

УДК 539.375

## АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ О ВЫТЯНУТЫХ ПЛОСКИХ ТРЕЩИНАХ ОТРЫВА

Гольдштейн Р. В., Капцов А. В., Корельштейн Л. Б.

Методом сращиваемых асимптотических разложений строится решение пространственных задач теории упругости о трещинах отрыва, занимающих плоскую область, один характерный размер которой много меньше другого (трещины, вытянутые вдоль некоторой плоской кривой). Соответствующие члены разложения решения по малому параметру, характеризующему вытянутость трещины, строятся на основе интегро-дифференциального уравнения относительно смещений точек поверхностей трещины. Для трещин, вытянутых вдоль прямой, используется представление интегродифференциального уравнения через двумерное преобразование Фурье, что существенно упрощает вычисления. В общем случае разложение выполняется непосредственно в уравнении, записанном в  $x$ -пространстве. Построенное асимптотическое разложение справедливо в средней части трещины, вне некоторых малых окрестностей концов кривой, вдоль которой вытянута трещина. Анализируется точность построенного решения и приводятся формулы для раскрытия трещины и распределения коэффициентов интенсивности напряжений для конкретных видов трещин: трещины, имеющие в плане форму эллипса, кольца и сектора кольца, лунки, ограниченной дугами парабол, серповидной области, вытянутой вдоль дуги параболы и т. д. Сравнение результатов с имеющимися решениями для эллиптической и кольцевой трещин, а также со специально построенными вариационно-разностным методом численными решениями для трещин иных форм демонстрирует высокую эффективность полученных асимптотических формул.

**1. Прямолинейная вытянутая трещина.** Рассмотрим однородную изотропную среду с трещиной, занимающей область  $G$  в плоскости  $z = 0$ . К поверхностям трещины приложены противоположно направленные нормальные усилия

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^+(x, y, 0) &= \sigma_{zz}^-(x, y, 0) = -p(x, y) \leq 0 \\ \sigma_{xz}(x, y, 0) &= \sigma_{yz}(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in G \end{aligned}$$

(индексы плюс и минус соответствуют верхнему и нижнему берегам трещины); на бесконечности нагрузка отсутствует. Тогда [1—3] касательные компоненты смещений поверхностей трещины непрерывны

$$\begin{aligned} u_x^+(x, y, 0) &= u_x^-(x, y, 0), \quad u_y^+(x, y, 0) = u_y^-(x, y, 0), \\ (x, y) &\in G \end{aligned}$$

а для нормальных компонент смещений имеем

$$u_z^+(x, y, 0) = -u_z^-(x, y, 0) = u(x, y) \geq 0, \quad (x, y) \in G$$

Определение смещений поверхностей трещины отрыва сводится к отысканию ограниченной функции  $u(x, y)$ , равной нулю вне области  $G$  и удовлетворяющей при  $(x, y) \in G$  интегродифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} (1.1) \quad \Delta_{xy} \int_G \frac{u(x', y')}{r} dx' dy' &= -2\pi\beta p(x, y), \quad (x, y) \in G \\ r^2 &= (x - x')^2 + (y - y')^2, \quad \beta = \mu(1 - \nu)^{-1} \end{aligned}$$

Здесь  $\mu$  и  $\nu$  — соответственно модуль сдвига и коэффициент Пуассона среды,  $\Delta_{xy}$  — двумерный оператор Лапласа.

Уравнение (1.1) может быть записано в виде

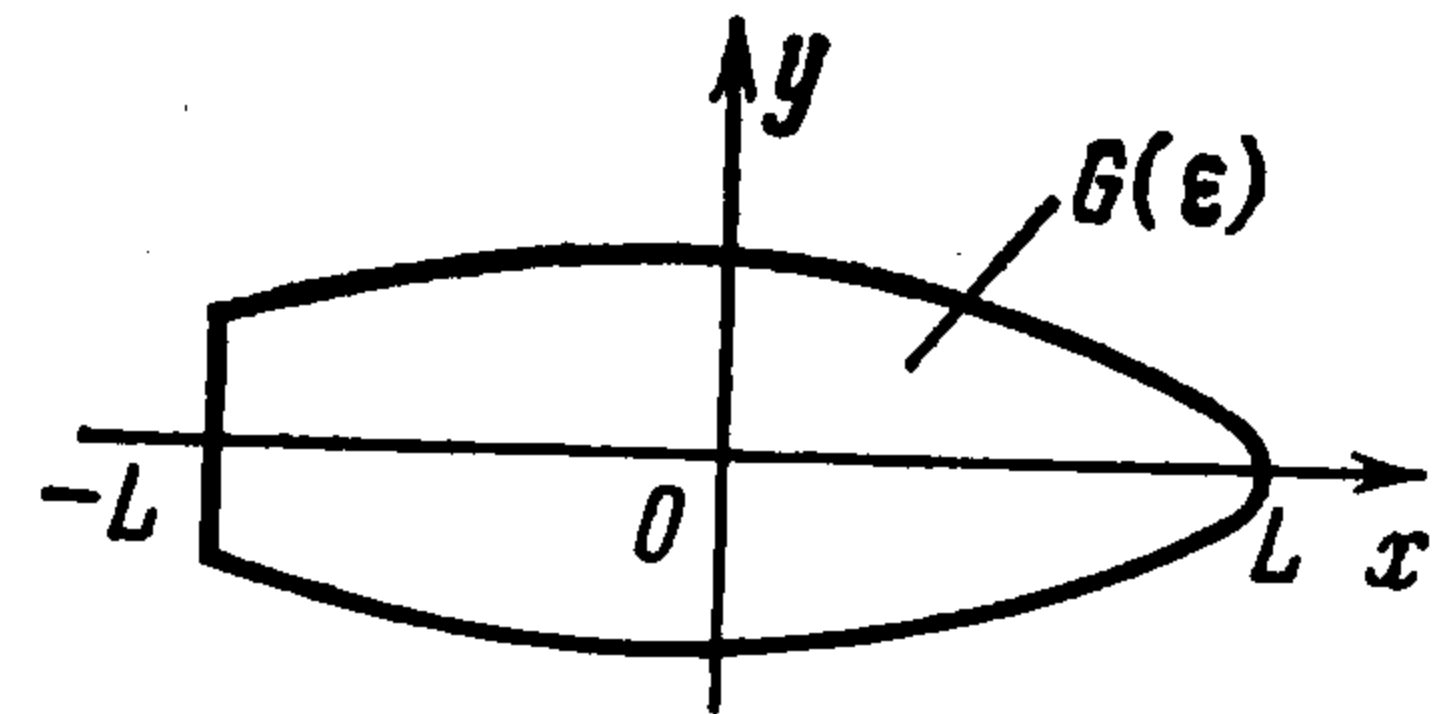
$$(1.2) \quad P_G \{F_{xy}^{-1} [\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}] * u(x, y)\} = \beta p(x, y), \quad (x, y) \in G$$

где  $F_{xy}$  — преобразование Фурье

$$F_{xy}[\varphi(x, y)] = \iint_{-\infty}^{\infty} \exp[i(\xi_x x + \xi_y y)] \varphi(x, y) dx dy$$

$P_G$  — оператор ограничения на область  $G$ ; функции в (1.2) понимаются в обобщенном смысле ( $u \in S'(R^2)$ ,  $\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} \in S'(R^2)$ ,  $p \in S'(G)$ ,  $F_{xy} : S'(R^2) \rightarrow S'(R^2)$ ,  $P_G : S'(R^2) \rightarrow S'(G)$ , [4]).

Пусть трещина занимает область  $G(\varepsilon)$  следующего вида (фиг. 1):  $|x| \leq L$ ,  $|y| \leq \varepsilon \rho(x)$ , где  $L > 0$ , функция  $\rho(x)$  ограничена и  $\rho(x) \in C^2(-L, L)$ ,  $\rho \geq 0$ , безразмерный параметр  $\varepsilon > 0$ . При малых  $\varepsilon$  получаем узкую трещину, вытянутую вдоль оси  $Ox$ . Задача заключается в определении асимптотики смещений берегов  $u(x, y, \varepsilon)$  (соответствующих трещине  $G(\varepsilon)$ ) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .



Фиг. 1

Введем внутреннюю координату  $Y = \varepsilon^{-1}y$ . Тогда в координатах  $x, Y$  трещина занимает постоянную область  $G$ :  $|x| \leq L$ ,  $|Y| \leq \rho(x)$ . В преобразованиях Фурье координате  $Y$  соответствует  $\xi_Y = \varepsilon \xi_y$ ; при этом

$$(1.3) \quad F_{xy}^{-1} [\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}] = \varepsilon^{-1} F^{-1} [\sqrt{\xi_x^2 + \xi_Y^2 \varepsilon^{-2}}], \quad F = F_{xY}$$

Подставляя равенство (1.3) в (1.2) и учитывая, что в новых координатах  $(x, Y)$  свертка уменьшается в  $\varepsilon$  раз, получим

$$(1.4) \quad P_G \{F^{-1} [\sqrt{\varepsilon^2 \xi_x^2 + \xi_Y^2}] * u(x, Y, \varepsilon)\} = \varepsilon \beta p(x, Y, \varepsilon), \quad (x, Y) \in G$$

Найдем асимптотику  $F^{-1} [\sqrt{\varepsilon^2 \xi_x^2 + \xi_Y^2}]$  как обобщенной функции при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Непосредственно из определения обобщенных функций стандартными приемами регуляризации интегралов выводятся асимптотики

$$(\varepsilon^2 \xi_x^2 + \xi_Y^2)^{-1/2} = \eta + o(1), \quad \eta = \eta(\xi_x, \xi_Y, \varepsilon) = \\ = P \frac{1}{|\xi_Y|} + \ln \frac{4}{\varepsilon^2 \xi_x^2} \delta(\xi_Y)$$

$$\xi_Y^2 (\varepsilon^2 \xi_x^2 + \xi_Y^2)^{-1/2} = |\xi_Y| + \frac{\varepsilon^2}{2} \xi_x^2 \left[ P \frac{1}{|\xi_Y|} + 2\delta(\xi_Y) - 2\eta \right] + o(\varepsilon^2)$$

$$\left( P \frac{1}{|\xi_Y|}, \varphi \right) = \iint_{-\infty}^{\infty} [\varphi(\xi_x, \xi_Y) - \theta(1 - |\xi_Y|) \varphi(\xi_x, 0)] \frac{d\xi_x d\xi_Y}{|\xi_Y|} \\ \varphi(\xi_x, \xi_Y) \in S(R^2)$$

В итоге имеем

$$(1.5) \quad \sqrt{\varepsilon^2 \xi_x^2 + \xi_Y^2} = (\varepsilon^2 \xi_x^2 + \xi_Y^2) (\varepsilon^2 \xi_x^2 + \xi_Y^2)^{-1/2} = \\ = |\xi_Y| + 1/2 \varepsilon^2 \xi_x^2 [\delta(\xi_Y) + \eta] + o(\varepsilon^2)$$

Поскольку [4]

$$F^{-1}[|\xi_Y|] = \frac{\delta(x)}{\pi} \frac{\partial}{\partial Y} P \frac{1}{|Y|}, \quad F^{-1}[\xi_x^2 \delta(\xi_Y)] = -\frac{\delta''(x)}{2\pi}$$

$$F^{-1}\left[\xi_x^2 P \frac{1}{|\xi_Y|}\right] = \frac{\delta''(x)}{\pi} (\gamma + \ln|Y|)$$

$$F^{-1}[\xi_x^2 \ln|\xi_x| \delta(\xi_Y)] = \frac{1}{2\pi} \left[ \gamma \delta''(x) + 1/2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} P \frac{1}{|x|} \right]$$

где  $\gamma$  — постоянная Эйлера, то ввиду непрерывности оператора  $F^{-1} : S'(R^2) \rightarrow S'(R^2)$  формулу (1.4) можно записать в виде

$$(1.6) \quad P_G \{ [\Phi_0 + \varepsilon^2 \ln(2/\varepsilon) \delta''(x) + \varepsilon^2 \Phi_2 + o(\varepsilon^2)] * u(x, Y, \varepsilon) = -2\pi\beta\varepsilon p(x, Y, \varepsilon) \}$$

$$\Phi_0 = -2\delta(x) \frac{\partial}{\partial Y} P \frac{1}{Y}$$

$$\Phi_2 = \frac{\delta''(x)}{2} - \delta''(x) \ln|Y| + 1/2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} P \frac{1}{|x|}$$

Пусть  $p(x, Y, \varepsilon)$  имеет следующую асимптотику:

$$p(x, Y, \varepsilon) = \sum_{i=0}^2 \varepsilon^i p_i(x, Y) + o(\varepsilon^2), \quad p_0, p_1, p_2 \in C(G)$$

Тогда асимптотику  $u(x, Y, \varepsilon)$  естественно искать в следующем виде, вытекающем из сравнения асимптотических разложений правой и левой части уравнения (1.6):

$$u(x, Y, \varepsilon) = \varepsilon \{ u_0(x, Y) + \varepsilon u_1(x, Y) + \varepsilon^2 \ln(2/\varepsilon) v(x, Y) + \varepsilon^2 u_2(x, Y) + w(x, Y, \varepsilon) \}$$

Третье слагаемое в фигурных скобках необходимо для компенсации члена порядка  $\varepsilon^3 \ln \varepsilon$ , порождаемого соответствующим логарифмическим членом в асимптотическом разложении ядра уравнения (1.6).

При этом носители всех функций лежат в  $G$ ;  $u_0(x, Y)$  — регулярная ограниченная непрерывная функция, функции  $u_1, u_2, v$  регулярны и непрерывны в любой замкнутой области, не содержащей концов  $G$  ( $x = \pm L$ );  $w(x, Y, \varepsilon) = o(1)$  (не  $o(\varepsilon^2)$  за счет возможных пограничных слоев на концах  $G$ , площадь которых стремится к нулю, в которых величина  $\varepsilon^{-1}u(x, Y, \varepsilon) - u_0(x, Y)$  ограничена) и  $w(x, Y, \varepsilon) = o(\varepsilon^2)$  в любой замкнутой области, не содержащей концов  $G$ .

Найдем  $u_0, u_1, u_2, v$  в средней части  $G$  (в любой ее замкнутой подобласти, не содержащей концов). Заметим, что в средней части трещины в силу непрерывности операции свертки в  $S'(R^2)$ , а также за счет того, что носитель функций  $\Phi_0$  и  $\delta''(x)$  — прямая  $x = 0$ , имеем

$$\begin{aligned} \Phi_0 * w(x, Y, \varepsilon) &= o(\varepsilon^2), \quad \varepsilon^2 \Phi_2 * w(x, Y, \varepsilon) = o(\varepsilon^2) \\ \varepsilon^2 \ln(2/\varepsilon) \delta''(x) * w(x, Y, \varepsilon) &= o(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Поэтому, приравнявая в уравнении (1.6) члены одинакового порядка, в средней части трещины получим:

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \Phi_0 * u_0 &= -2\pi\beta p_0, \quad \Phi_0 * u_1 = -2\pi\beta p_1, \quad \Phi_0 * u_2 = \\ &= -2\pi\beta p_2 - \Phi_2 * u_0 \end{aligned}$$

$$\Phi_0 * v = -\delta''(x) * u_0 = -\frac{d^2}{dx^2} \int_{-\rho(x)}^{\rho(x)} u_0(x, Y) dY$$

Уравнения (1.7) можно рассматривать как равенства непрерывных функций. При любом фиксированном  $x \in (-L, L)$  каждое из них представляет собой (как и следовало ожидать) уравнение плоской задачи о прямолинейной трещине нормального отрыва (с некоторым распределением усилий по берегам) и все уравнения могут быть последовательно решены в квадратурах [1, 5].

