УДК 539.383

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ АБРАЗИВНОГО ИЗНОСА

Коваленко Е. В.

Предлагается алгоритм, основанный на методе сращиваемых асимптотических разложений и дающий возможность избежать математическую некорректность при решении интегральных уравнений контактных задач с учетом абразивного изнашивания поверхностей соприкасающихся тел. Записывается точное решение интегрального уравнения второго рода типа свертки с логарифмическим ядром на полубесконечном интервале в классе непрерывных, исчезающих на бесконечности функций.

При решении интегральных уравнений контактных задач теории упругости при наличии абразивного износа ([1—4] и др.) допускалась математическая неточность. Величина, характеризующая закон распределения контактных давлений и имеющая при $t = 0$ на концах области контакта особенности типа квадратного корня [5], разлагалась в ряд Фурье по собственным функциям некоторого самосопряженного, вполне непрерывного интегрального оператора, действующего в пространстве квадратично суммируемых функций. Однако, как следует из общей теории рядов Фурье в гильбертовых пространствах [6], такой ряд будет заведомо расходящимся по норме пространства $L_2(-1, 1)$.

Предлагаемый ниже подход дает возможность избежать эту математическую некорректность и в совокупности с методом работ [7, 8] позволяет строить решения указанных контактных задач во всем диапазоне изменения времени. Замкнутое решение интегрального уравнения второго рода типа свертки с логарифмическим ядром на полубесконечном интервале может быть также использовано для исследования контактных задач для шероховатых упругих тел (или для изучения контактных задач при наличии тонких упругих покрытий) [9], когда коэффициент при главном члене интегрального уравнения стремится к нулю.

1. Исходные уравнения контактной задачи теории упругости для линейно-деформируемого основания общего типа при наличии абразивного износа могут быть записаны в виде [4]

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(\xi,t)\,k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi = \gamma(t) - f(x) - \int_{0}^{t}\varphi(x,\tau)\,V(\tau)\,d\tau \tag{1.1}$$

$$(|x| \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T < \infty)$$

$$P(t) = \int_{-1}^{1}\varphi(x,t)\,dx \tag{1.2}$$

Кусочно-гладкая функция $V(t) \geqslant 0$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$, а ядро интегрального уравнения (1.1) $k(z)$ представимо в форме

$$k(z) = \int_{0}^{\infty} L(u)\cos(uz)\,du, \quad z = \frac{\xi - x}{\lambda} \tag{1.3}$$

$$L(u) > 0, \quad (|u| < \infty), \quad L(u) = A + O(u^2) \quad (u \to 0,\ A = \mathrm{const})$$

$$L(u) = u^{-1} + O(u^{-2}) \quad (u \to \infty)$$

Приведенный ниже анализ относится к случаю четной функции $f(x)$. Общий случай рассматривается аналогично.

На основании (1.3) доказывается [5]

Лемма. При всех значениях $0 \leqslant |z| < \infty$ для $k(z)$ имеет место представление

$$k(z) = -\ln|z| - F(z), \quad F(z) \to B\ (z \to 0,\ B = \mathrm{const})$$

причем $F(z)$ как четная функция комплексного переменного $w = z + i\zeta$ регулярна в полосе $|z| < \infty$, $|\zeta| < \varkappa$ $(0 < \varkappa = \mathrm{const})$.

Перейдем к построению решения уравнения (1.1). Введем малый параметр ε ($\varepsilon \ll 1$) и перепишем (1.1) в форме

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(\xi,\varepsilon)\,k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi=\gamma(\varepsilon)-f(x)-\int_{0}^{\varepsilon}\varphi(x,\tau)V(\tau)\,d\tau\quad(|x|\leqslant 1)\tag{1.4}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}[\varphi(\xi,t)-\varphi(\xi,\varepsilon)]\,k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi=\gamma(t)-\gamma(\varepsilon)-\int_{\varepsilon}^{t}\varphi(x,\tau)V(\tau)\,d\tau\tag{1.5}$$

$$(|x|\leqslant 1,\ \varepsilon\leqslant t\leqslant T<\infty)$$

Решение интегрального уравнения (1.5) найдено в работах [7, 8], поэтому здесь останавливаться на его построении не будем.

