, \quad x = \{x_i\}, \quad \alpha = \{\alpha_i\}; \quad i = 1, 2$$

где  $\omega = 0$  — уравнение внешней границы,  $\alpha_i$  — некоторые функции, выбираемые специальным образом в зависимости от вида условий стыковки. При практическом использовании этой методики необходимо в каждом конкретном случае проверять принадлежность образа отображения  $Q$  области  $\Omega \cap \partial\Omega$ . Дополнительные трудности возникают также за счет деформации сетки сплайнов при отображении  $Q$ , усложняющей организацию вычисления квадратур.

Ниже предлагается другая методика учета условий стыковки, основанная на представлении структур решения различными аналитическими выражениями в различных подобластях.

Рассмотрим уравнение

$$(2) \quad \operatorname{div}(\epsilon_i \operatorname{grad} u) = 0$$

в конечной области  $\Omega$  (фиг. 2) с кусочно-однородными включениями при краевых условиях смешанного типа

$$(3) \quad u|_{\partial\Omega_1} = 0, \quad u|_{\partial\Omega_2} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_3} = 0$$

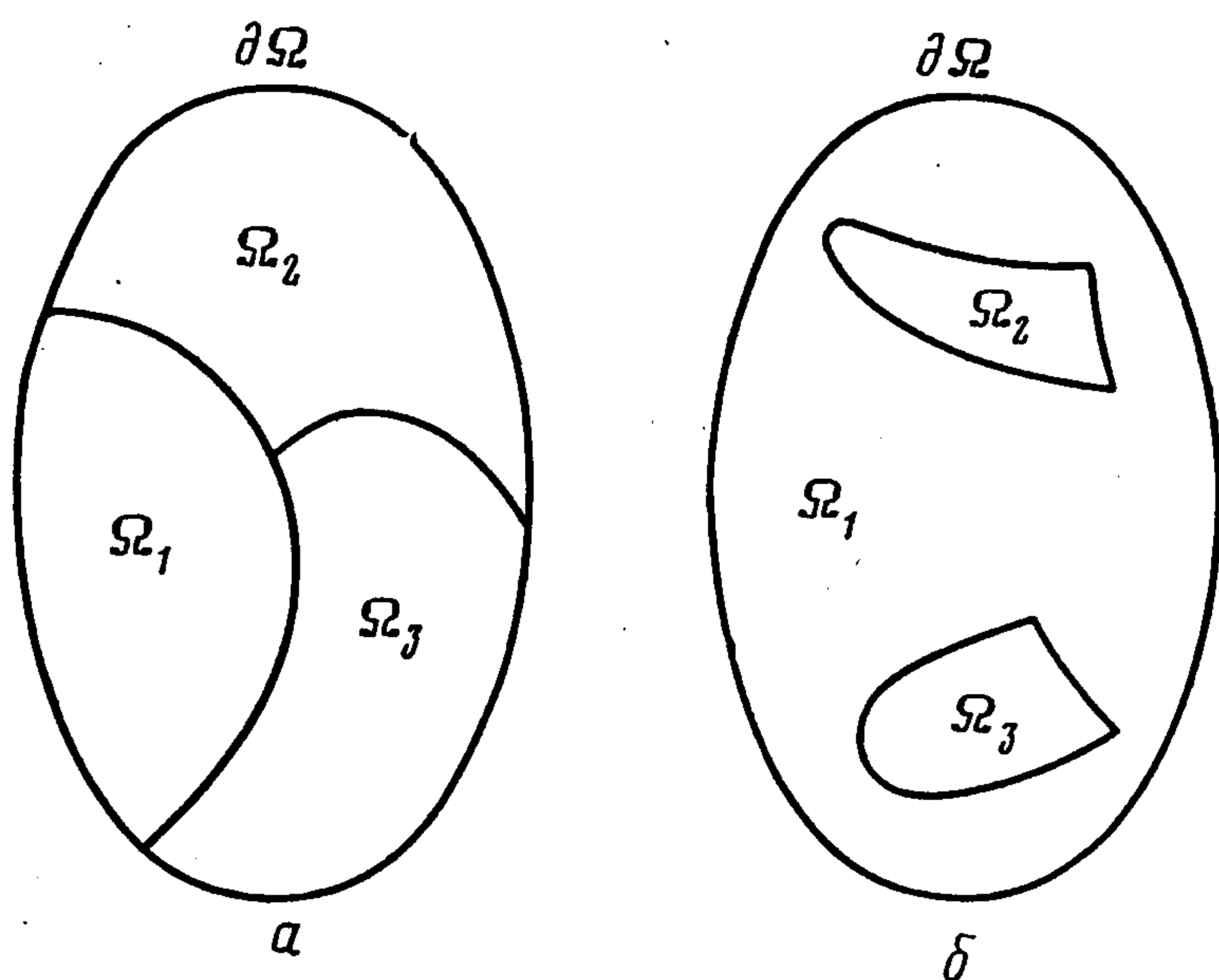
и условиях стыковки

$$(4) \quad u_i|_{\partial\Omega_{ij}^-} = u_j|_{\partial\Omega_{ij}^+}, \quad \varepsilon_i \frac{\partial u_i}{\partial n_i} \Big|_{\partial\Omega_{ij}^-} = \varepsilon_j \frac{\partial u_j}{\partial n_i} \Big|_{\partial\Omega_{ij}^+}$$

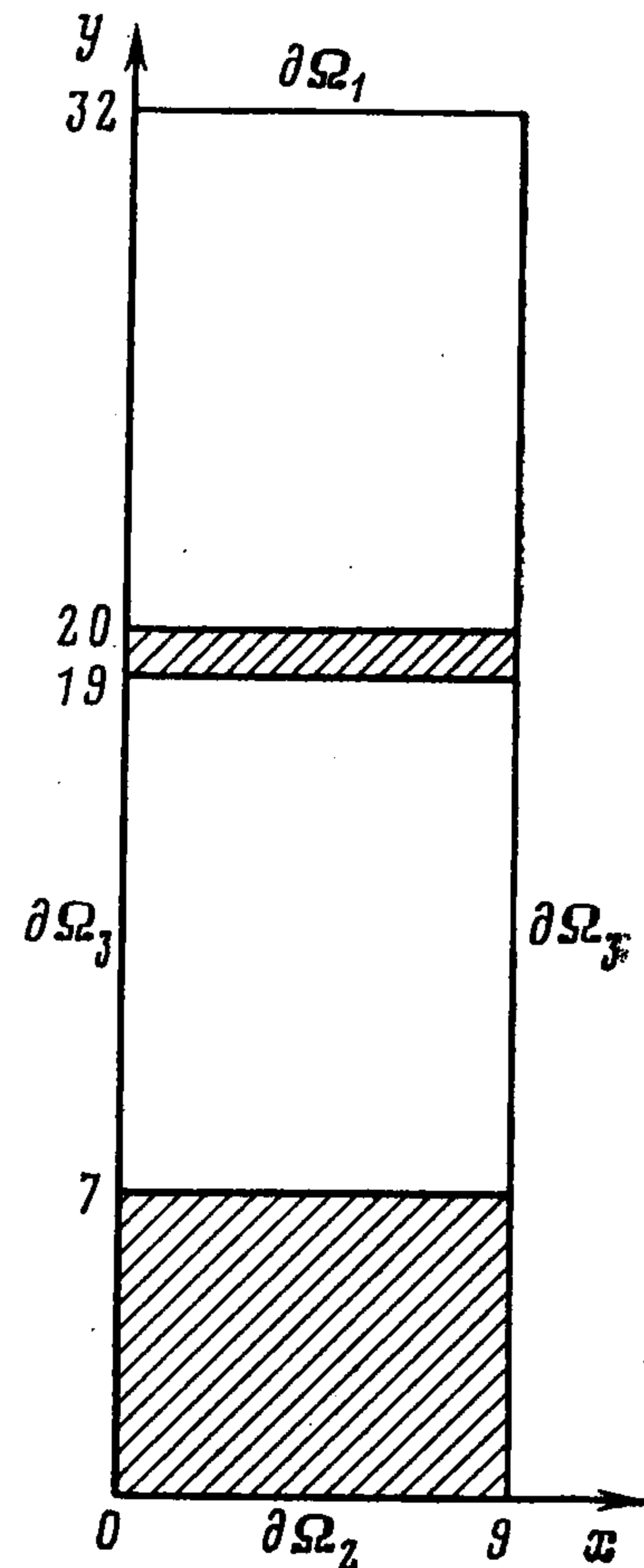
В данном случае структуру решения можно представить в виде

