Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 5, 1984

УДК 539.383

ОБ ОДНОМ СПЕКТРАЛЬНОМ СООТНОШЕНИИ В СФЕРОИДАЛЬНЫХ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЯХ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИИ К КОНТАКТНЫМ ЗАДАЧАМ

Мхитарян С. М.

Методами теории обобщенного потенциала [1] устанавливаются спектральное и родственное с ним соотношения для интегрального оператора, порожденного симметрическим разностным ядром в виде функции Макдональда на двух одинаковых полубесконечных интервалах $\{(-\infty, -a), (a, \infty)\}$, которые содержат сфероидальные волновые функции. Известным методом [2] устанавливается также формула разложения произвольной функции по этим функциям. На основе полученных результатов затем строится решение интегрального уравнения контактной задачи о вдавливании двух одинаковых штампов, имеющих в плане форму полуплоскостей, в деформирующееся по степенному закону полупространство в постановке работы [3].

Таким же интегральным уравнением может быть описана указанная контактная задача, когда модуль упругости линейно-упругого полупространства по глубине изменяется по степенному закону [1].

Спектральные соотношения в классических ортогональных полиномах для обширных классов интегральных операторов математической физики приведены в монографиях [4, 5], где изложен также основанный на них метод ортогональных полиномов и даны многочисленные приложения этого метода к контактным и смешанным задачам теории упругости. Укажем также на работы [6—9], непосредственно связанные с приводимым ниже исследованием.

1. Рассмотрим интегральное уравнение

$$K\varphi_s = f_s(y), \quad K\varphi_s = \left(\int_{-\infty}^{-a} + \int_a^{\infty}\right) \frac{K_\mu(|s||y-\eta|)}{|y-\eta|^\mu} \varphi_s(\eta)\, d\eta, \quad |\mu| < \frac{1}{2} \tag{1.1}$$

с тем, чтобы установить спектральное соотношение для интегрального оператора $\psi_s(y) = K\varphi_s$, где $K_\mu(y)$ — функция Макдональда. С этой целью введем в рассмотрение, следуя [8], функцию ($\Gamma(x)$ — гамма-функция)

$$V(y, z, s) = U_s(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y, z) e^{isx} dx = \tag{1.2}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}|s|^\mu}{2^{\mu-1}\Gamma(\mu + {}^1/_2)} \left(\int_{-\infty}^{-a} + \int_a^{\infty}\right) \frac{K_\mu(|s|\sqrt{(y-\eta)^2 + z^2})}{[(y-\eta)^2 + z^2]^{\mu/2}} \varphi_s(\eta)\, d\eta$$

являющуюся преобразованием Фурье по переменной x обобщенного потенциала

$$U(x, y, z) = \iint_\omega \frac{\varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{\mu + {}^1/_2}}$$

$$\omega = \{z = 0;\ |x| < \infty,\ |y| > a\}$$

который обладает конечной мощностью источников.

Из результатов работ [1, 8] вытекает, что интегральное уравнение (1.1) эквивалентно следующей краевой задаче:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{2\mu}{z}\frac{\partial V}{\partial z} - s^2 V = 0, \quad (y, z) \in L \tag{1.3}$$

$$V(y, z, s)|_{z=0} = g_s(y), (y, 0) \in L; \; V(y, z, s) \to 0, y^2 + z^2 \to \infty$$
$$g_s(y) = \sqrt{\pi} 2^{1-\mu} |s|^{\mu} [\Gamma(\mu + {}^1/_2)]^{-1} f_s(y)$$

для всей плоскости yOz с выключенными лучами $L = \{z = 0; -\infty < y \leqslant -a, a \leqslant y < \infty\}$.

После того как построено решение краевой задачи (1.3), плотность источников, т. е. решение уравнения (1.1), определится по формуле [8]

$$(1.4) \qquad -2\pi\varphi_s(y) = \lim_{z\to\infty} \left[\operatorname{sgn} z \, |z|^{2\mu} \frac{\partial V}{\partial z} \right], \quad (y, 0) \in L$$

Решение краевой задачи (1.3) построим методом разделения переменных. Чтобы на этом пути пользоваться готовыми результатами из [10], положим

$$(1.5) \qquad V(y, z, s) = |z|^{-\mu} W(y, z, s).$$

Тогда дифференциальное уравнение из (1.3) преобразуется в следующее:

$$(1.6) \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \mu(1-\mu)\frac{W}{z^2} - s^2 W = 0$$