Исследуем уравнение (1.4) методом сращиваемых асимптотических разложений [10]. Допустим, что

$$V(t)=V(\varepsilon)+O(\varepsilon),\quad \varphi(x,t)=\varphi(x,\varepsilon)+O(\varepsilon)\quad(t\in[0,\varepsilon],\ \varepsilon\ll 1)\tag{1.6}$$

В дальнейшем, не нарушая общности, положим $V(\varepsilon)=1$. Тогда, подставляя (1.6) в (1.4) и пренебрегая малыми порядка ε^2, получим

$$\varepsilon\varphi(x,\varepsilon)+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(\xi,\varepsilon)\,k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi=\gamma(\varepsilon)-f(x)\quad(|x|\leqslant 1)\tag{1.7}$$

Ограничимся построением главного (нулевого) члена асимптотики решения уравнения (1.7). Для этого вместо (1.7) рассмотрим эквивалентное ему интегральное уравнение

$$\varepsilon[\varphi(x,\varepsilon)-\varphi(1,\varepsilon)]+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(\xi,\varepsilon)\left[k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)-k\left(\frac{\xi-1}{\lambda}\right)\right]d\xi=\tag{1.8}$$

$$=f(1)-f(x)\quad(|x|\leqslant 1)$$

Полагая в (1.8) $\varepsilon=0$, выпишем вырожденное при $\varepsilon\to 0$ интегральное уравнение поставленной задачи

$$\int_{-1}^{1}\varphi_0(\xi)\left[k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)-k\left(\frac{\xi-1}{\lambda}\right)\right]d\xi=\pi[f(1)-f(x)]\quad(|x|\leqslant 1)\tag{1.9}$$

или, что то же самое

$$\int_{-1}^{1}\varphi_0(\xi)\,k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi=\pi[\gamma(0)-f(x)]\quad(|x|\leqslant 1)\tag{1.10}$$

Как известно [5], если $f(x)\in B_1^{\alpha}(-1,1)$ ($B_1^{\alpha}(-1,1)$ — пространство функций, n-е производные которых при $x\in[-1,1]$ удовлетворяют условию Гельдера с показателем α, $0<\alpha\leqslant 1$), то функция $\varphi_0'(x)$ имеет вид

$$\varphi_0(x)=\frac{\omega(x)}{\sqrt{1-x^2}},\quad \omega(x)\in C(-1,1)\tag{1.11}$$

Под внешней областью будем понимать интервал $|x|\leqslant 1-m\varepsilon$, на котором в качестве решения уравнения (1.8) с достаточно малой ошибкой может быть принято вырожденное решение (1.11). Внутренними областями назовем малые окрестности точек $x=\pm 1$ с размерами $m\varepsilon$ ($m\geqslant 1$); в этих областях влияние износа на распределение контактных напряжений под штампом соизмеримо с влиянием деформируемости упругого основания. Во внутренних областях должны быть построены решения типа погранслоя, сращиваемые на границах областей $x=1-m\varepsilon$, $x=-1+m\varepsilon$ с вырожденным решением $\varphi_0(x)$.

Найдем разность между (1.8) и (1.9)

$$\varepsilon\varphi(x,\varepsilon)+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}[\varphi(\xi,\varepsilon)-\varphi_0(\xi)]\left[k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)-\right.\tag{1.12}$$

$$\left.-k\left(\frac{\xi-1}{\lambda}\right)\right]d\xi=\varepsilon\varphi(1,\varepsilon)\quad(|x|\leqslant 1)$$

Принимая во внимание, что при $m\varepsilon \ll 1$, имеем $\varphi_0 (1 - m\varepsilon) = \omega (1) (2m\varepsilon)^{-1/2}$ и функция $\varphi (x, \varepsilon)$ на границе $x = 1 - m\varepsilon$ внешней и внутренней областей сращивается с $\varphi_0 (x)$, будем искать решение типа погранслоя в окрестности точки $x = 1$ в виде

$$\varphi (x, \varepsilon) = \psi (s) \varepsilon^{-1/2} + o (\varepsilon^{-1/2}), \quad s = (1 - x) \varepsilon^{-1} \tag{1.13}$$