Приведем явный вид асимптотики при  $p(x, Y, \varepsilon) = p = \text{const}$ . Из (1.7) в этом случае получаем

$$p_1 = p_2 = 0, \quad u_1 = 0, \quad u_0 = q, \quad v = qf''/4$$

$$\begin{aligned}
u_2 &= 1/8q \left\{ 2f'' + (2 \ln 2) f'' - (f \ln f)'' + \frac{d^2}{dx^2} T_{\theta f} \right\} = \\
&= 1/8q \left\{ 2(1 + \ln 2) f'' + (f \Omega)'' + \frac{d^2}{dx^2} T f \right\} \\
f &= f(x) = \rho^2(x) \theta(1 - |x/L|) \\
q &= q(x, Y) = \beta p \sqrt{\rho^2(x) - Y^2}, \quad \Omega = \Omega(x) = \ln \frac{L^2 - x^2}{f(x)} \\
T f &= \int_{-L}^L \frac{f(x') - f(x)}{|x' - x|} dx', \quad T_{\theta f} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x') - \theta(1 - |x' - x|) f(x)}{|x' - x|} dx'
\end{aligned}$$

и окончательно

$$\begin{aligned}
(1.8) \quad u(x, Y, \varepsilon) &= \varepsilon q Q + o(\varepsilon^3) \\
Q &= Q(x, Y, \varepsilon) = 1 + (1/8) \varepsilon^2 [2 \ln(4/\varepsilon) f'' + 2f'' + (f \Omega)'' + \\
&+ d^2(T f) / dx^2]
\end{aligned}$$

Если функция  $f''(x)$  интегрируема на  $[-L, L]$  и  $f''(x) \in C^1(-L, L)$ , а  $f$  и  $f'$  ограничены на  $[-L, L]$ , то равенство (1.8) можно представить в несколько ином виде. Действительно, при  $x \in (-L, L)$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2} T_{\theta f} &= \frac{d^2}{dx^2} \left[ P \frac{1}{|x|} * f(x) \right] = \\
&= P \frac{1}{|x|} * [f'' + f'(-L) \delta(x+L) - f'(L) \delta(x-L) + \\
&+ f(-L) \delta'(x+L) - f(L) \delta'(x-L)]
\end{aligned}$$

где  $f''$  — производная, понимаемая в обычном (не обобщенном) смысле. Поэтому при  $x \in (-L, L)$

$$\begin{aligned}
(1.9) \quad P \frac{1}{|x|} * \frac{d^2 f}{dx^2} &= -f(L)(L-x)^{-2} - f(-L)(L+x)^{-2} - \\
&- f'(L)(L-x)^{-1} + f'(-L)(L+x)^{-1} + T_{\theta f}'' \\
Q &= 1 + (1/8) \varepsilon^2 [2 \ln(4/\varepsilon) f'' + 2f'' + f'' \ln(L^2 - x^2) + \\
&+ T f'' - (f \ln f)'' - f(L)(L-x)^{-2} - f(-L)(L+x)^{-2} + \\
&+ f'(L)(L-x)^{-1} - f'(-L)(L+x)^{-1}]
\end{aligned}$$

Заметим, что при использовании формулы (1.9) для  $Q$  единственную трудность представляет вычисление входящего в нее интеграла  $T f''$ . В ряде случаев (п. 3) этот интеграл находится аналитически, а в общем случае — численно; при этом удобно использовать установленные в [6] свойства оператора  $T$ . Для коэффициентов интенсивности напряжений  $N$  у края трещины в точках  $(x, \pm \varepsilon \rho(x))$  (при  $x \in (-L, L)$ ) получаем из (1.8)

$$N = p \sqrt{\varepsilon \rho(x) / 2} [1 + \varepsilon^2 \rho'^2(x)]^{1/4} [Q + o(\varepsilon^2)]$$

**2. Искривленная вытянутая трещина.** Рассмотрим теперь более общий случай трещины, вытянутой вдоль некоторой заданной в плоскости  $z = 0$  гладкой кривой без самопересечений  $R(l)$ ,  $l \in [-L, L]$  (она может быть и замкнутой:  $R(L) = R(-L)$ ), имеющей длину  $2L$ ,  $l$  — ее естественный параметр (расстояние вдоль кривой от ее средней по длине точки). Тогда

$$\begin{aligned}
(2.1) \quad dR(l)/dl &= \tau(l), \quad n(l) = e_z \times \tau(l) \\
d\tau(l)/dl &= -k(l) n(l), \quad dn(l)/dl = k(l) \tau(l)
\end{aligned}$$

где  $\tau(l)$  и  $n(l)$  — касательный и нормальный к кривой орты,  $k(l)$  — ее кривизна в точке  $R(l)$  (положительная или отрицательная). Введем на плоскости  $z = 0$  координаты  $(l, m)$

$$(2.2) \quad x(l, m) = R(l) + \varepsilon m \tau(l) n(l)$$

(условия на  $\rho(l)$  те же, что и в п. 1). Тогда область трещины  $G(\varepsilon)$  задается неравенствами  $|l| \leq L$ ,  $|m| \leq 1$  (фиг. 2). Задача, как и в п. 1, заключается в определении асимптотики смещения  $u(l, m, \varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Якобиан отображения, заданного (2.2), равен

$$(2.3) \quad D(l, m) = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(l, m)} \right| = \varepsilon \rho(l) [1 + \varepsilon m \rho(l) k(l)]$$

и уравнение (1.1) в области  $G(\varepsilon)$  с учетом (2.1), (2.2), (2.3) запишем в виде

$$(2.4) \quad \Delta_{xy} \int_{-L}^L \int_{-1}^1 \frac{u(l', m', \varepsilon)}{|\Delta x|} D(l', m') dl' dm' = -2\pi\beta r(l, m, \varepsilon)$$

Здесь (ср. [7])

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \Delta_{xy} \varphi(l, m) = & \kappa^{-2} \partial^2 \varphi / \partial l^2 + [\varepsilon^{-2} \rho^{-2} + m^2 \rho'^2 \rho^{-2} \kappa^{-2}] \partial^2 \varphi / \partial m^2 - \\ & - 2m \rho' \rho^{-1} \kappa^{-2} \partial^2 \varphi / \partial l \partial m - \varepsilon m \rho k' \kappa^{-3} \partial \varphi / \partial l + \\ & + [\varepsilon^{-1} \rho^{-1} \kappa^{-1} k + m(2\rho'^2 - \rho\rho'')] \rho^{-2} \kappa^{-2} + \varepsilon m^2 \rho' k' \kappa^{-3} \partial \varphi / \partial m \\ \kappa = & 1 + \varepsilon m \rho k, \quad \Delta x = x(l', m') - x(l, m) \end{aligned}$$

Для получения асимптотики функции  $u(l, m, \varepsilon)$  из уравнения (2.4) необходимо, как и в п. 1, найти асимптотику оператора

$$K_\varphi = \Delta_{xy} \int_{-L}^L \int_{-1}^1 \frac{\varphi(l', m')}{|\Delta x|} D(l', m') dl' dm'$$

Так как ввиду (2.3)

$$(2.6) \quad \begin{aligned} K_\varphi = & \Delta_{xy} [\varepsilon H(\varphi \rho) + \varepsilon^2 H(\varphi m \rho^2 k)] \\ H\varphi = & \int_{-L}^L \int_{-1}^1 \frac{i\varphi(l', m')}{|\Delta x|} dl' dm' \end{aligned}$$

то достаточно найти асимптотику оператора  $H$ , а затем использовать соотношение (2.6).

Пусть функция  $\varphi$  достаточно гладкая, тогда

$$(2.7) \quad H\varphi = J(l, m) + \sum_{i=0}^2 I_i(l, m), \quad J(l, m) = \int_{-L}^L \int_{-1}^1 \frac{\varphi}{|\Delta x|} dl' dm'$$

