УДК 531.38

СТАЦИОНАРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА С УПРУГОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНОЙ И ИХ УСТОЙЧИВОСТЬ

Набиуллин М. К.

На основе методов В. В. Румянцева [1—3] в форме П. А. Кузьмина [4] выделены стационарные движения гиростата с круглой кольцевой пластиной, защемленной внутренним контуром в корпусе, и получены достаточные условия их устойчивости. Работа примыкает к циклу работ, посвященных исследованию устойчивости систем с распределенными параметрами: упругими стержнями, гибкими прямоугольными пластинами, гибкой нитью [5—19].

1. Введем системы координат: $Cx_1x_2x_3$ — орбитальная система с началом в центре масс механической системы при деформированном состоянии пластинки, ось Cx_2 направлена по радиусу орбиты, ось Cx_3 перпендикулярна к плоскости орбиты, ось Cx_1 ортогональна осям Cx_2, Cx_3; $Oxyz$ — система координат, жестко связанная с корпусом гиростата, оси которой направлены по главным центральным осям, построенным для центра масс O системы при недеформированном состоянии пластинки; $Cy_1y_2y_3$ — система координат, оси y_s $(s = 1, 2, 3)$ которой параллельны осям x, y, z соответственно.

Положение гиростата в орбитальной системе координат будем определять углами Эйлера ψ, θ, φ, а направление осей x_s $(s = 1, 2, 3)$ относительно осей системы $Cy_1y_2y_3$ — направляющими косинусами α_{s1}, α_{s2}, α_{s3}, известным образом зависящими от углов ψ, θ, φ, например $\alpha_{31} = \sin\varphi \sin\theta$ [20].

Положение точек пластины в деформированном состоянии по отношению к корпусу гиростата определим радиус-вектором, проекции которого на оси

$$
\begin{aligned}
&r_x = (a + r)\cos\lambda - zu_1, \quad r_y = (a + r)\sin\lambda - zu_2 \\
&r_z = z + w \quad (u_1 = w_r \cos\lambda - (a + r)^{-1} w_\lambda \sin\lambda, \quad u_2 = w_r \sin\lambda + \\
&+ (a + r)^{-1} w_\lambda \cos\lambda)
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

Здесь a — радиус внутреннего кругового контура срединной плоскости, расположенной в плоскости Oxy; $a + r$, λ, z — цилиндрические координаты произвольной точки пластины в недеформированном состоянии; $w\,(r, \lambda, t)$ — проекция вектора упругого перемещения произвольной точки срединной плоскости на ось z; буквенные индексы у величины w означают частные производные первого порядка по переменным, указанным в индексах.

Дифференциальные уравнения движения и краевые условия гиростата с кольцевой упругой пластиной в ограниченной задаче на круговой орбите при постоянстве гиростатических моментов k_s $(s = 1, 2, 3)$ допускают интеграл Якоби [21]

$$
\begin{aligned}
&H = T_1 + \frac{1}{2}\omega_0^2 \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}(3\alpha_{2i}\alpha_{2j} - \alpha_{3i}\alpha_{3j}) - \\
&- \frac{1}{2}\omega_0^2 \sum_{i=1}^{3} A_{ii} - \omega_0 \sum_{s=1}^{3} k_s\alpha_{3s} + \Pi = \mathrm{const} \\
&\Pi = \frac{D}{2}\int_{\tau_1} (a + r)\Big\{(\nabla^2 w)^2 + \\
&+ 2(1 - \sigma)\left[\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{w_\lambda}{a + r} - w_{rr}\left(\frac{w_{\lambda\lambda}}{(a + r)^2} + \frac{w_r}{a + r}\right)\right]\right\} d\tau_1 \\
&\left(\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{(a + r)^2}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{a + r}\frac{\partial}{\partial r}, \ \int_{\tau_1} F\, d\tau_1 = \int_0^b\int_0^{2\pi} F\, dr\, d\lambda\right)
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

где T_1 — кинетическая энергия в относительном движении, Π — потенциальная энергия пластины, σ — коэффициент Пуассона, ω_0 — орбитальная угловая скорость,

$D/2$ — цилиндрическая жесткость пластины; в выражении потенциальной энергии пластины двойные буквенные индексы у величины w означают вторые частные производные по координатам, указанным в индексах; A_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) — компоненты тензора инерции системы, построенного для центра масс системы C.

2. Уравнения и краевые условия, получаемые приравниванием нулю первой вариации интеграла (1.2), допускают решения, соответствующие положениям равновесия в орбитальной системе координат (проекции вектора относительно угловой скорости ω_s на оси y_s ($s = 1, 2, 3$) равны нулю).