Тогда условия сращивания примут вид

$$\varphi (1 - m\varepsilon, \varepsilon) = \varepsilon^{-1/2} q (m) \psi (0) \sim \varphi_0 (1 - m\varepsilon) = \omega (1) (2m\varepsilon)^{-1/2}$$

Отсюда следует, что

$$q (0) \sim 1, \quad q (m) \sim m^{-1/2} (m \geqslant 1), \quad \psi (0) = \omega (1)/\sqrt{2} \tag{1.14}$$

Подставляя (1.13) в (1.12), переходя к новым переменным s, $\tau = (1 - \xi) \varepsilon^{-1}$ и устремляя ε к нулю при фиксированном s и $\varepsilon \ll \lambda$, получим (в силу четности рассматриваемой задачи по x, и в окрестности точки $x = -1$) следующее интегральное уравнение для определения функции $\psi (s)$ типа погранслоя:

$$q (s) - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty q (\tau) \ln \left| \frac{\tau - s}{\tau} \right| d\tau = 1, \quad q (s) = \frac{\psi (s)}{\psi (0)} \quad (0 \leqslant s < \infty) \tag{1.15}$$

Здесь использовано представление для $k (z)$, указанное в лемме, и значение интеграла [11]

$$\int_0^\infty \ln \left| 1 - \frac{s}{\tau} \right| \tau^{-p} d\tau = \pi s^{1-p} \frac{\operatorname{ctg} \pi p}{p - 1} \quad (0 < \operatorname{Re} p < 1)$$

при $p = 1/2$.

После решения уравнений (1.10), (1.15) в силу (1.14) главный член равномерно пригодного асимптотического решения интегрального уравнения (1.7) или (1.8) при малых значениях параметра ε можно представить в виде

$$\begin{gathered} \varphi_u (x, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \left[\omega (x) - \frac{\omega (1)}{2} (\sqrt{1 + x} + \right. \\ \left. + \sqrt{1 - x}) \right] + \frac{\omega (1)}{\sqrt{2\varepsilon}} \left[q \left(\frac{1 + x}{\varepsilon} \right) + q \left(\frac{1 - x}{\varepsilon} \right) \right] \end{gathered} \tag{1.16}$$

При этом постоянную $\omega (1)$ можно связать с $\gamma (0)$ или с $P (0)$ при помощи формул (1.10), (1.11) либо (1.2) при $t = 0$.

2. Остановимся на вопросе о построении решения интегрального уравнения (1.15). Продифференцируем обе части последнего по s. Получим

$$q' (s) + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty q (\tau) \frac{d\tau}{\tau - s} = 0 \quad (0 \leqslant s < \infty) \tag{2.1}$$

Решение однородного уравнения (2.1) будем искать в форме интеграла Меллина [11] (контур L — прямая $\operatorname{Re} p = \mu$)

$$q (s) = \frac{1}{2\pi i} \int_L Q (p) s^{-p} dp \tag{2.2}$$

Подставим выражение (2.2) в соотношение (2.1) и примем во внимание значение интеграла

$$\int_0^\infty \frac{\tau^{-p}}{\tau - s} d\tau = \pi s^{-p} \operatorname{ctg} \pi p \quad (0 < \operatorname{Re} p < 1)$$

Тогда перепишем уравнение (2.1) в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L p Q (p) s^{-p-1} dp - \frac{1}{2\pi i} \int_L Q (p) \operatorname{ctg} \pi p \, s^{-p} dp = 0 \tag{2.3}$$

Обозначим $pQ (p) = u (p)$, аргумент p в первом интеграле (2.3) заменим на $p - 1$, контур L сдвинем по вещественной оси на единицу и обозначим через L_1. Будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} u (p - 1) s^{-p} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_L u (p) \frac{\operatorname{ctg} \pi p}{p} s^{-p} dp \tag{2.4}$$

Предположим, что функция $u(p)$ в полосе $\mu - 1 \leqslant \operatorname{Re} p \leqslant \mu$ регулярна и стремится к нулю при $|\operatorname{Im} p| \to \infty$. Тогда по теореме Коши, не изменяя подынтегральной функции в первом интеграле (2.4), можно написать L вместо L_1 и удовлетворить соотношению (2.4), решив разностное уравнение первого порядка

$$u(p-1) - p^{-1}\operatorname{ctg}\pi p u(p) = 0 \quad (p \in L) \tag{2.5}$$

Выберем число μ таким образом, чтобы в полосе $0 < \operatorname{Re} p < \mu$ коэффициент уравнения (2.5) (т. е. функция $p^{-1}\operatorname{ctg}\pi p$) не имел нулей ($0 < \mu < 1/2$). В этом случае каноническое решение однородного уравнения (2.5) можно получить методом Барнса [12].