Здесь

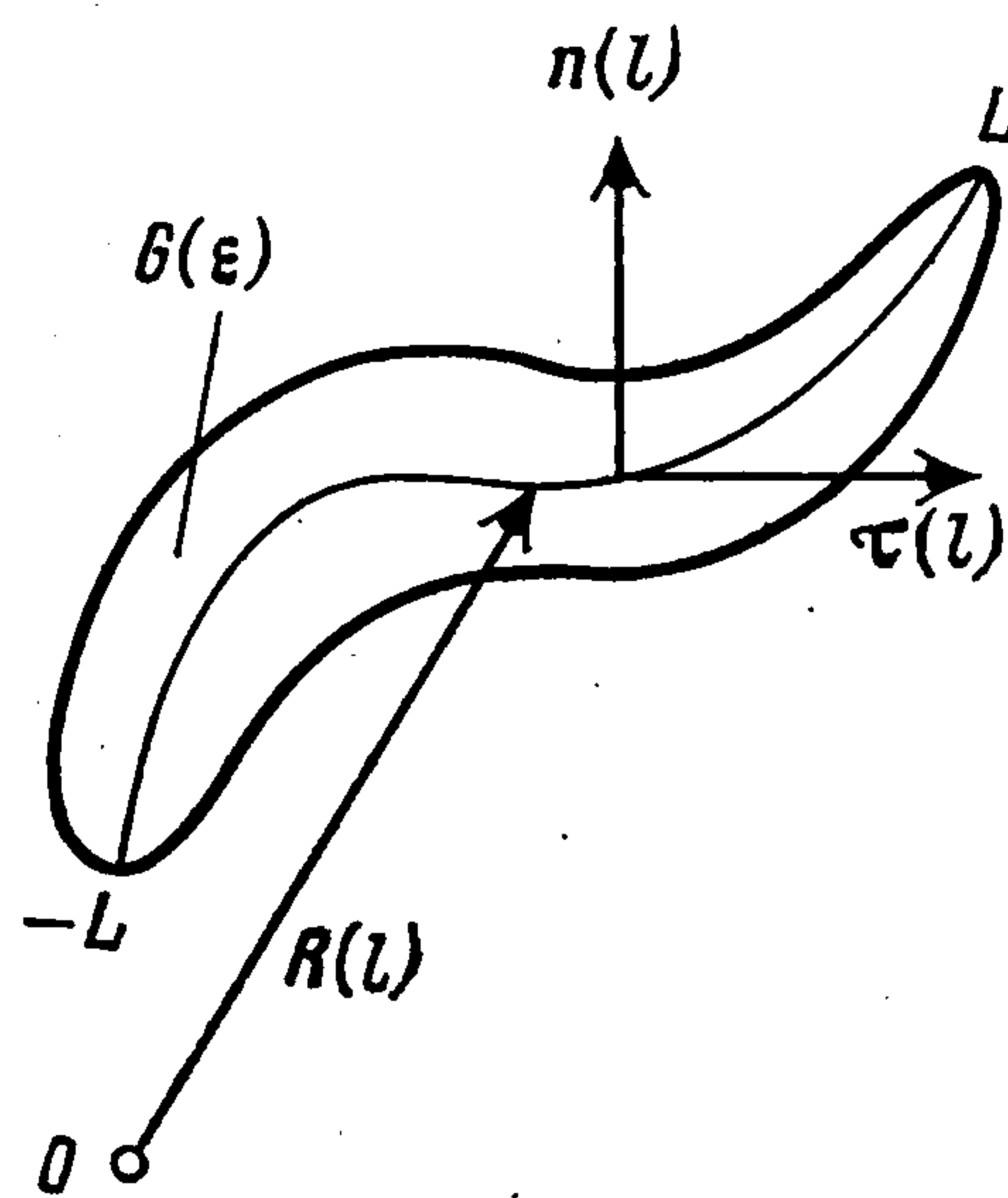
$$(2.8) \quad \begin{aligned} \psi = \psi(l', m', l, m) = & \varphi(l', m') - \sum_{i=0}^2 \frac{1}{i!} \frac{\partial^i \varphi}{\partial l^i}(l, m') (\Delta l)^i \\ \psi = & O[(\Delta l)^3] \quad \text{при } l' \rightarrow l \end{aligned}$$

$$(2.9) \quad I_i(l, m) = \int_{-1}^1 \frac{1}{i!} \frac{\partial^i \varphi}{\partial l^i}(l, m') J_i(m', l, m) dm'$$

$$J_i(m', l, m) = \int_{-L}^L \frac{(\Delta l)^i}{|\Delta x|} dl'$$

Согласно (2.2)

$$(2.10) \quad \begin{aligned} |\Delta x|^{-1} = & A^{-1/2} - 1/2 B A^{-3/2} \varepsilon - 1/2 C A^{-5/2} \varepsilon^2 + 3/8 B^2 A^{-7/2} \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \\ A = & A(l', l) = (\Delta R)^2 \\ B = & B(l', m', l, m) = 2(\Delta R) \Delta(m \rho n) \\ C = & C(l', m', l, m) = [\Delta(m \rho n)]^2 \end{aligned}$$



Фиг. 2

Подставляя (2.10) во вторую формулу (2.7), получим асимптотику интеграла  $J$ . Асимптотику интегралов  $J_i$  нельзя найти, используя для подынтегральных функций только асимптотику (2.10), так как члены разложения (2.10) при  $l' = l$  обращаются в бесконечность и соответствующие интегралы в (2.9) будут расходиться. Для получения асимптотики  $J_i$  необходимо заменить подынтегральные функции их составным асимптотическим разложением [7—10], которое представляет собой сумму внутреннего (при малых  $l' - l$ ) и внешнего (получаемого из (2.10) и соответствующего исходным координатам) асимптотических разложений, уменьшенного на часть, общую с внутренним асимптотическим разложением. В результате вычислений с учетом (2.7) и (2.10) получаем следующую асимптотику оператора  $H$ :

$$\begin{aligned}
 (2.11) \quad H\varphi = & \int_{-L}^L [F(l') |\Delta R|^{-1} - F(l) |\Delta l|^{-1}] dl' + F(l) \ln \frac{4g}{\varepsilon^2 \rho^2} - \\
 & - 2 \int_{-1}^1 \varphi_0 \ln |\Delta m| dm' - \frac{\varepsilon}{2} \int_{-L}^L \int_{-1}^1 \{B |\Delta R|^{-3} \varphi_1 - \chi_1 |\Delta l|^{-1} \varphi_0\} \times \\
 & \times dl' dm' + \varepsilon \int_{-1}^1 \varphi_0 \chi_1 \Lambda_1 dm' - \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{-L}^L \int_{-1}^1 \{C |\Delta R|^{-3} \varphi_1 - \\
 & - h_2 |\Delta l|^{-3} (\varphi_1 - \psi) - h_1 f' \Delta l |\Delta l|^{-3} (\varphi_0 + \varphi' \Delta l) - \\
 & - (m'^2 \rho'^2 + m' m \chi^2 + h_1 \rho \rho'' + 1/8 \chi_2) |\Delta l|^{-1} \varphi_0\} dl' dm' + \\
 & + \frac{\varepsilon^2}{4} \int_{-1}^1 \varphi' h_2 (1 - \Lambda) dm' + 3/8 \varepsilon^2 \int_{-L}^L \int_{-1}^1 \{B^2 |\Delta R|^{-5} \varphi_1 - \chi_1^2 |\Delta l|^{-1} \varphi_0\} \times \\
 & \times dl' dm' + \varepsilon^2 \int_{-1}^1 \varphi'' (h_2 l g^{-1} + h_1 f' \Lambda_1) dm' + \\
 & + \varepsilon^2 \int_{-1}^1 \varphi_0 \left\{ \frac{1}{2} h_2 (L^2 + l^2) g^{-2} + h_1 f' l g^{-1} + 1/48 \chi_2 (5 - 3\Lambda) + \right. \\
 & \left. + 1/2 (m'^2 \rho'^2 + m' m \chi^2 + h_1 \rho \rho'') \Lambda_1 + \frac{3}{8} \chi_1^2 \Lambda - \chi_1^2 \right\} dm' + o(\varepsilon^2)
 \end{aligned}$$

Здесь  $F(l) = \int_{-1}^1 \varphi(l, m) dm$ ,  $\chi = \rho(l) k(l)$ ,  $\chi_1 = (m' + m) \chi$ ,  $\chi_2 = (\Delta m)^2 \chi^2$ ,  $g = L^2 - l^2$ ,  $\Lambda = \ln [4g / (\varepsilon^2 h_2)]$ ,  $\Lambda_1 = 1 - \Lambda / 2$ ,  $h_1 = m' (\Delta m)$ ,  $h_2 = (\Delta m)^2 \rho^2$ ,  $\varphi_0 = \varphi(l, m')$ ,  $\varphi_1 = \varphi(l', m')$ ,  $\varphi' = \partial \varphi(l, m') / \partial l$ ,  $\rho$ ,  $\rho'$ ,  $\rho''$ ,  $f$ ,  $f'$ ,  $f''$  берутся от аргумента  $l$ .