Далее, введем эллиптические координаты ([10], с. 136)

$$(1.7) \qquad w = y + iz = a \operatorname{ch} \zeta, \quad \zeta = u + iv, \; |u| < \infty, 0 \leqslant v \leqslant \pi$$
$$y = a \operatorname{ch} u \cos v, \; z = a \operatorname{sh} u \sin v$$

Очевидно, что при помощи конформного отображения (1.7) комплексная плоскость w с разрезом L отображается на полосу $\Pi = \{-\infty < u < \infty, 0 \leqslant v \leqslant \pi\}$, причем линии $v = 0$ соответствует дважды покрываемый луч $y \geqslant a$, а линии $v = \pi$ — дважды покрываемый луч $y \leqslant -a$ плоскости w. Теперь с учетом (1.7) положим

$$(1.8) \qquad W(y, z, s) = W(a \operatorname{ch} u \cos v, \; a \operatorname{sh} u \sin v, s) = W_0(u, v) = F(u) G(v)$$

Пользуясь результатами из [10], после некоторых элементарных преобразований дифференциальное уравнение в частных производных (1.6) сведем к следующим двум обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$(1.9) \qquad F'' + [\beta - 2q \operatorname{ch} 2u + \mu(1-\mu) \operatorname{sh}^{-2} u] F = 0, \quad -\infty < u < \infty$$
$$(1.10) \qquad G'' - [\beta - 2q \cos 2v - \mu(1-\mu) \sin^{-2} v] G = 0, \quad 0 < v < \pi,$$
$$q = a^2 s^2/4$$

где β — параметр разделения. Заметим, что если формально положить $v = iu$, то уравнение (1.10) переходит в уравнение (1.9). Поэтому можно ограничиться одним из них, например уравнением (1.10).

Подстановкой $G(v) = \sqrt{\sin v}\, H(v)$ уравнение (1.10) преобразуется в дифференциальное уравнение для сфероидальных волновых функций ([10], с. 170)

$$(1.11) \qquad \frac{d^2 H}{dv^2} + \operatorname{ctg} v \frac{dH}{dv} + [\lambda + 4\theta \sin^2 v - \varkappa^2 \sin^{-2} v] H = 0$$
$$\lambda = -\beta - {}^1/_4 - 2\theta = -\beta(\theta) - {}^1/_4 - 2\theta, \; \theta = -q, \; \varkappa = {}^1/_2 - \mu$$

Уравнение (1.11) и его решения подробно рассмотрены в [11, 12].

Двумя линейно-независимыми решениями уравнения (1.11) являются функции

$$(1.12) \qquad Ps_\nu^\varkappa(\cos v, \theta) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} (-1)^r a_{\nu, r}^\varkappa(\theta) P_{\nu+2r}^\varkappa(\cos v), \quad 0 < v < \pi$$
$$Qs_\nu^\varkappa(\cos v, \theta) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} (-1)^r a_{\nu, r}^\varkappa(\theta) Q_{\nu+2r}^\varkappa(\cos v)$$

где ν — характеристический показатель уравнения (1.11), причем $\lambda = \lambda_\nu^\varkappa(\theta)$ и $\lambda_\nu^\varkappa(0) = \nu(\nu+1)$, $P_\nu^\varkappa(x)$ и $Q_\nu^\varkappa(x)$ — функции Лежандра первого и второго рода соответственно, а коэффициенты $a_{\nu,r}^\varkappa(\theta)$ определяются из трехчленных рекуррентных соотношений ([10], с. 171). Эти коэффициенты определяются так, что

$$a_{\nu,0}^\varkappa(\theta) = a_{-\nu-1,0}^\varkappa(\theta) = a_{\nu,0}^{-\varkappa}(\theta),\ a_{\nu,0}^\varkappa(0) = 1$$

Чтобы определить характеристический показатель ν, отметим следующее. Этот параметр определяется значением $\theta = 0$, так как $\lambda_\nu^\varkappa(0) = \nu(\nu+1)$. Поэтому в уравнение (1.11) положим $\theta = 0$, в результате чего оно переходит в дифференциальное уравнение Лежандра, рассмотренное в работе [9], в которой обсуждается плоский аналог поставленной здесь задачи.