Единственность решений разностных уравнений типа (2.5) установлена [1] так же, как единственность краевой задачи Римана [13]. Учитывая условия, налагаемые выше на функцию $u(p)$, запишем его в виде [14]

$$u(p) = C\Gamma^2(1+p)R(p) \quad (C = \text{const}) \tag{2.6}$$

$$R(p) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{2p+1} \frac{\Gamma(-n-p+1/2)\,\Gamma(-n+p+1)}{\Gamma(-n-p)\,\Gamma(-n+p+3/2)}, \quad u(0) = C$$

откуда найдем функцию $Q(p)$ в силу приведенной ранее связи между $Q(p)$ и $u(p)$.

Установим асимптотику искомой функции $q(s)$ (2.2) при $s \to 0$ и $s \to \infty$. Заметим, что при $s < 1$ интеграл (2.2) разлагается в абсолютно сходящийся ряд по вычетам в полюсах функции $Q(p)$, аналитически продолженной в левую полуплоскость $\operatorname{Re} p \leqslant \mu$. Значение функции $q(s)$ при $s \to 0$ определяется первым членом этого ряда и имеет вид $q(0) = C$.

При $s > 1$ интеграл (2.2) не разлагается в ряд по вычетам. В этом случае асимптотика функции $q(s)$ при больших значениях s устанавливается с помощью алгоритма, изложенного в работе [15]. Именно, ограничиваясь первым членом асимптотики, из (2.2), (2.6) получим

$$q(s) = C\delta s^{-1/2} + O(s^{-1}) \tag{2.7}$$

$$\delta = -C^{-1}\lim \operatorname{tg}\pi p\,(p + 1/2)\,u(p) = 1 \quad (p \to -1/2)$$

Очевидно, что решение (2.2), (2.6) удовлетворяет исходному уравнению (1.15) с точностью до постоянной. Однако, воспользовавшись произволом выбора C, можно добиться, что это решение будет одновременно и решением интегрального уравнения (1.15).

Теорема. Если в уравнении (1.15) $q(s) \sim s^{-1/2}$ $(s \to \infty)$ и $|q(s)| < M$ $(M = \text{const})$ при всех значениях $s \in [0, \infty)$, то $q(0) = 1$.

Для доказательства оценим интеграл

$$J = -\int_0^\infty q(\tau)\ln\left|1 - \frac{s}{\tau}\right|d\tau = -\int_0^{M_1} q(\tau)\ln\left|1 - \frac{s}{\tau}\right|d\tau - \tag{2.8}$$

$$-\int_{M_1}^\infty q(\tau)\ln\left|1 - \frac{s}{\tau}\right|d\tau = J_1 + J_2$$

при малых значениях переменной s. Предположим, что постоянная M_1 в (2.8) такова, что в J_2 $q(\tau) \sim \tau^{-1/2}$. Тогда, если $s \to 0$, то

$$J_2 \sim -s\int_{M_1}^\infty \frac{d\tau}{\tau^{3/2}} = -\frac{2s}{\sqrt{M_1}}$$

Представляя далее J_1 в форме

$$J_1 = -\int_0^s q(\tau)\ln\left(\frac{s}{\tau} - 1\right)d\tau - \int_s^{M_1} q(\tau)\ln\left(1 - \frac{s}{\tau}\right)d\tau = J_3 + J_4$$

и используя оценки

$$|J_3| \leqslant 2Ms\ln 2, \quad |J_4| \leqslant Ms\,[1 + \ln(M_1/s)]$$

установим, что $J \to 0$ при $s \to 0$, а следовательно, $q(0) = 1$.