Делая те же предположения о виде асимптотики  $p(l, m, \varepsilon)$ ,  $u(l, m, \varepsilon)$ , что и в п. 1, можно, учитывая (2.12), (2.6), (2.5) и (2.4), получить интегродифференциальные уравнения для  $u_0(l, m)$ ,  $u_1(l, m)$ ,  $u_2(l, m)$ ,  $v(l, m)$ , обобщающие (1.7). Для этого достаточно показать, что вклад остаточного члена  $\varepsilon w(l, m, \varepsilon)$ , содержащего пограничные слои на концах, в левую часть (2.4) имеет меньший порядок, чем вклад других членов асимптотики  $u(l, m, \varepsilon)$ . Но это следует из того, что вклад пограничного слоя  $u_k(x, y, \varepsilon)$  на концах  $G(\varepsilon)$  в левую часть (1.1) равен

$$\Delta_{xy} \int_{\delta S} \frac{u_k(x', y', \varepsilon)}{r} dx' dy' = o(\varepsilon^2)$$

где  $\delta S$  — область действия пограничного слоя, имеющая размер  $o(\varepsilon)$  (продольный размер  $o(1)$ , поперечный  $O(\varepsilon)$ ),  $(x, y)$  лежит в средней части

трещины и не принадлежит  $\delta S$ ,  $u_k(x, y, \varepsilon) = O(\varepsilon)$ . Уравнения для  $u_0$ ,  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $v$  приводятся к виду

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \partial^2 P(u_0) / \partial M^2 &= \pi \beta p_0, \quad 2\partial^2 P(u_1) / \partial M^2 = 2\pi \beta p_1 - \\ &- k \partial P(u_0) / \partial M \\ 2\partial^2 P(v \ln(2/\varepsilon) + u_2) / \partial M^2 &= 2\pi \beta p_2 - k \partial P(u_1) / \partial M + I(U_0) + \\ &+ \frac{1}{2} \partial^2 [U_0 \ln(4g\varepsilon^{-2})] / \partial l^2 - \partial^2 P(u_0) / \partial l^2 - \partial^2 U_0 / \partial l^2 + \\ &+ \frac{1}{8} k^2 U_0 \ln(4g\varepsilon^{-2}) + k^2 M \partial P(u_0) / \partial M - \frac{1}{4} k^2 P(u_0) + \frac{7}{12} k^2 U_0 \\ M &= \rho(l) m, \quad U_0(l) = \int_{-\rho(l)}^{\rho(l)} u_0(l, M) dM \\ I(U_0) &= \int_{-L}^L \left\{ \frac{U_0(l')}{|\Delta R|^3} - \frac{1}{|\Delta l|^3} \sum_{i=0}^2 \frac{1}{i!} \frac{\partial^i U_0}{\partial l^i}(l) (\Delta l)^i - \right. \\ &\left. - \frac{1}{8|\Delta l|} k^2(l) U_0(l) \right\} dl', \quad P(\varphi) = \int_{-\rho(l)}^{\rho(l)} \varphi(l, M') \ln |M - M'| dM' \end{aligned}$$

При  $p(l, m, \varepsilon) = p = \text{const}$  из (2.12) получаем

$$(2.13) \quad \begin{aligned} u(l, m, \varepsilon) &= \varepsilon \beta \rho(l) \sqrt{1 - m^2} Q(l, m, \varepsilon) + o(\varepsilon^3) \\ Q(l, m, \varepsilon) &= 1 - \frac{\varepsilon}{4} \chi m + \frac{\varepsilon^2}{4} \left( f'' + \frac{\chi^2}{4} \right) \ln \frac{4}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon^2}{8} \frac{d^2(f\Omega)}{dl^2} + \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{32} \chi^2 \Omega - \frac{\varepsilon^2}{8} f'' - \frac{\varepsilon^2}{12} \chi^2 + \frac{3}{16} \varepsilon^2 \chi^2 m^2 + \frac{\varepsilon^2}{4} I(f) \end{aligned}$$

и коэффициент интенсивности напряжений в точках  $(l, \pm \varepsilon \rho(l))$  равен

$$(2.14) \quad \begin{aligned} N_{\pm} &= p \sqrt{\varepsilon \rho(l)/2} [(1 \pm \varepsilon \chi)^2 + \varepsilon^2 \rho'^2]^{1/4} (1 \pm \varepsilon \chi)^{-1/2} \times \\ &\times [Q(l, \pm 1, \varepsilon) + o(\varepsilon^2)] \end{aligned}$$

3. *Примеры.* Приведем для трещин различной формы при  $p(x, y, \varepsilon) = p = \text{const}$  явный вид асимптотики, полученной в пп. 1, 2, и сравним результаты с точными или численными решениями.

1°. Эллиптическая трещина

$$\rho(x) = \sqrt{L^2 - x^2}, \quad Q = 1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 (\ln(4/\varepsilon) - \frac{1}{2})$$

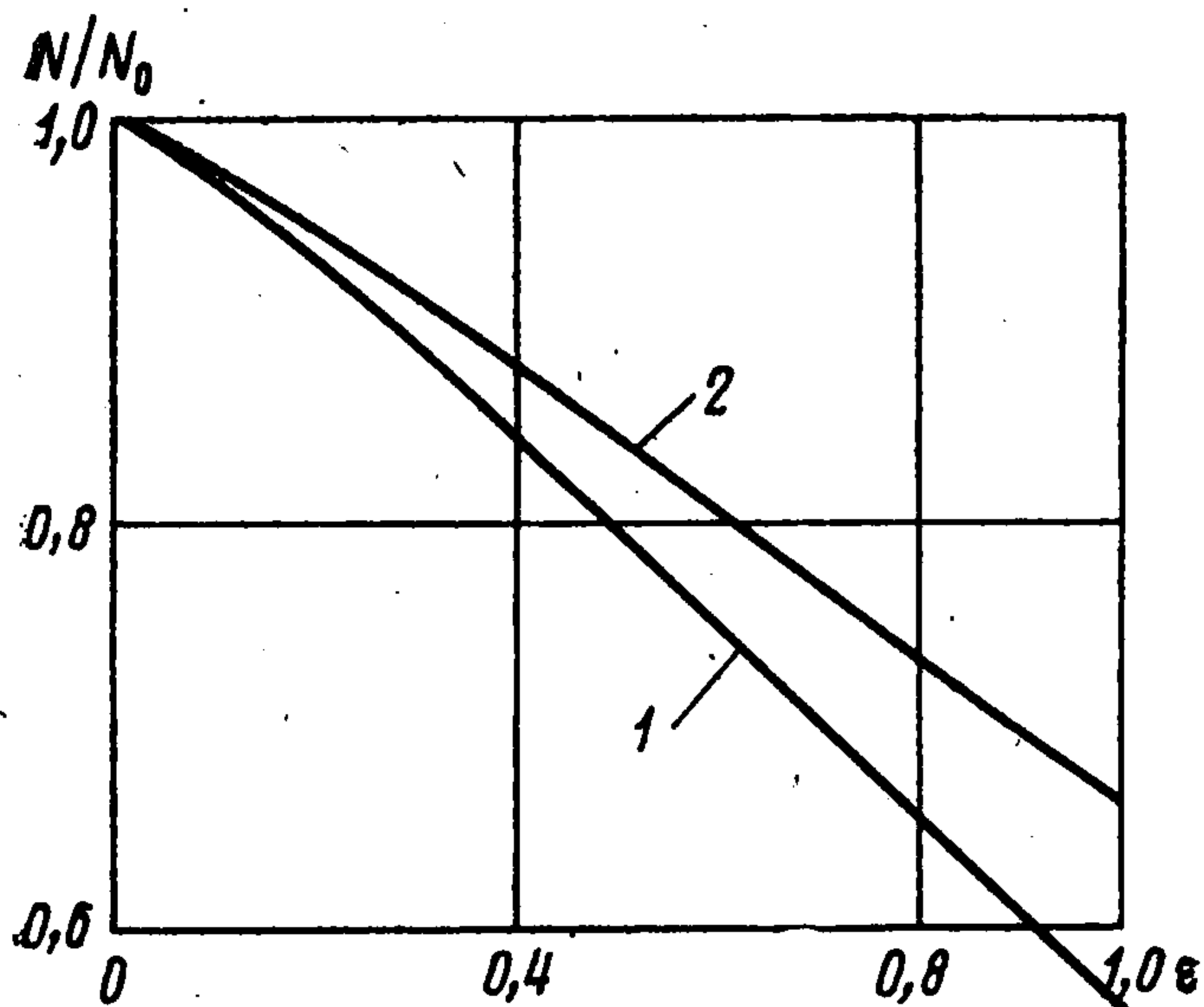
Точное решение имеет вид (1.1):  $u(x, Y, \varepsilon) = \varepsilon q / E(\sqrt{1 - \varepsilon^2})$ , и рассматриваемые первые члены его асимптотики совпадают с полученными. Графики  $Q(\varepsilon)$  (кривая 1) и  $1/E(\sqrt{1 - \varepsilon^2})$  (кривая 2) изображены на фиг. 3. Точность асимптотических формул (1.8), (1.10) уже при  $\varepsilon = 0,5$  порядка 3%, а при  $\varepsilon < 0,25$  составляет доли процента.