$$(5) \quad u_i = B(\Phi) + \delta_i \bar{\omega}_i D_1^{(i)} B(\Phi), \quad \bar{\omega}_i = \omega_0^2 \wedge \omega_i$$

где  $\omega_0 = 0$  — уравнение внешней границы,  $\omega_i = 0$  — нормализованные уравнения границы  $\partial\Omega_i$  подобластей  $\Omega$  (допускается исключение участков, принадлежащих  $\partial\Omega$ ),



Фиг. 1



Фиг. 2

$\delta_i$  — постоянные, которые находятся из условий (4),  $B(\Phi)$  — структура решения, учитывающая краевые условия на внешней границе  $\partial\Omega$  [5]. Из (5) следует, что первое из условий (4) удовлетворяется автоматически ввиду того, что  $\omega_i = 0$  на  $\partial\Omega_i$ . Чтобы удовлетворить второму условию (4), продолжим  $\partial u/\partial n_i$  внутрь соответствующих подобластей, используя операторы  $D_1^{(i)}$  [5]. Подставляя (5) в (4), в результате получим:

$$\varepsilon_i [D_1^{(i)} B(\Phi) + \delta_i D_1^{(i)} B(\Phi)] = \varepsilon_j [D_1^{(i)} B(\Phi) - \delta_j D_1^{(j)} B(\Phi)]$$

$$D_1^{(i)} B = -D_1^{(j)} B$$

Отсюда

$$(6) \quad \varepsilon_i (1 + \delta_i) = \varepsilon_j (1 + \delta_j), \quad \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j} = \frac{1 + \delta_j}{1 + \delta_i}, \quad \delta_i = M\varepsilon_i - 1$$

Поскольку при удовлетворении стыковочным условиям имеет значение лишь отношение величин  $\varepsilon_i/\varepsilon_j$ , можно наложить на величины  $\delta_k$  дополнительные ограничения, руководствуясь, например, данными численного эксперимента. В частности, потребуем выполнение условий

$$-1 \leq M\varepsilon_j - 1 \leq 1, \quad 0 \leq M \leq 2/\varepsilon_i$$

$$-1 \leq M\varepsilon_i - 1 \leq 1, \quad 0 \leq M \leq 2/\varepsilon_i$$

Таким образом, при выборе  $\delta_i, \delta_j$  следует руководствоваться ограничением

$$0 \leq M \leq \min \{2/\varepsilon_k\} \quad (k = 1, 2, \dots, K)$$

Структура (5) справедлива при произвольном расположении подобластей с различными физическими характеристиками, хотя в некоторых частных случаях можно провести ее упрощение. Например, для расположения подобластей, указанного на фиг. 1, а, б, можно положить

$$u_1 = B(\Phi), \quad u_2 = B(\Phi) + \delta_2 \bar{\omega}_2 D_1^{(2)} B(\Phi), \quad u_3 = B(\Phi) + \delta_3 \bar{\omega}_3 D_1^{(3)} B(\Phi)$$

Решение задачи (2) — (4) проводилось при  $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 100$  и  $\varepsilon_1 = 100, \varepsilon_2 = 1$ , т. е. при больших контрастах электропроводности.