Следовательно

$$\nu(\nu+1) = -\alpha - {}^1/_4,\ \alpha = \beta(0)$$

откуда с учетом соответствующих результатов из [9] будем иметь

$$\nu = -{}^1/_2 + i\sqrt{\alpha},\ \alpha > 0$$

При таких значениях ν из указанных трехчленных рекуррентных соотношений следует

$$\overline{a_{\nu,r}^\varkappa(\theta)} = a_{-\nu-1,r}^\varkappa(\theta) = a_{\nu,-r}^\varkappa(\theta) = a_{\bar\nu,r}^\varkappa(\theta) \tag{1.13}$$

Для полного определения этих коэффициентов нормируем их условиями ([12], с. 286)

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+\varkappa+2r+1)\,\Gamma(\nu-\varkappa+1)\,[a_{\nu,r}^\varkappa(\theta)]^2}{\Gamma(\nu-\varkappa+2r+1)\,\Gamma(\nu+\varkappa+1)\,[2(\nu+2r)+1]} = \frac{1}{2\nu+1},\quad a_{\nu,0}^\varkappa(\theta) > 0$$

Исходя из сказанного, решение уравнения (1.10) представим в виде

$$G(v) = \sqrt{\sin v}\,[APs_\nu^\varkappa(\cos v, \theta) + BQs_\nu^\varkappa(\cos v, 0)],\ 0 < v < \pi$$

и построим его решения: четное $(G_{\nu,\varkappa}^+(\pi - v) = G_{\nu,\varkappa}^+(v),\ 0 < v < \pi)$ и нечетное $(G_{\nu,\varkappa}^-(\pi - v) = -G_{\nu,\varkappa}^-(v),\ 0 < v < \pi)$ относительно точки $v = \pi/2$. Воспользовавшись известными формулами ([12], с. 287), как в [9], будем иметь

$$G_{\nu,\varkappa}^\pm(v) = \sqrt{\sin v}\left\{P_{s_\nu}^\varkappa(\cos v, \theta) \pm \pm\frac{2}{\pi}\operatorname{Re}\left[\begin{matrix}\operatorname{tg}(\pi\delta)\\ \operatorname{ctg}(\pi\delta)\end{matrix}\, Q_{s_\nu}^\varkappa(\cos v, \theta)\right]\right\},\quad 0 < v < \pi \tag{1.14}$$

$$\nu = -{}^1/_2 + i\sqrt{\alpha},\ \alpha = \tau^2,\ \tau > 0,\ \varkappa = {}^1/_2 - \mu,\ \delta = (\mu - i\tau)/2$$

причем согласно (1.13) из (1.12) вытекает, что

$$\overline{P_{s_\nu}^\varkappa(\cos v, \theta)} = P_{s_\nu}^\varkappa(\cos v, \theta),\quad \overline{Q_{s_\nu}^\varkappa(\cos v, \theta)} = Q_{s_{\bar\nu}}^\varkappa(\cos v, \theta)$$

Перейдем теперь к уравнению (1.9). Единственное решение этого уравнения, ограниченное на оси $-\infty < u < \infty$ и исчезающее на бесконечности, имеет вид [10—12]

$$F_\nu^\varkappa(u) = \sqrt{|\operatorname{sh} u|}\, S_\nu^{\varkappa(3)}(\operatorname{ch} u, \theta),\ -\infty < u < \infty \tag{1.15}$$

где $S_\nu^{\varkappa(3)}(z, \theta)$ — сфероидальная волновая функция третьего рода. Для этой функции можно получить следующее представление:

(1.16) $$S_\nu^{\varkappa(3)}(\operatorname{ch} u, \theta) = l_\nu^\varkappa(\theta) \, |\operatorname{th} u|^{-\varkappa} (\operatorname{ch} u)^{-1/2} \times$$
$$\times \sum_{r=-\infty}^{\infty} (-1)^r a_{\nu, r}^\varkappa(\theta) K_{i\tau+2r}(2\sqrt{q} \operatorname{ch} u) \quad (-\infty < u < \infty)$$
$$l_\nu^\varkappa(\theta) = (\pi^2 q)^{-1/4} \exp[\pi(2\tau - 3i)/4] \, s_\nu^\varkappa(\theta), \quad q = a^2 s^2/4$$
$$s_\nu^\varkappa(\theta) = \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} (-1)^r a_{\nu, r}^\varkappa(\theta)\right]^{-1}, \quad \nu = -\frac{1}{2} + i\tau, \quad \tau > 0$$