2°. Трещина, ограниченная дугами парабол:

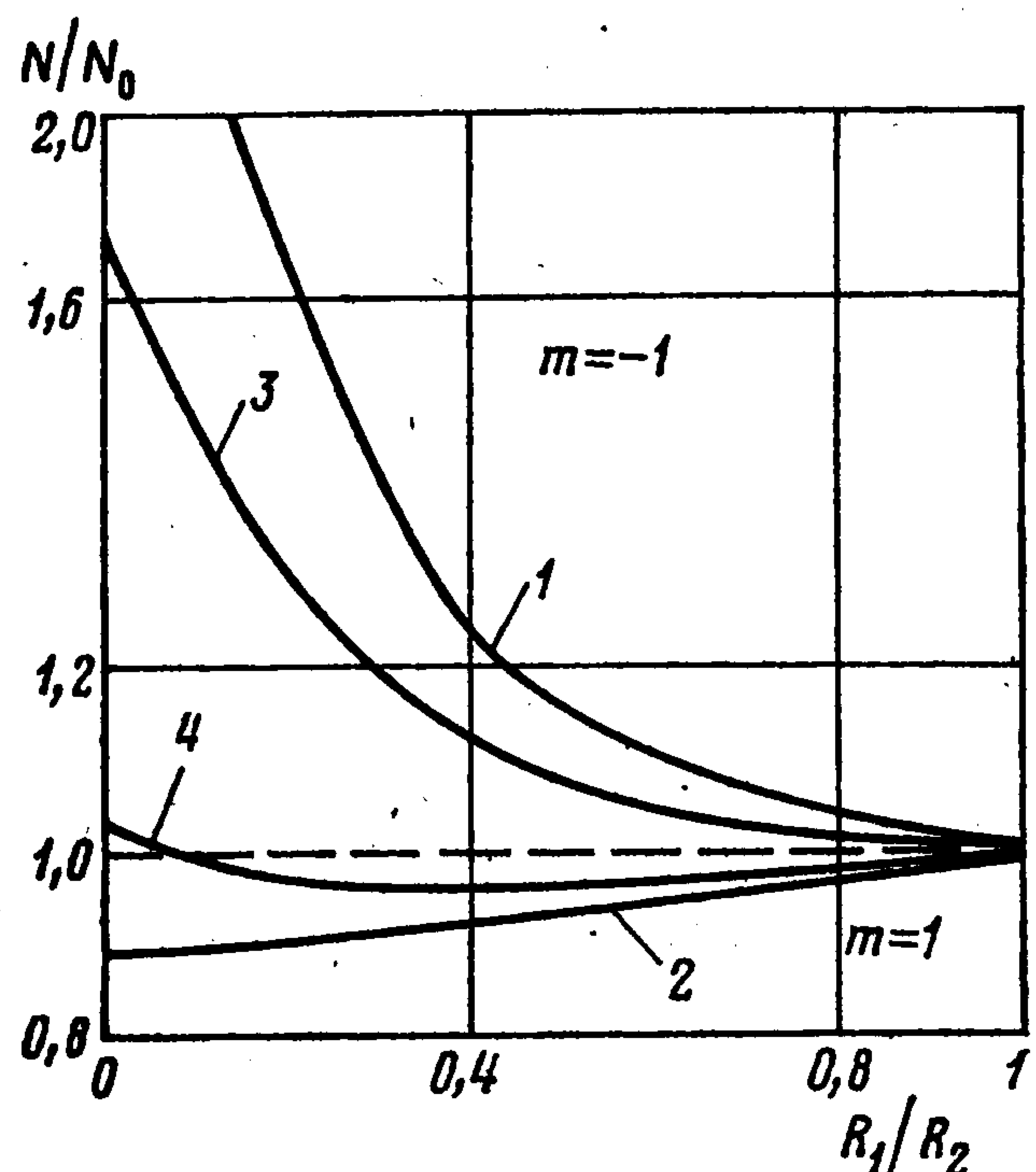
$$\begin{aligned} \rho(x) &= L(1 - x^2/L^2) \\ Q &= 1 + \frac{1}{2} \{ (3\lambda^2 - 1) \ln [16\varepsilon^{-2} (1 - \lambda^2)^{-1}] - 10\lambda^2 + 2 \} \varepsilon^2 \\ \lambda &= x/L \end{aligned}$$

На фиг. 4, а, б показано изменение коэффициента интенсивности вдоль границы трещины ( $s$  — расстояние вдоль границы от ее середины) при  $p = 1$ ,  $L = \varepsilon^{-1} = 4$  (фиг. 4, а) и  $L = \varepsilon^{-1} = 6$  (фиг. 4, б); кривая 1 получена с помощью асимптотической формулы (1.10), кривая 2 — по формуле  $N_0 = p \sqrt{\varepsilon \rho/2} [1 + \varepsilon^2 \rho'^2]^{1/4}$  (соответствующей приближению плоской задачи), кривая 3 — численно<sup>1</sup>. Вблизи средней части трещины расхождение не превышает 1—3%.