Неопределенная компонента  $\Phi$ , входящая в структуру решения [5], представлялась в виде  $\Phi = c_1 \chi_1 + c_2 \chi_2 + \dots + c_n \chi_n$ , где  $\chi_k = \chi_k(x, y)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) — полная в  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  система координатных функций. Неизвестные коэффициенты  $c_k$  можно определить одним из вариационных или проекционных методов (в данной работе применен метод Ритца). Для реализации метода Ритца осуществлялся переход к краевой задаче с однородными граничными условиями и на линейале функций, им удовлетворяющих, строился функционал, эквивалентный данной краевой задаче. Доказав положительную определенность соответствующего оператора, можно применять метод Ритца, обеспечив при этом сходимость к точному решению по энергии. Переход к однородным краевым условиям осуществляется путем замены  $u = u' + u_0$ , где  $u_0$  удовлетворяет краевым условиям (3).

Таким образом, в области  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  ищем решение следующей эквивалентной (2) — (4) краевой задачи:

$$\begin{aligned} Lu' &= -Lu_0 \\ \frac{\partial u'}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_H} &= 0, \quad u' \Big|_{\partial\Omega_D} = 0, \quad u_1' \Big|_{\partial\Omega_{1,2}} = u_2' \Big|_{\partial\Omega_{1,2}}, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial u_1'}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_{1,2}} = \\ &= \varepsilon_2 \frac{\partial u_2'}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_{1,2}} \end{aligned}$$

Докажем положительную определенность оператора  $L$  на линейале  $U$ . Имеем

$$\begin{aligned} (Lu', u') &= -\varepsilon_1 \int_{\Omega_1} \Delta u_1' u_1' d\Omega_1 - \varepsilon_2 \int_{\Omega_2} \Delta u_2' u_2' d\Omega_2 = \\ &= \varepsilon_1 \int_{\Omega_1} (\nabla u_1')^2 d\Omega_1 + \varepsilon_2 \int_{\Omega_2} (\nabla u_2')^2 d\Omega_2 - \varepsilon_1 \int_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_{1,2}} u_1' \frac{\partial u_1'}{\partial n_1} d\partial\Omega_1 - \\ &- \varepsilon_2 \int_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_{1,2}} u_2' \frac{\partial u_2'}{\partial n_2} d\partial\Omega_2 \end{aligned}$$

$$\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2, \quad \partial\Omega_1 = \partial\Omega_{1D} \cup \partial\Omega_{1H}, \quad \partial\Omega_2 = \partial\Omega_{2D} \cup \partial\Omega_{2H}$$

Учитывая однородные граничные условия Дирихле на контуре  $\partial\Omega_{1D}$  и  $\partial\Omega_{2D}$ , условия Неймана на контуре  $\partial\Omega_{1H}$ ,  $\partial\Omega_{2H}$  и условия стыковки на  $\partial\Omega_{1,2}$ , получим