Существуют три семейства положений относительного равновесия, когда круговая кольцевая пластина недеформирована ($w = w_r = w_\lambda = 0$) и ее срединная плоскость ортогональна либо радиусу орбиты ($\psi_0 = 0$, $\theta_0 = \pi/2$, $\varphi = \varphi_0$), либо касательной к траектории центра масс ($\psi_0 = \theta_0 = \pi/2$, $\varphi = \varphi_0$), либо совпадает с плоскостью орбиты. При этом главные центральные моменты инерции системы A_s ($s = 1, 2, 3$) относительно осей x, y, z при недеформированном состоянии пластины и гиростатические моменты k_s ($s = 1, 2, 3$), угол φ_0 должны удовлетворять для первого семейства движений соотношениям

$$(A_1 - A_2)\,\omega_0^2 \sin\varphi_0 \cos\varphi_0 + \omega_0 (k_1 \cos\varphi_0 - k_2 \sin\varphi_0) = 0, \quad k_3 = 0$$

Для второго семейства движений коэффициент $A_1 - A_2$ заменяется на $4(A_1 - A_2)$.

3. Для исследования устойчивости полученных стационарных движений с применением теоремы В. В. Румянцева [2] возьмем функционал Ляпунова в виде $V = H - H_0$, где H_0 — значение интеграла (1.2), вычисленного вдоль невозмущенных движений, и рассмотрим условия знакоопределенности его второй вариации $\delta^2 H$, равной сумме вторых вариаций кинетической $\delta^2 T_1$ в относительном движении и потенциальной энергии $\delta^2 \Pi_1$ системы.

Ниже установление знакоопределенности функционала Ляпунова основывается на идее введения интегральных характеристик движения сплошных сред, предложенных В. В. Румянцевым при исследовании задач устойчивости движения сложных систем по отношению к части переменных [1].

Можно показать, что вторая вариация кинетической энергии $\delta^2 T_1$ определенно-положительная и непрерывна по метрике

$$P_1 = \sum_{s=1}^{3} \omega_s^2 + \int_{\tau_1} \rho_1 (a + r) \left[v_{11}^2 + \frac{h^2}{3} (v_{22}^2 + v_{33}^2) \right] d\tau_1 + z_c^{\cdot 2}$$

$$v_{11} = w^{\cdot} - z_c^{\cdot} + (a + r)(\omega_1 \sin\lambda - \omega_2 \cos\lambda), \quad v_{22} = w_r^{\cdot} + \omega_1 \sin\lambda - \omega_2 \cos\lambda$$

$$v_{33} = w_\lambda^{\cdot} (a + r)^{-1} + \omega_1 \cos\lambda + \omega_2 \sin\lambda, \quad \rho_1 = 2h\rho$$

Здесь $2h$ — толщина пластины, ρ — ее плотность, z_c — координата центра масс C системы в системе координат $Oxyz$. Сохраним прежние обозначения для отклонений переменных от их невозмущенных значений и найдем минимум μ функционала

$$\Phi = \frac{2\Pi}{(f_2 D)}, \quad f_2 = \int_{\tau_1} (a + r) \left[w^2 + \frac{h^2}{3} \left(w_r^2 + \frac{w_\lambda^2}{(a + r)^2} \right) \right] d\tau_1 \tag{3.1}$$

в классе функций D_4, имеющих непрерывные частные производные в области $\tau_1 = \{r, \lambda\colon 0 \leqslant r \leqslant b,\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 2\pi\}$ по переменным r, λ до четвертого порядка включительно и удовлетворяющих граничным условиям

$$r = 0, \quad t \geqslant t_0, \quad w = w_r = 0 \tag{3.2}$$

Приравнивая нулю первую вариацию функционала (3.1), получим следующую краевую задачу

$$\nabla^4 w + \alpha^2 \nabla^2 w - \mu w = 0 \qquad (\alpha^2 = {}^1/_3 \mu h^2) \tag{3.3}$$

$$r = b, \quad t \geqslant t_0, \quad w_{rr} + \sigma w_{\lambda\lambda} n_5^2 + \sigma w n_5 = 0 \tag{3.4}$$

$$w_{rrr} + (2 - \sigma)\, w_{\lambda\lambda r} n_5^2 - (\sigma + 3)\, w_{\lambda\lambda} n_5^3 + \frac{1}{3} \mu h^2 w_r + w_{rr} n_5 - w_r n_5^2 = 0 \qquad (n_5 = (a + r)^{-1})$$

Можно показать, что выражение

(3.5) $$w = [c_1 J_m (\beta (a + r)) + c_2 Y_m (\beta (a + r)) + c_3 I_m (\gamma (a + r)) + + c_4 K_m (\gamma (a + r))] \cos m\lambda$$

$$\beta = \left(\frac{1}{2}\alpha^2 + k\right)^{1/2}, \qquad \gamma = \left(-\frac{1}{2}\alpha^2 + k\right)^{1/2}, \qquad k = \left(\mu + \frac{1}{36}\mu^2 h^4\right)^{1/2}$$