При помощи (1.13) можно показать, что

(1.17) $$\overline{S_\nu^{\varkappa(3)}(\operatorname{ch} u, \theta)} = -i S_\nu^{\varkappa(3)}(\operatorname{ch} u, \theta)$$

Таким образом, согласно (1.5) и (1.8) краевая задача (1.3) обладает ограниченным в полосе $\Pi = \{-\infty < u < \infty, \ 0 \leqslant v \leqslant \pi\}$ и исчезающим на бесконечности нормальным решением

(1.18) $$V(y, z, s) = (|\operatorname{sh} u| \sin v)^{-\mu} F_\nu^\varkappa(u) \, G_{\nu, \varkappa}^{\pm}(v)$$
$$(-\infty < u < \infty, \ 0 \leqslant v \leqslant \pi)$$

где функции $F_\nu^\varkappa(u)$ выражаются формулами (1.15), (1.16), функции $G_{\nu,\varkappa}^{\pm}(v)$ — формулами (1.14), а переменные $y, z; u, v$ связаны зависимостью (1.7).

Чтобы вычислить соответствующую потенциалу (1.18) плотность источников, воспользуемся представлениями функций $P_\nu^\varkappa(\cos v)$ и $Q_\nu^\varkappa(\cos v)$ через гипергеометрические функции ([13], с. 144—148) и в силу зависимостей (1.7) формулу (1.4) преобразуем к виду

$$-2\pi\varphi_s(y) = (a \operatorname{sh} u)^{2\mu-1} \lim_{v \to 0} (\sin v)^{2\mu} \frac{\partial V}{\partial v}, \quad 0 < u < \infty$$

Далее поступив вполне аналогично сделанному в [9] и приняв во внимание (1.2), после некоторых преобразований придем к спектральным соотношениям

(1.19) $$\int_a^\infty \left\{\frac{K_\mu(|s||y-\eta|)}{|y-\eta|^\mu} \pm \frac{K_\mu[|s|(y+\eta)]}{(y+\eta)^\mu}\right\} (\eta^2/a^2 - 1)^{-\varkappa/2} S_\nu^{\varkappa(3)}(\eta/a, \theta) d\eta \equiv$$
$$\equiv I_\mu^{\pm}(y, s) = \lambda_{\nu, \varkappa}^{\pm} (y^2/a^2 - 1)^{\varkappa/2} S_\nu^{\varkappa/3}(y/a, \theta), \quad y > a$$
$$\lambda_{\nu, \varkappa}^{\pm} = \pi^{3/2} a^{2\varkappa} (2|s|)^{-\mu} k_{\nu, \varkappa}^{\pm}(\theta) [l_{\nu, \varkappa}^{\pm}(\theta)]^{-1}, \quad \nu = -1/2 + i\tau, \quad \tau > 0$$
$$k_{\nu, \varkappa}^{\pm}(\theta) = [\Gamma(1-\varkappa)]^{-1} \sum_{r=-\infty}^{\infty} (-1)^r \operatorname{Re}[a_{\nu, r}^\varkappa(\theta)] \pm$$
$$\pm \pi^{-1} \sin(\pi\mu) \Gamma(\varkappa) \operatorname{Re}\left[\begin{matrix}\operatorname{tg}(\pi\delta) \\ \operatorname{ctg}(\pi\delta)\end{matrix} \sum_{r=-\infty}^{\infty} (-1)^r a_{\nu, r}^\varkappa(\theta)\right], \quad \delta = \frac{\mu - i\tau}{2}$$
$$l_{\nu, \varkappa}^{\pm}(\theta) = \pm \operatorname{Re}\left[\begin{matrix}\operatorname{tg}(\pi\delta) \\ \operatorname{ctg}(\pi\delta)\end{matrix} \sum_{r=-\infty}^{\infty} (-1)^r a_{\nu, r}^\varkappa(\theta) \frac{\Gamma(1-2\delta+2r)}{\Gamma(2\delta+2r)}\right]$$

Получим также родственные с (1.19) интегральные соотношения, когда $0 < y < a$. Этому интервалу соответствует линия $u = 0$ $(0 < v < \pi/2)$. Следовательно, надо вычислить значение $[(\operatorname{sh} u)^{-\varkappa} F_\nu^\varkappa(u)]_{+0}$. С этой целью воспользуемся известными соотношениями между сфероидальными волновыми функциями ([10], с. 173—175), которые дают