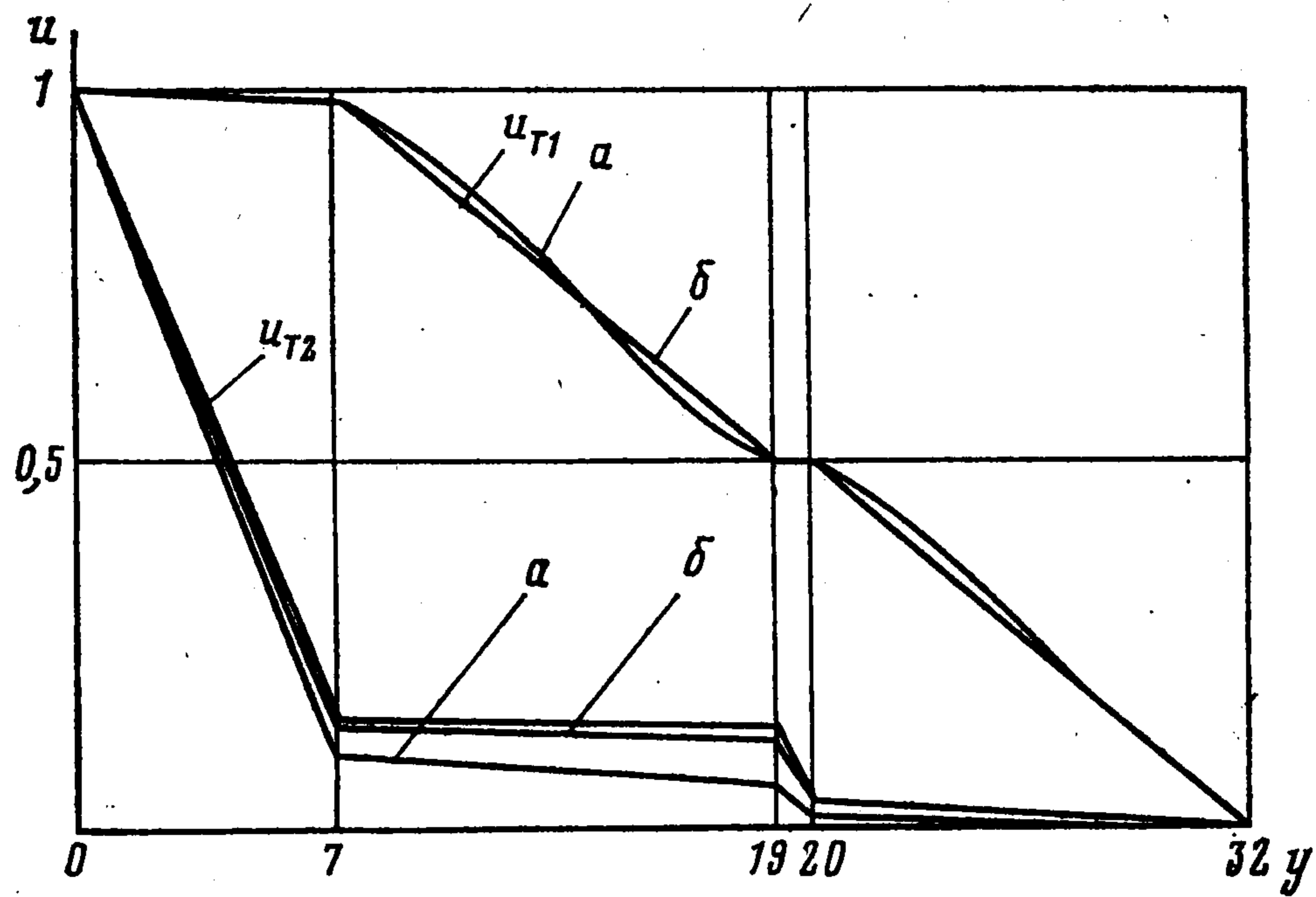
$$(Lu', u') = \varepsilon_1 \int_{\Omega_1} (\nabla u_1')^2 d\Omega_1 + \varepsilon_2 \int_{\Omega_2} (\nabla u_2')^2 d\Omega_2$$

при  $(\varepsilon_1 \vee \varepsilon_2) > 0$ , и в силу неравенства Фридрихса [4]  $(Lu', u') \geq \gamma^2 \|u'\|^2$ .