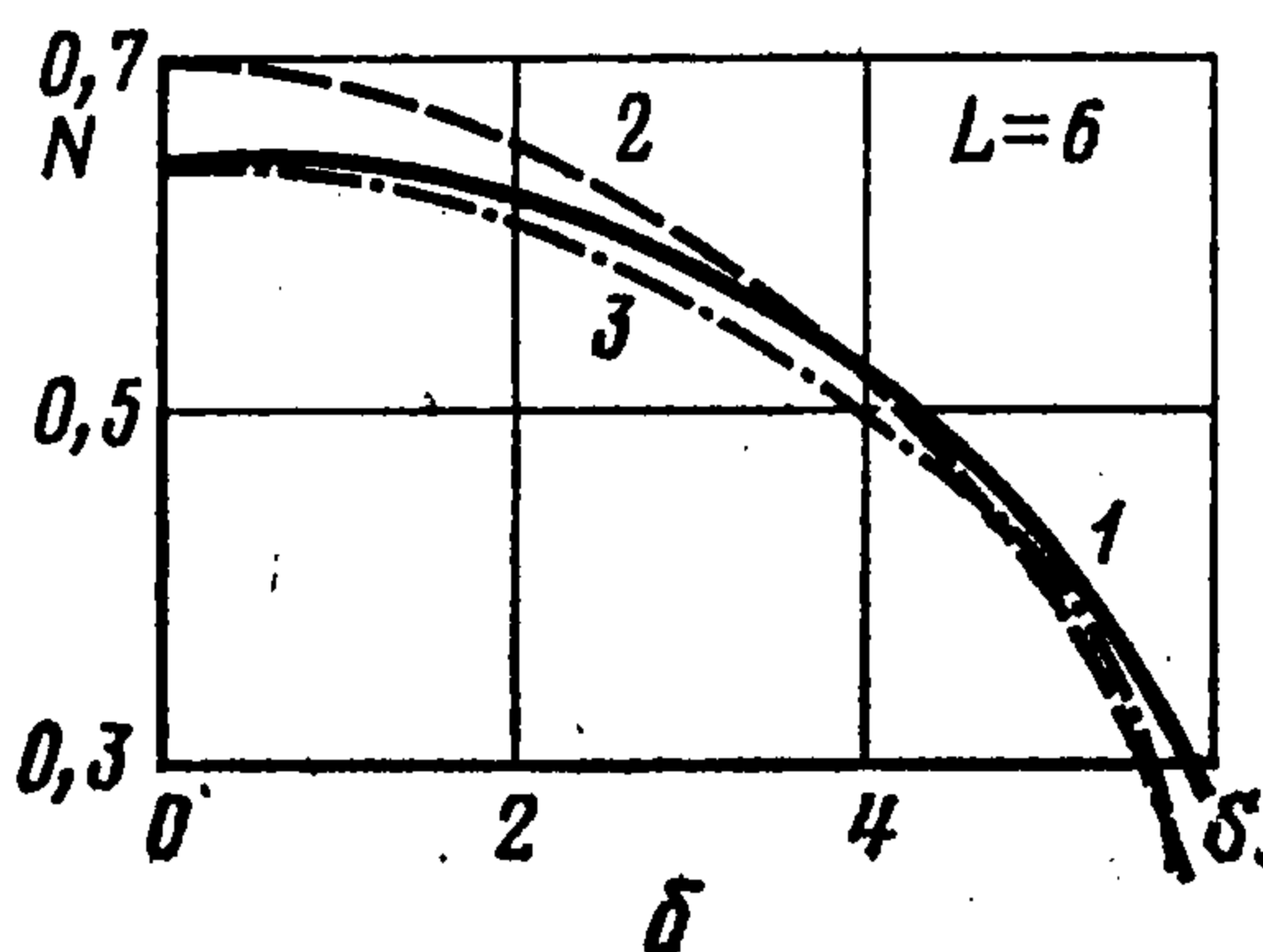
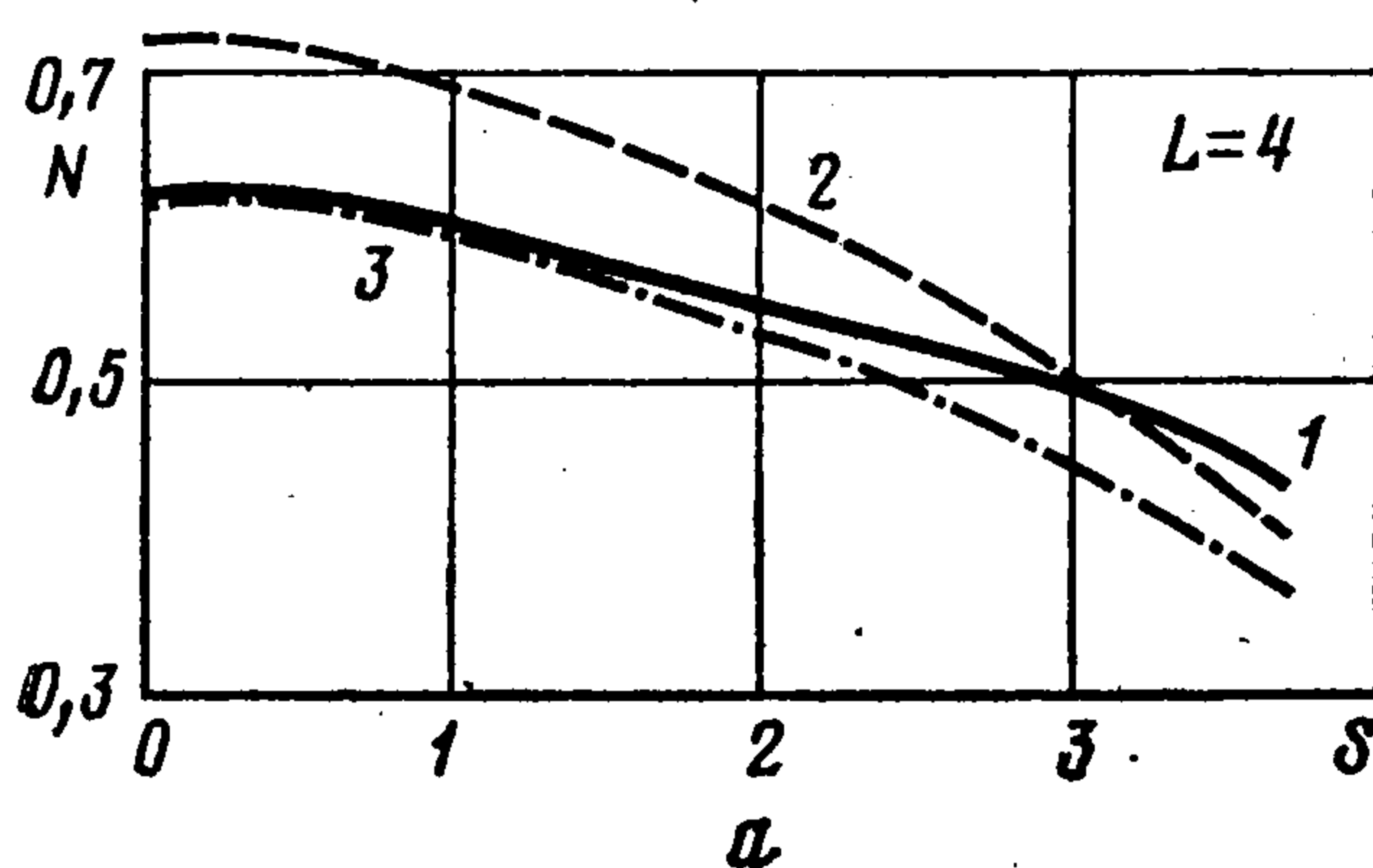
<sup>1</sup> Численные решения задач о трещинах, используемые для сравнения в примерах 2—6, построены в работе: Гольдштейн Р. В., Отрощенко И. В., Федоренко Р. П. Метод уточняющих граничных сеток в пространственных задачах теории трещин. — Препринт Ин-та проблем механики АН СССР. М., 1984, № 239. 66 с.



Фиг. 3



Фиг. 5



Фиг. 4

3°. Трещина в форме обобщенного эллипса:  $\rho(x) = L(1 - x^2/L^2)^{\xi/2}$ ,  $\xi > 0$ . При  $x = 0$  (на оси симметрии трещины)

$$Q = 1 - \frac{1}{4}\epsilon^2 [\ln(16\epsilon^{-2}) - 1 - \Gamma'(\xi) / \Gamma(\xi) - \gamma]$$

В таблице даны численные (указаны в скобках) и асимптотические значения коэффициента интенсивности при  $\xi = 1/2$  и  $\xi = 3/2$  (отнесенные к коэффициенту интенсивности для плоской задачи  $N_0$ ).

3°	$\xi = 1/2$ $\xi = 3/2$	$\epsilon = 1/4$ 0,954 (0,948) 0,908 (0,905)	$\epsilon = 1/6$ 0,977 (0,969) 0,950 (0,948)
4°	$\alpha_0 = \pi/3$ $m = 1$ $m = -1$ $\alpha_0 = \pi/2$ $m = 1$ $m = -1$	$\epsilon = 1/4$ 0,941 (0,919) 1,066 (1,018) 0,950 (0,919) 1,076 (1,047)	$\epsilon = 1/6$ 0,970 (0,926) 1,032 (0,976) 0,973 (0,919) 1,035 (0,990)
5°	$m = 1$ $m = -1$	$\epsilon = 1/3$ 0,882 (0,643) 1,049 (0,863)	$\epsilon = 1/6$ 0,946 (0,919) 1,030 (1,032)

4°. Трещина в форме сектора кольца. Линия  $R(l)$  имеет вид дуги окружности радиуса  $R$  длины  $2L = 2\alpha_0 R$ ,  $0 < \alpha_0 < \pi$ ,  $\rho(l) = R$ ,  $\chi = 1$ . В этом случае