[1] *Банцури Р. Д.* Контактные задачи плоской теории упругости и связанные с ними граничные задачи теории функций. Автореф. дис. на соискание уч. ст. докт. физ.-матем. наук.— М.: Ин-т проблем механики АН СССР, 1981. 23 с.

Из доказанной теоремы следует, что постоянная $C = 1$ и, таким образом, функция (2.2), (2.6) удовлетворяет интегральному уравнению (1.15). Заметим, что при таком выборе произвольной постоянной автоматически выполняются условия сращивания(1.14). Следовательно, формулы (2.2), (2.6) доставляют решение интегральному уравнению (1.15). Это решение будет являться общим в классе функций, обладающих свойствами, указанными в теореме, если соответствующее (1.15) однородное интегральное уравнение будет иметь только тривиальное решение. Последний факт можно проверить, учитывая взаимную связь интегрального уравнения (1.15) и задач, рассмотренных в статье [14].

3. Отметим еще, что на практике представляют интерес два основных варианта задачи (1.1), (1.2): 1) задается функция $\gamma(t)$, находятся $\varphi(x, t)$, $P(t)$; 2) задается $P(t)$, находятся функции $\varphi(x, t)$ и $\gamma(t)$.

Рассмотрим первый случай. Допустим, что осадка точек основания $\gamma(t)$ такова, что в окрестности точки $t = 0$ может быть разложена в ряд Тейлора. Ограничиваясь первыми двумя членами этого ряда, будем иметь

$$\gamma(t) = \gamma(0) + \gamma'(0)\, t \quad (t \in [0, \varepsilon]) \tag{3.1}$$

Подставляя теперь функции $\varphi_u(x, t)$ (1.16) и $\gamma(t)$ (3.1) в интегральное уравнение (1.7), перепишем последнее в форме

$$\varepsilon\varphi_u(x, \varepsilon) + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \varphi_u(\xi, \varepsilon)\, k\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi = \gamma(0) + \gamma'(0)\varepsilon - f(x) \quad (|x| \leqslant 1) \tag{3.2}$$

Как отмечалось выше, постоянная $\omega(1)$ в выражении (1.16) может быть связана с $\gamma(0)$ посредством формул (1.10), (1.11). Следовательно (см. формулу (1.2) при $t = 0$), значение функции $P(t)$ при $t = 0$ зависит только от $\gamma(0)$. Подставим (1.16) в соотношение (3.2), проинтегрируем его по x в пределах от -1 до $+1$ и воспользуемся формулами (1.2), (1.11), (1.16). Получим

$$\varepsilon P(\varepsilon) + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \varphi_u^1(\xi, \varepsilon)\, D(\xi)\, d\xi = \gamma'(0)\varepsilon, \quad D(\xi) = \int_{-1}^{1} k\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) dx \tag{3.3}$$

$$\varphi_u^1(x, \varepsilon) = -\frac{\omega(1)}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} + \frac{1}{\sqrt{1+x}}\right) + \frac{\omega(1)}{\sqrt{2\varepsilon}}\left[q\left(\frac{1+x}{\varepsilon}\right) + q\left(\frac{1-x}{\varepsilon}\right)\right]$$

Таким образом установим связь между $P(\varepsilon)$ и $\gamma'(0)$.

Если теперь допустить, что задана сила $P(t)$, действующая на штамп, то при помощи равенств (1.2) при $t = 0$ и (1.11) найдем значение постоянной $\omega(1)$, связав его со значением $P(0)$. Подставляя затем выражение (1.11) в уравнение (1.10), определим постоянную $\gamma(0)$, связав ее, как и выше, с $P(0)$. Воспользовавшись теперь соотношением (3.3), найдем $\gamma'(0)$, по-прежнему, связав его со значением $P(t)$ при $t = \varepsilon$. Принимая, наконец, в расчет формулу (3.1), получим выражение для определения жесткого перемещения штампа $\gamma(t)$. Кроме того, если воспользоваться далее уравнением (1.5) и алгоритмом работ [7, 8], можно получить решение поставленной задачи во всем диапазоне изменения времени, т. е. при $0 \leqslant t \leqslant T < \infty$.