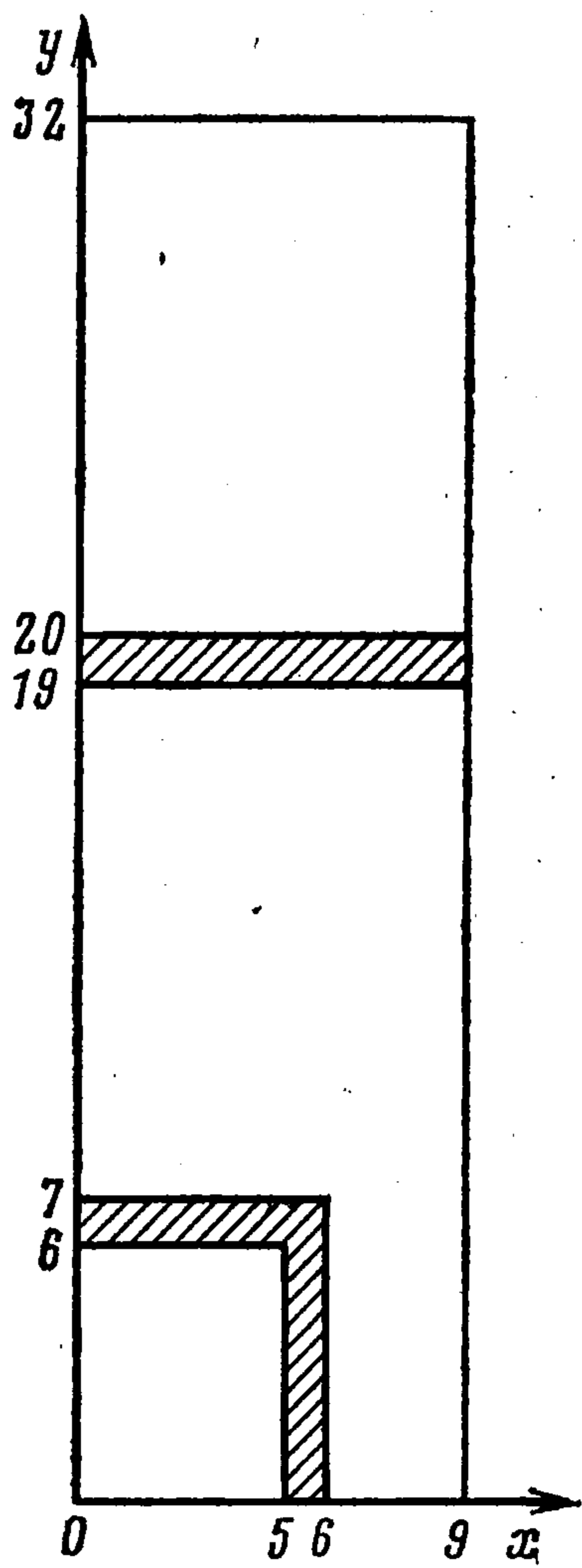
В качестве аппроксимирующих функций использовались кубические сплайны Шёнберга (порядок аппроксимирующего пространства  $n = 670$  — линия а, 1310 — линия б, фиг. 3). Максимальная нормированная погрешность по области не превышает 1% ( $u_{T1,2}$  — точные решения для  $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 100$ ;  $\varepsilon_1 = 100, \varepsilon_2 = 1$ ). При использовании полиномов Чебышева ( $n = 45$ ) и сплайнов ( $n = 49$ ) погрешность составляет 12%. Такая невысокая точность объясняется большим различием размеров характерных подобластей. Хорошие результаты можно получить при достаточно густой сетке сплайнов.

Задача (2) — (4) была решена также для области, изображенной на фиг. 4. Численная реализация проводилась с теми же аппроксимационными средствами, что и в предыдущей задаче. Результаты представлены картинами линий уровня фиг. 5 для  $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 100$  (а) и  $\varepsilon_1 = 100, \varepsilon_2 = 1$  (б).