(1.20) $$S_\nu^{\varkappa(3)}(\operatorname{ch} u, \theta) = [\pi \operatorname{sh}(\pi\tau)]^{-1} \exp[\pi(2\tau + i\mu)] \times$$
$$\times \{\sin(2\pi\bar\delta) K_\nu^\varkappa(\theta) Qs_{-\nu-1}^\varkappa(\operatorname{ch} u, \theta) -$$
$$- i \sin(2\pi\delta) \overline{K_\nu^\varkappa(\theta)} Qs_\nu^\varkappa(\operatorname{ch} u, \theta)\}, \quad -\infty < u < \infty$$
$$K_\nu^\varkappa(\theta) = 2^{-1}(q/4)^{\nu/2} \Gamma(2\bar\delta) \exp[-3\pi(2\tau + i)/4] \times$$
$$\times s_\nu^\varkappa(\theta) L_\nu^\varkappa(\theta) [\overline{L_\nu^\varkappa(\theta)}]^{-1}$$
$$L_\nu^\varkappa(\theta) = \sum_{r=0}^\infty \frac{(-1)^r a_{\nu,r}^{\varkappa}(\theta)}{r!\,\Gamma(1 + i\tau - r)}$$
$$(\nu = -{}^1/_2 + i\tau, \quad \tau > 0, \quad \delta = (\mu - i\tau)/2, \quad -\nu - 1 = \bar\nu, \quad \varkappa = {}^1/_2 - \mu)$$

Далее, учитывая формулы (1.14) — (1.16) и (1.20), опять при помощи (1.2) и (1.18) получим следующие интегральные соотношения:

(1.21) $$I_\mu^\pm(y, s) = h_{\nu,\varkappa}^\pm (1 - y^2/a^2)^{\varkappa/2} H_{\nu,\varkappa}^\pm [\arccos(y/a)], \quad 0 < y < a$$
$$h_{\nu,\varkappa}^\pm = \pm 2^{-1/2}\pi^{3/2}a^{2\varkappa}|s|^{-\mu} M_\tau \left\{\operatorname{Re}\left[\begin{matrix}\operatorname{tg}(\pi\delta)\\ \operatorname{ctg}(\pi\delta)\end{matrix}\sum_{r=0}^\infty (-1)^r a_{\nu,r}^\varkappa(\theta) \times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times \Gamma(1 - 2\delta + 2r)(\Gamma(2\bar\delta + 2r))^{-1}\right]\right\}^{-1}, \qquad H_{\nu,\varkappa}^\pm(v) = (\sin v)^{-1/2} G_{\nu,\varkappa}^\pm(v)$$
$$M_\tau = 2^{\varkappa-1}[\pi \operatorname{sh}(\pi\tau)]^{-1} \exp(2\pi\tau) \Gamma(\varkappa) s_\nu^\varkappa(\theta) \times$$
$$\times [\sin(2\pi\delta) \overline{K_\nu^\varkappa(\theta)} + i \sin(2\pi\bar\delta) K_\nu^\varkappa(\theta)]$$

Очевидно, что $\overline{M_\tau} = -iM_\tau$. Последнее вместе (1.17) обеспечивает вещественность соотношений (1.19) и (1.21). Поскольку $K_\mu(x)$ и $P_\nu^\mu(x)$ — аналитические функции параметра μ, то по принципу симметрии Шварца эти соотношения могут быть аналитически продолжены в полосу $|\operatorname{Re}\mu| < {}^1/_2$.

Отметим, что соотношения (1.21) могут быть использованы в контактных и смешанных задачах теории упругости при вычислении перемещений основания вне штампов или разрушающих напряжений вне разрезов в массивных телах.