Методика данной работы применима также к исследованию контактных задач для шероховатых упругих тел (или контактных задач при наличии тонких покрытий [9], когда коэффициент при главном члене в соответствующем интегральном уравнении стремится к нулю).

Автор благодарит В. М. Александрова, Б. М. Нуллера и М. Б. Рывкина за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости при наличии износа.— ПММ, 1976, т. 40, вып. 6, с. 981—986.
2. *Александров В. М., Галин Л. А., Пириев Н. П.* Плоская контактная задача при наличии износа для упругого слоя большой толщины.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 4, с. 60—67.
3. *Галин Л. А., Горячева И. Г.* Осесимметричная контактная задача теории упругости при наличии износа.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 5, с. 807—812.
4. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Плоские контактные задачи теории упругости для неклассических областей при наличии износа.— ПМТФ, 1980, № 3, с. 163—172.

5. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
6. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1976. 327 с.
7. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Об одном классе интегральных уравнений смешанных задач механики сплошных сред.— Докл. АН СССР, 1980, т. 252, № 2, с. 324—327.
8. *Коваленко Е. В.* О приближенном решении одного типа интегральных уравнений теории упругости и математической физики.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1981, т. 34, № 5, с. 14—26.
9. *Коваленко Е. В.* Об эффективном методе решения контактных задач для линейно-деформируемого основания с тонким усиливающим покрытием.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1979, т. 32, № 2, с. 76—82.
10. *Найфэ А. Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
11. *Маричев О. И.* Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул). Минск: Наука и техника, 1978. 310 с.
12. *Миролюбов А. А., Солдатов М. А.* Линейные однородные разностные уравнения. М.: Наука, 1981. 206 с.
13. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
14. *Нуллер Б. М., Спесивцева Л. Ф.* Об одном классе задач для упругих областей, ослабленных неоднородным включением.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 2, с. 46—52.
15. *Попов Г. Я., Тихоненко Л. Я.* Точное решение плоских задач о контакте полубесконечных балок с упругим клином.— ПММ, 1975, т. 39, вып. 6, с. 1100—1109.

Москва

Поступила в редакцию 2.III.1983

УДК 539.374

МЕТОД R-ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧАХ РАСЧЕТА ПОЛЕЙ ДЛЯ ТЕЛ, ФИЗИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОТОРЫХ ИМЕЮТ РАЗРЫВЫ ПЕРВОГО РОДА

Рвачев В. Л., Шейко Т. И.

Предлагается новая методика учета условий стыковки, возникающих в телах, состоящих из частей с различными физическими характеристиками. Методика основана на представлении структур решения различными аналитическими выражениями в различных подобластях. Рассматриваются два типа условий стыковки, возникающих в задачах расчета электрических полей для локально изотропных и анизотропных проводимостей. Решение реализуется на основе метода Ритца. Приводятся численные результаты.

В задачах теплопроводности, электростатики, теории упругости для тел, состоящих из частей с различными физическими характеристиками кроме обычных краевых условий на границе рассматриваемого тела появляются условия стыковки внутри области Ω (фиг. 1). Вид этих условий определяется физической постановкой задачи. Рассматривались [1—5] разные типы условий стыковки, однако во всех случаях после построения структуры решения $u = B(\Phi)$, учитывающей все краевые условия на внешней границе $\partial\Omega$, в ней производилось сохраняющее границу $\partial\Omega$ отображение

$$Q = \{x^1 = x + \omega^2(x)\alpha(x)\} \tag{1}$$

$$x^1 = \{x_i^1\},\ x = \{x_i\},\ \alpha = \{\alpha_i\};\ i = 1,\ 2$$

где $\omega = 0$ — уравнение внешней границы, α_i — некоторые функции, выбираемые специальным образом в зависимости от вида условий стыковки. При практическом использовании этой методики необходимо в каждом конкретном случае проверять принадлежность образа отображения Q области $\Omega \cap \partial\Omega$. Дополнительные трудности возникают также за счет деформации сетки сплайнов при отображении Q, усложняющей организацию вычисления квадратур.

Ниже предлагается другая методика учета условий стыковки, основанная на представлении структур решения различными аналитическими выражениями в различных подобластях.

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{div}(\varepsilon_i \operatorname{grad} u) = 0 \tag{2}$$