— решение уравнения (3.3); J_m, Y_m, I_m, K_m — бесселевы функции (первого, второго рода и модифицированные соответственно) с индексами $m = 0, 1, 2, \ldots$

Подстановка решения (3.5) в граничные условия (3.2) и (3.4) приводит к системе алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных c_i ($i = 1, 2, 3, 4$) с коэффициентами, зависящими от бесселевых функций. Приравнивая нулю определитель этой системы, получим трансцендентное уравнение частот для нахождения искомого минимума μ функционала (3.1). Уравнение частот не приводится ввиду его громоздкости.

Из (3.1) получим оценку вида

(3.6) $$Z^2 = 2\Pi - \rho_1 \varkappa f_2 \geqslant 0 \qquad (\tau = \mu D/\rho_1)$$

Теперь введем новые переменные и функционалы — интегральные характеристики формулами:

(3.7) $$x_1 = (a + r)^{1/2} w \sin (\lambda + \varphi_0), \quad x_2 = (a + r)^{1/2} w \cos (\lambda + \varphi_0)$$

$$x_3 = (a + r)^{1/2} (u_2 \cos \varphi_0 + u_1 \sin \varphi_0), \qquad x_4 = (a + r)^{1/2} (u_2 \sin \varphi_0 - - u_1 \cos \varphi_0), \qquad y_i = \int\limits_{\tau_1} \rho_1 (a + r)^{3/2} x_i \, d\tau_1 \quad (i = 1, 2)$$

$$y_j = \int\limits_{\tau_1} \rho_1 (a + r)^{3/2} x_j \, d\tau_1 \qquad (j = 3, 4)$$

Очевидно, что между исходными переменными w, w_r, w_λ и новыми переменными x_i ($i = 1, 2, 3, 4$) имеет место зависимость

(3.8) $$x_1^2 + x_2^2 = (a + r) w^2, \quad x_3^2 + x_4^2 = (a + r)(w_r^2 + n_5^2 w_\lambda^2)$$

Применим к функционалам y_i ($i = 1, 2, 3, 4$) неравенство Коши—Буняковского, тогда получим

(3.9) $$z_i^2 = C \int\limits_{\tau^1} \rho_1 x_i^2 \, d\tau_1 - y_i^2 \geqslant 0 \qquad (i = 1, 2)$$

$$z_j^2 = B \int\limits_{\tau_1} \rho_1 x_j^2 \, d\tau_1 - y_j^2 \geqslant 0 \qquad (j = 3, 4)$$

Здесь C — момент инерции пластины относительно оси z, B — ее масса.

С использованием соотношений (3.6) — (3.9) можно записать выражение для второй вариации потенциальной энергии $\delta^2\Pi_1$ в этих переменных. Условия ее знакоопределенности приводят к неравенствам

(3.10) $$\varkappa - 3\omega_0^2 > 0, \qquad A_2\omega_0^2 + \frac{k_2\omega_0}{\cos\varphi_0} > \max(l_{11}, l_{22})$$

$$\Delta_5^{(1)} = 3\omega_0^2 \left(A_1 \cos^2\varphi_0 + A_2 \sin^2\varphi_0 - A_3 - Bh^2 \frac{\omega_0^2}{\varkappa} - 3C \frac{\omega_0^2}{\varkappa - 3\omega_0^2}\right) > 0$$

$$l_{11} = \omega_0^2 (A_1 \cos^2\varphi_0 + A_2 \sin^2\varphi_0), \qquad l_{22} = 4A_3\omega_0^2 - - 3\omega_0^2 \left(A_1 \sin^2\varphi_0 + A_2 \cos^2\varphi_0\right) + 16Bh^2 \frac{\omega_0^4}{3(\varkappa + \omega_0^2)} + + 16C \frac{\omega_0^4}{\varkappa - 3\omega_0^2} + \frac{9\omega_0^4}{\Delta_5^{(1)}} (A_2 - A_1)^2 \sin^2\varphi_0 \cos^2\varphi_0$$

При выполнении этих неравенств функционал $\delta^2\Pi_1$ определенно положителен непрерывен по метрикам

$$P_2 = \psi^2 + \theta^2 + \varphi^2 + C \int\limits_{\tau_1} \rho_1 (a + r) w^2 \, d\tau_1 + B \int\limits_{\tau_1} \rho_1 (a + r)(w_r^2 + + n_5 w_\lambda^2) \, d\tau_1 + z_c^2, \qquad P_3 = P_2 + \int\limits_{\tau_1} (a + r) \left[w_{rr}^2 + + (w_r n_5 + w_{\lambda\lambda} n_5^2)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial r} n_5 w_\lambda\right)^2\right] d\tau_1$$

Согласно теореме В. В. Румянцева [2], неравенства (3.10) — достаточные условия устойчивости первого семейства положения равновесия по метрикам $P_1 + P_2$ и $P_1 + P_3$. При выполнении неравенств (3.10) функционал Ляпунова удовлетворяет и условиям теоремы [22].