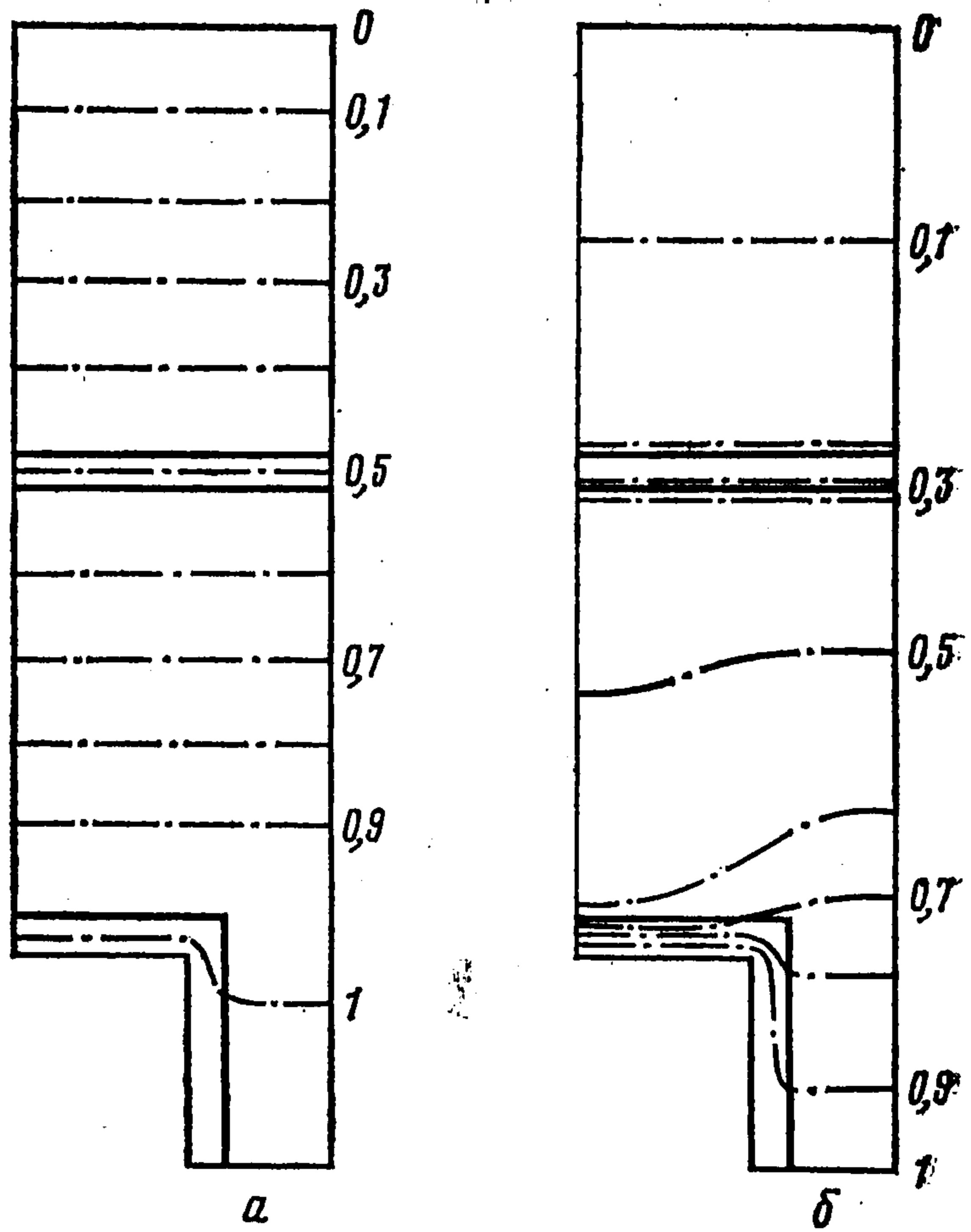
Все расчеты проводились в условиях эксплуатации разработанной в Институте проблем машиностроения АН УССР автоматизированной программирующей системы для ЭВМ БЭСМ-6. Переход от задачи, соответствующей фиг. 2, к задаче, соответствующей фиг. 4, потребовал изменения четырех перфокарт с информацией о геометрии границ области и раздела сред.



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Для задачи, рассмотренной в [4], условия стыковки имеют вид

$$(7) \quad \begin{aligned} u_i |_{\partial\Omega_{ij}^-} &= u_j |_{\partial\Omega_{ij}^+} \\ -\sigma_i \frac{\partial u_i}{\partial n_i} + \gamma_i \frac{\partial u_i}{\partial \tau_i} \Big|_{\partial\Omega_{ij}^-} &= -\sigma_j \frac{\partial u_j}{\partial n_j} + \gamma_j \frac{\partial u_j}{\partial \tau_j} \Big|_{\partial\Omega_{ij}^+} \end{aligned}$$

Запишем новый вариант структуры

$$(8) \quad u_i = B(\Phi) + \bar{\omega}_i [\delta_i D_1^{(i)} B(\Phi) + \kappa_i T_1^{(i)} B(\Phi)]$$