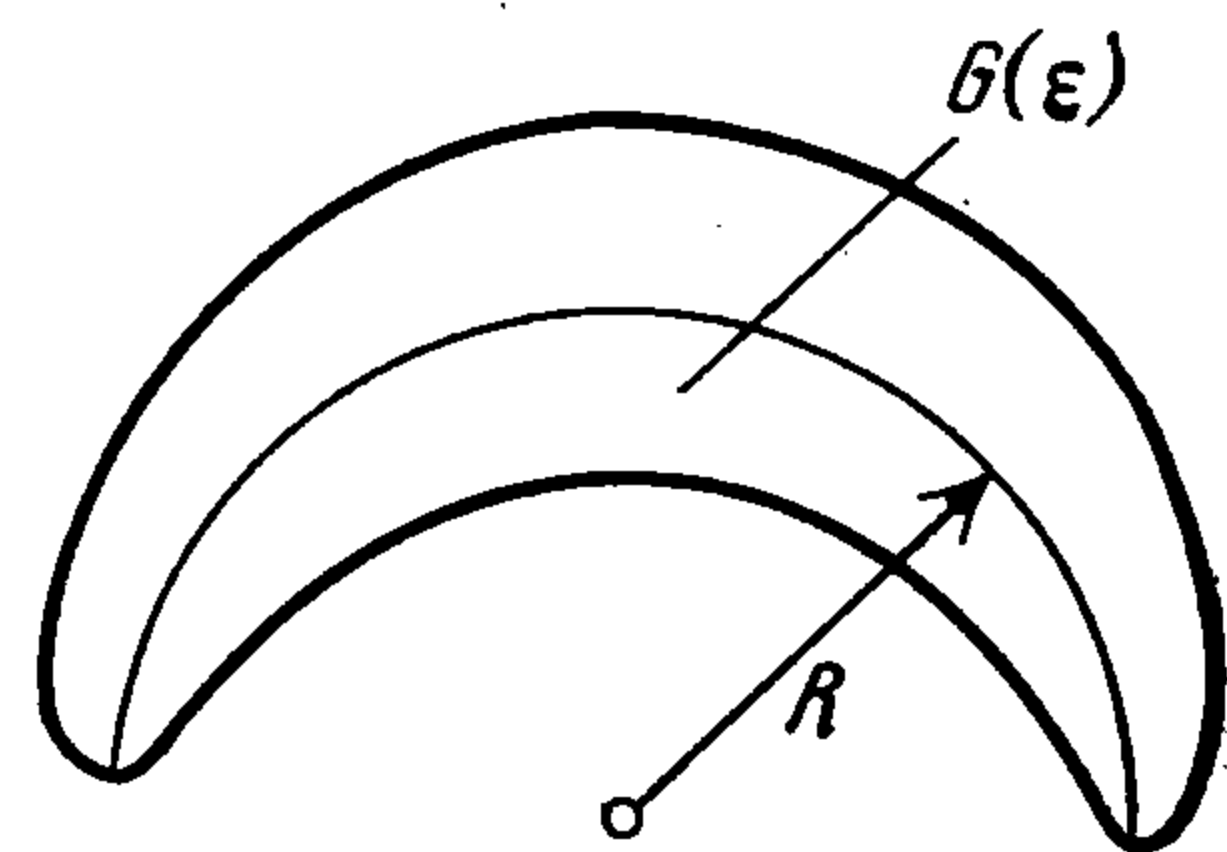
$$Q = 1 - \frac{1}{4}\epsilon m + \frac{\epsilon^2}{32} \left[ \ln \left( 256\epsilon^{-2} \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2} \right) - \cos \alpha_1 \operatorname{ctg} \alpha_1 - \right. \\ \left. - \cos \alpha_2 \operatorname{ctg} \alpha_2 - 3 + 6m^2 \right], \quad \alpha = \frac{l}{R}, \quad \alpha_1 = \frac{\alpha_0 - \alpha}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{\alpha_0 + \alpha}{2}$$

В случае кольцевой трещины ( $\alpha_0 = \pi$ , внутренний радиус  $R_1 = (1 - \varepsilon) R$ , внешний  $R_2 = (1 + \varepsilon) R$ )

$$(3.1) \quad Q = 1 - 0,25\varepsilon m + \varepsilon^2 [\ln(256\varepsilon^{-2}) - 3 + 6m^2] / 32$$

и асимптотика (2.14) совпадает с [11]. На фиг. 5 дана зависимость  $N_{\pm} / N_0$  от отношения  $R_1 / R_2$ , определенная (с использованием данных [12]) численно (кривые 1 и 2) и по асимптотическим формулам (кривые 3, 4). При  $R_1 / R_2 = 0,5$  погрешность составит 1—2%, а при  $R_1 / R_2 \geq 0,7$  — доли процента. Коэффициенты интенсивности  $N_{\pm} / N_0$  для сектора кольца приведены в таблице.

5°. Трещина «бананообразной» формы. Линия  $R(l)$  имеет вид полуокружности радиуса  $R$ ,  $\rho(l) = \sqrt{\cos \alpha}$ ,  $\alpha = l/R$  (фиг. 6).



Фиг. 6

Имеем

$$Q = 1 - 1/4\varepsilon \sqrt{\cos \alpha} m - \frac{\varepsilon^2}{32} \left[ 3 \cos \alpha \ln \left( \frac{256}{\varepsilon^2} \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2} / \cos \alpha \right) - 5 \cos \alpha + 4 \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha - 6m^2 \cos \alpha + \cos \alpha (\cos \alpha_1 \operatorname{ctg} \alpha_1 + \cos \alpha_2 \operatorname{ctg} \alpha_2) + 4 \sin \alpha (\sin^{-1} \alpha_2 - \sin^{-1} \alpha_1) \right]$$

$$\alpha_1 = \frac{\pi - 2\alpha}{4}, \quad \alpha_2 = \frac{\pi + 2\alpha}{4}$$

Коэффициент интенсивности  $N_{\pm}$  при  $\alpha = 0$  (на оси симметрии) см. в таблице.

6°. Трещина постоянной ширины, вытянутая вдоль дуги параболы. Линия  $R(l)$  задается параметрически:  $x = a\alpha$ ,  $y = a\alpha^2 / 2$ ,  $|\alpha| \leq \alpha_0$ ,  $\alpha_0 > 0$  ( $a$  имеет смысл фокального параметра параболы);  $\rho(l) = a = \text{const}$ . При  $l = \alpha = 0$  (в вершине параболы)  $\chi = 1$  и

$$Q(0, m, \varepsilon) = 1 - 1/4\varepsilon m + \frac{\varepsilon^2}{16} \ln \frac{4}{\varepsilon} + \frac{9}{32} \varepsilon^2 + \frac{\ln 2}{8} \varepsilon^2 + \frac{3}{16} \varepsilon^2 m^2 - \varepsilon^2 \left[ \frac{\alpha_1^3}{3\alpha_0^2\alpha_2} + \frac{\alpha_1\alpha_2}{24\alpha_0^2} + \frac{1}{16} \ln \frac{2\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_0} \right]$$

$$\alpha_1 = \sqrt{1 + \alpha_0^2}, \quad \alpha_2 = \sqrt{4 + \alpha_0^2}$$

Случай  $\alpha_0 \rightarrow \infty$  соответствует бесконечной трещине постоянной ширины, вытянутой вдоль параболы. При этом величина  $Q(0, m, \varepsilon)$  отличается от значения (3.1) на величину  $(1/16)\varepsilon^2 \ln 3$ , т. е. значения коэффициентов интенсивности  $N_{\pm}$  немного меньше, чем для кольцевой трещины с такими же локальными характеристиками (шириной и кривизной).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. — Киев: Наук. думка, 1968. 246 с.
2. Гольдштейн Р. В. Плоская трещина произвольного разрыва в упругой среде. — Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 3, с. 111—126.
3. Гольдштейн Р. В., Ентов В. М. Вариационные оценки для коэффициента интенсивности напряжений на контуре плоской трещины нормального разрыва. — Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 3, с. 59—64.
4. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976. 280 с.

5. Райс Дж. Математические методы в механике разрушения.— В кн.: Разрушение. Т. 2. М.: Мир, 1975, с. 204—335.
6. Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярных возмущениях области. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1981. 206 с.
7. Kalker J. J. The surface displacement of an elastic half space loaded in a slender, bounded, curved surface region with application to the calculation of the contact pressure under the roller.— J. Inst. Math. Applic., 1977, v. 19, No. 2, p. 127—144.
8. Johnson R. E. An improved slender-body theory for Stokes flow.— J. Fluid Mech., 1980, v. 99, pt. 2, p. 411—431.
9. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 274 с.
10. Найфе А. Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
11. Сметанин Б. И. Задача о растяжении упругого пространства, содержащего плоскую кольцевую щель.— ПММ, 1968, т. 32, вып. 3, с. 458—462.
12. Mastrojannis E. N., Kermandis T. B. An approximate solution of the annular crack problem.— Internat. J. Numer. Meth. Engng, 1981, v. 17, No. 11, p. 1605—1611.

Москва

Поступила в редакцию  
8.IX.1983