2. Перейдем к вопросу разложения произвольной функции по функциям $S_\nu^{\mu(3)}(\operatorname{ch} u, \theta)$, для чего дифференциальное уравнение (1.9) рассмотрим на интервале $0 < u < \infty$ и параметр $\alpha = \beta(0)$ будем трактовать как комплексный параметр, находящийся в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\alpha \geqslant 0$. Оба конца рассматриваемого интервала сингулярны для данного уравнения, поэтому в качестве опорной точки возьмем точку $u = b \neq 0$. В качестве двух линейно-независимых решений этого уравнения возьмем функции $\sqrt{\operatorname{sh} u}\, Ps_\nu^\varkappa(\operatorname{ch} u, \theta)$ и $\sqrt{\operatorname{sh} u}\, Ps_\nu^{-\varkappa}(\operatorname{ch} u, \theta)$ и, следуя [2], построим такие его решения $\varphi(u, \alpha)$ и $\chi(u, \alpha)$, что
$$\varphi(b, \alpha) = 0, \quad \varphi'(b, \alpha) = -1$$
$$\chi(b, \alpha) = 1, \quad \chi'(b, \alpha) = q_0$$

Видно, что

(2.1) $$\varphi(u, \alpha) = \pi[2\sin(\pi\varkappa)]^{-1} s_\nu^\varkappa(\theta)\, s_\nu^{-\varkappa}(\theta) \sqrt{\operatorname{sh} b \operatorname{sh} u} \times$$
$$\times [Ps_\nu^\varkappa(\operatorname{ch} u, \theta) Ps_\nu^{-\varkappa}(\operatorname{ch} b, \theta) - Ps_\nu^{-\varkappa}(\operatorname{ch} u, \theta) Ps_\nu^\varkappa(\operatorname{ch} b, \theta)]$$
$$\chi(u, \alpha) = \pi[2\sin(\pi\varkappa)]^{-1} s_\nu^\varkappa(\theta)\, s_\nu^{-\varkappa}(\theta) \operatorname{sh} b \sqrt{\operatorname{sh} b \operatorname{sh} u} \times$$
$$\times [Ps_\nu^\varkappa(\operatorname{ch} u, \theta) Ps_\nu'^{-\varkappa}(\operatorname{ch} b, \theta) - Ps_\nu^{-\varkappa}(\operatorname{ch} u, \theta) Ps_\nu'^\varkappa(\operatorname{ch} b, \theta)]$$
$$(q_0 = {}^1/_2 \operatorname{cth} b, \quad 0 < u < \infty)$$

Далее, при помощи известных асимптотических представлений ([10], с. 177) можем записать

(2.2) $$Ps_\nu^\varkappa(\operatorname{ch} u, \theta) \sim [\Gamma(1-\varkappa)\, s_\nu^\varkappa(\theta)]^{-1}\, [\operatorname{sh}(u/2)]^{-\varkappa} + O\{[\operatorname{sh}(u/2)]^{2-\varkappa}\}$$
$$dPs_\nu^\varkappa(\operatorname{ch} u, \theta)/d\operatorname{ch} u \sim -\varkappa\, [4\Gamma(1-\varkappa)\, s_\nu^\varkappa(\theta)]^{-1} \times [\operatorname{sh}(u/2)]^{-2-\varkappa} + O\{[\operatorname{sh}(u/2)^{-\varkappa}\},\quad u \to 0$$

Отсюда сразу вытекает, что все решения (1.9) при $\operatorname{Im}\sqrt{\alpha} > 0$ принадлежат пространству $L^2(0, b)$, т. е. в точке $u = 0$ имеет место случай предельного круга Вейля. Предельная окружность является пределом окружностей

$$l = -\frac{\chi(b_0, \alpha)\operatorname{ctg}\alpha_0 + \chi'(b_0, \alpha)}{\varphi(b_0, \alpha)\operatorname{ctg}\alpha_0 + \varphi'(b_0, \alpha)}$$

при $b_0 \to 0$.

Поступив совершенно аналогично сделанному в [2] (с. 95) и воспользовавшись асимптотическими формулами (2.2), находим предельную окружность ($|c| < \infty$)

(2.3) $$m_1(\alpha) = \operatorname{sh} b\, \frac{cs_\nu^{-\varkappa}(\theta)\, Ps_\nu'^{-\varkappa}(\operatorname{ch} b, \theta) - s_\nu^\varkappa(\theta)\, Ps_\nu'^{\varkappa}(\operatorname{ch} b, \theta)}{s_\nu^\varkappa(\theta)\, Ps_\nu^\varkappa(\operatorname{ch} b, \theta) - cs_\nu^{-\varkappa}(\theta)\, Ps_\nu^{-\varkappa}(\operatorname{ch} b, \theta)}$$