Из полученных неравенств следует, что достаточные условия устойчивости существенно зависят от низшей частоты собственных колебаний круглой кольцевой пластины и ее параметров; уменьшение цилиндрической жесткости пластины может привести к дестабилизации семейства положений равновесия.

Неравенства (3.10) обобщают достаточные условия устойчивости спутника-гиростата без деформируемых элементов и при $\varkappa \to \infty$ переходят в критерии [23].

Автор благодарит В. М. Матросова за внимание и обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 440 с.
2. *Румянцев В. В.* О движении и устойчивости упругого тела с полостью, содержащей жидкость.— ПММ, 1969, т. 33, вып. 6, с. 946—957.
3. *Румянцев В. В.* Некоторые задачи динамики сложных систем.— В кн.: Проблемы прикладной математики и механики. М.: Наука, 1971, с. 179—188.
4. *Кузьмин П. А.* Стационарные движения твердого тела и их устойчивость в центральном поле тяготения.— В кн.: Труды межвуз. конференции по прикл. теории устойчивости движения и аналитической механике. Казань, 1964. с. 93—98.
5. *Морозов В. М., Рубановский В. Н., Румянцев В. В., Самсонов В. А.* О бифуркации и устойчивости установившихся движений сложных механических систем.— ПММ, 1973, т. 37, вып. 3, с. 387—399.
6. *Рубановский В. Н.* Об устойчивости некоторых движений твердого тела с упругими стержнями и жидкостью.— ПММ, 1972, т. 36, вып. 1, с. 43—59.
7. *Рубановский В. Н.* Устойчивость относительного равновесия на круговой орбите твердого тела с упругими стержнями, совершающими изгибно-крутильные колебания.— Теоретична и приложна механика, 1972, т. 3, № 2, с. 19—29.
8. *Морозов В. М., Рубановский В. Н.* Устойчивость относительного равновесия твердого тела с двумя упругими стержнями.— Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 1, с. 163—168.
9. *Рубановский В. Н.* Устойчивость стационарных вращений тяжелого твердого тела с двумя упругими стержнями.— ПММ, 1976, т. 40, вып. 1, с. 55—64.
10. *Рубановский В. Н.* Устойчивость стационарных вращений свободного твердого тела с упругой цилиндрической оболочкой, содержащей жидкость, при движении системы по инерции.— В кн.: Устойчивость движения. Аналитическая механика. Управление движением. М.: Наука, 1981, с. 251—265.
11. *Meirovitch L.* Stability of a spinning body containing elastic parts via Liapunov's direct method.— AIAA Journal, 1970, v. 8, No. 7, p. 1193—1260.
12. *Meirovitch L.* A Method for the Liapunov stability analysis of forche-free dynamical systems.— AIAA Journal, 1971, v. 9, No. 9, p. 1695—1701.
13. *Meirovitch L., Calico R. A.* A comparative study of stability methods for flexible satellites.—AIAA Journal, 1973, v. 11, No. 1, p. 91—98.
14. *Meirovitch L.* Liapunov stability analysis of hybrid dynamical systems in the neighborhood of nontrivial equilibrium.— AIAA Journal, 1974, v. 12, No. 7, p. 889—898.
15. *Pascal M.* La stabilite d'attityde d'un satellite muni de panneaux solaires.— Acta astronaut., 1978, v. 5, No. 10, p. 817—844.
16. *Набиуллин М. К.* Об устойчивости стационарного движения гиростата с упругими пластинами в ньютоновском центральном поле сил.— Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 1, с. 33—44.
17. *Болотина Н. Е., Вильке В. Г.* Об устойчивости положений равновесия гибкой тяжелой нити, привязанной к спутнику на круговой орбите.— Космич. исслед., 1978, т. 16, вып. 4, с. 621—626.
18. *Кузьмин П. А.* Об устойчивости круговой формы гибкой нити.— Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1948, вып. 20, с. 69—91.
19. *Кузьмин П. А.* Устойчивость круговой формы нити, имеющей счетное множество степеней свободы.— Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1949, вып. 22, с. 3—15.
20. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
21. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
22. *Мовчан А. А.* Устойчивость процессов по двум метрикам.— ПММ, 1960, т. 24 вып. 6, с. 988—1001.
23. *Румянцев В. В.* Об устойчивости стационарных движений спутников. М.: ВЦ АН СССР, 1967. 142 с.

Иркутск

Поступила в редакцию
19.III.1983