Здесь сохранены обозначения, принятые в формуле (5). Величины  $\kappa_i$  наряду с  $\delta_i$  находятся из условия (7) следующим образом:

$$\begin{aligned} -\sigma_i [D_1^{(i)} B(\Phi) + \delta_i D_1^{(i)} \bar{B}(\Phi) + \kappa_i T_1^{(i)} B(\Phi)] + \gamma_i T_1^{(i)} B(\Phi) &= \\ = -\sigma_j [D_1^{(j)} B(\Phi) + \delta_j D_1^{(j)} \bar{B}(\Phi) + \kappa_j T_1^{(j)} B(\Phi)] + \gamma_j T_1^{(j)} B(\Phi) &= \\ (D_1^{(i)} B = -D_1^{(j)} B, T_1^{(i)} B = -T_1^{(j)} B). & \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{\sigma_i}{\sigma_j} = \frac{1 + \delta_j}{1 + \delta_i} \quad \left( 0 \leq M \leq \min \left\{ \frac{2}{\sigma_l} \right\}, \quad l = 1, 2, \dots, L \right)$$

$$-\sigma_i \kappa_i + \gamma_i = -\sigma_j \kappa_j + \gamma_j, \quad \kappa_i = \frac{-N + \gamma_i}{\sigma_i}, \quad \kappa_j = \frac{-N + \gamma_j}{\sigma_j}$$

$$(-1 \leq \kappa_l \leq 1, \quad \min(\gamma_l - \sigma_l) \leq N \leq \min(\gamma_l + \sigma_l), \quad l = 1, 2, \dots, L)$$

Формула (8) позволяет применять данную методику к решению класса задач, описанных в [4].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Манько Г. П., Рвачев В. Л. Конструирование решений краевых задач с разрывными граничными условиями и условиями сопряжения для областей сложной формы. — В кн.: Теоретическая электротехника. Вып. 13. Львов: Изд-во Львов. ун-та, 1972, с. 124—128.
2. Рвачев В. Л., Слесаренко А. П. Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах. Киев: Наук. думка, 1976. 287 с.
3. Рвачев В. Л., Слесаренко А. П., Литвин Н. Н. Расчет температурного поля кусочно-однородных тел сложной формы. — В кн.: Теплофизика и теплотехника. Вып. 32. Киев: Наук. думка, 1977, с. 18—22.
4. Шейко Т. И. Метод  $R$ -функций в задаче о проводимости неоднородной среды в магнитном поле. — Ж. техн. физики, 1979, т. 49, вып. 12, с. 2527—2534.
5. Рвачев В. Л. Теория  $R$ -функций и некоторые ее приложения. Киев: Наук. думка. 1982 551 с.

Харьков

Поступила в редакцию  
17.XII.1982.

УДК 539.375

### НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛОСКОСТИ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПАР ТРЕЩИН ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА

Новиков В. Г., Тулинов Б. М.

Методом тройных интегральных уравнений получено замкнутое решение задачи о периодической системе параллельных пар коллинеарных трещин продольного сдвига. Случай одной трещины конечной длины в полосе периодов при различных напряженных состояниях рассматривался в работах [1—5], а двух полубесконечных трещин — в [6, 7]. Задача о двух коллинеарных трещинах в бесконечной среде исследовалась в [8—11].

Пусть неограниченная упругая плоскость  $xOy$  ослаблена периодической системой разрезов  $a \leq |x| \leq b$ ,  $y = (2n + 1)d$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ . Вне разрезов должны выполняться соотношения [12]

$$(1) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \sigma_{xz} = \mu \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \sigma_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y}$$

где  $\mu$  — модуль сдвига,  $w$  — смещение вдоль оси  $z$ ,  $\sigma_{xz}$  и  $\sigma_{yz}$  — компоненты тензора напряжений. Предположим, что смещение и напряжения — периодические функции координаты  $y$  с периодом  $2d$ . Тогда задача сводится к построению решения уравнений (1) в полосе  $-d < y < d$ , удовлетворяющего граничным условиям

$$(2) \quad w(x, \pm d) = 0, \quad |x| \leq a, \quad |x| \geq b$$

$$(3) \quad \sigma_{yz}(x, \pm d) = -T(x), \quad a < |x| < b$$

Предположим, что нагрузка  $T(x)$  — симметричная функция координаты  $x$ . Тогда можно ограничиться рассмотрением области  $x \geq 0$ , а решение уравнений (1) представить в виде

$$(4) \quad w = \int_0^{\infty} \frac{1}{q} f(q) \operatorname{sh} qy \cos qx \, dq$$