Теперь, составив функцию

$$\psi_1(u, \alpha) = \chi(u, \alpha) + m_1(\alpha)\, \varphi(u, \alpha)$$

из (2.1) и (2.3) после преобразований будем иметь

(2.4) $$\psi_1(u, \alpha) = \frac{\sqrt{\operatorname{sh} u}}{\sqrt{\operatorname{sh} b}} \cdot \frac{s_\nu^\varkappa(\theta)\, Ps_\nu^\varkappa(\operatorname{ch} u, \theta) - cs_\nu^{-\varkappa}(\theta)\, Ps_\nu^{-\varkappa}(\operatorname{ch} u, \theta)}{s_\nu^\varkappa(\theta)\, Ps_\nu^\varkappa(\operatorname{ch} b, \theta) - cs_\nu^{-\varkappa}(\theta)\, Ps_\nu^{-\varkappa}(\operatorname{ch} b, \theta)}$$

Обращаясь к нахождению нужного решения уравнения (1.9) на интервале (b, ∞), отметим следующее. В данном случае необходимо получить формулу разложения произвольной функции по функциям $S_\nu^{\varkappa(3)}(\operatorname{ch} u, \theta)$, образующим семейство функций по параметру ν или же по параметру α. Но спектральный параметр α, который согласно методу из [2] продолжается в верхнюю комплексную плоскость, представляет собой значение параметра β при $\theta = 0$, т. е. $\alpha = \beta(0)$. Поэтому в разбираемом случае, в отличие от [2], надо брать то решение уравнения (1.9), которое при $\theta = 0$ и $\operatorname{Im}\sqrt{\alpha} > 0$ принадлежит пространству $L^2(b, \infty)$. Так как при $\theta = 0$ уравнение (1.9) переходит в уравнение Лежандра и единственным решением последнего, принадлежащим при $\operatorname{Im}\sqrt{\alpha} > 0$ пространству $L^2(b, \infty)$, является функция $\sqrt{\operatorname{sh} u}\, Q_{-\nu-1}^{\varkappa}(\operatorname{ch} u)$, что сразу вытекает из известной асимптотической формулы ([13], с. 165), то нужным решением (1.9) будет функция $\sqrt{\operatorname{sh} u}\, Qs_{-\nu-1}^{\varkappa}(\operatorname{ch} u, \theta)$. Она может быть представлена в виде [11]

(2.5) $$\sqrt{\operatorname{sh} u}\, Qs_{-\nu-1}^{\varkappa}(\operatorname{ch} u, \theta) = \pi\, [2\sin(\pi\varkappa)]^{-1} \exp(i\pi\varkappa)\, \sqrt{\operatorname{sh} u} \times \{Ps_\nu^\varkappa(\operatorname{ch} u, \theta) - \Gamma(\varkappa-\nu)\, [\Gamma(-\varkappa-\nu)]^{-1} Ps_\nu^{-\varkappa}(\operatorname{ch} u, \theta)\}$$
$$0 < u < \infty$$

Следовательно, функция

$$\psi_2(u, \alpha) = \chi(u, \alpha) + m_2(\alpha)\, \varphi(u, \alpha)$$

может отличаться от (2.5) лишь постоянным множителем. Отсюда с учетом (2.1) и (2.5) находим

$$m_2(\alpha) = \operatorname{sh} b \frac{Ps'^{\varkappa}_{\nu}(\operatorname{ch} b, \theta)\,\Gamma(-\varkappa-\nu) - Ps'^{-\varkappa}_{\nu}(\operatorname{ch} b, \theta)\,\Gamma(\varkappa-\nu)}{Ps^{-\varkappa}_{\nu}(\operatorname{ch} b, \theta)\,\Gamma(\varkappa-\nu) - Ps^{\varkappa}_{\nu}(\operatorname{ch} b, \theta)\,\Gamma(-\varkappa-\nu)} \tag{2.6}$$

Далее, при помощи (2.3) и (2.6) вычислим спектральную плотность [2]

$$\sigma_0(\tau) = \lim_{\operatorname{Im}\alpha\to+0} \{[m_2(\alpha) - m_1(\alpha)]^{-1}\} = \frac{2}{\pi}\rho(\tau)\operatorname{sh} b\,[\chi_\nu^{\varkappa}(b,\theta)]^2$$

$$\chi_\nu^{\varkappa}(u,\theta) = s_\nu^{\varkappa}(\theta)\,Ps_\nu^{\varkappa}(\operatorname{ch} u,\theta) - cs_\nu^{-\varkappa}(\theta)\,Ps_\nu^{-\varkappa}(\operatorname{ch} u,\theta)$$

Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательный результат $(\alpha = \tau^2)$

$$\begin{aligned}\rho(\tau) &= \pi \operatorname{sh}(\pi\tau)\,\{[c^2\gamma_\nu^{\varkappa}(\theta)\,|\,\Gamma(^1/_2 - \varkappa + i\tau)\,|^2 + \\ &+ [\gamma_\nu^{\varkappa}(\theta)]^{-1}\,|\,\Gamma(^1/_2 + \varkappa + i\tau)\,|^2\,]\,|\cos[\pi(\varkappa + i\tau)]\,|^2 - \\ &-2\pi c\cos(\pi\varkappa)\operatorname{ch}\pi\tau\}^{-1},\quad \tau > 0,\quad \varkappa = {}^1/_2 - \mu \\ \rho(\tau) &= 0,\ \tau = it\ (t > 0),\quad \gamma_\nu^{\varkappa}(\theta) = s_\nu^{-\varkappa}(\theta)\,[s_\nu^{\varkappa}(\theta)]^{-1}\end{aligned} \tag{2.7}$$

Теперь приняв во внимание (2.4) и (2.7), для произвольной функции $f(u)$ из достаточно общего класса (необходимые ограничения на функции $f(u)$ оговорены в [2]) получим следующую формулу разложения ([2], с. 59):

$$f(u) = \int_0^\infty \chi_\nu^{\varkappa}(u,\theta)\,\rho(\tau)\,\tau\,d\tau \int_0^\infty \chi_\nu^{\varkappa}(y,\theta)\operatorname{sh} y f(y)\,dy \tag{2.8}$$

Рассмотрим два частных случая формулы (2.8), когда $c = 0$ и $c = \infty$. Получим (соответственно этим случаям берутся верхние или нижние знаки)

$$f(u) = \int_0^\infty Ps_\nu^{\pm\varkappa}(\operatorname{ch} u,\theta)\,\rho_\pm(\tau)\,\tau\,d\tau \int_0^\infty Ps_\nu^{\pm\varkappa}(\operatorname{ch} y,\theta)\operatorname{sh} y f(y)\,dy \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}\rho_\pm(\tau) &= \pi\operatorname{sh}(\pi\tau)\,s_\nu^{\varkappa}(\theta)\,s_\nu^{-\varkappa}(\theta)\,\{\,|\,\Gamma(^1/_2 \pm \varkappa + i\tau)\,||\times \\ &\times\cos[\pi(\varkappa + i\tau)]\,|\,\}^{-2}\end{aligned}$$

При $\theta \to 0$ имеем

$$s_\nu^{\pm\varkappa}(\theta) \to 1,\quad Ps_\nu^{\pm\varkappa}(\operatorname{ch} u,\theta) \to P_\nu^{\pm\varkappa}(\operatorname{ch} u)$$

и формулы (2.9) переходят в известные формулы интегрального преобразования Мелера ([14], с. 398).

Чтобы формулу разложения (2.8) записать применительно к функциям $S_\nu^{\varkappa(3)}(\operatorname{ch} u,\theta)$, заметим, что с учетом (2.5) представление (1.20) можно записать в виде

$$\begin{aligned}&S_\nu^{\varkappa(3)}(\operatorname{ch} u,\theta) = A_\varkappa Ps_\nu^{\varkappa}(\operatorname{ch} u,\theta) - B_\varkappa Ps_\nu^{-\varkappa}(\operatorname{ch} u,\theta), \\ &0 < u < \infty \\ &A_\varkappa = A_\varkappa(\tau,\theta) = E_\varkappa(\tau)\,[\sin(2\pi\delta)\,\overline{K_\nu^{\varkappa}(\theta)} + i\sin(2\pi\bar\delta)\,K_\nu^{\varkappa}(\theta)] \\ &B_\varkappa = B_\varkappa(\tau,\theta) = E_\varkappa(\tau)\,[\sin(2\pi\delta)\,\overline{K_\nu^{\varkappa}(\theta)}\,\Gamma(1-2\delta)(\Gamma(2\bar\delta))^{-1} + \\ &+ i\sin(2\pi\bar\delta)\,K_\nu^{\varkappa}(\theta)\,\Gamma(1-2\bar\delta)\,(\Gamma(2\delta))^{-1}] \\ &E_\varkappa(\tau) = [2\sin(\pi\varkappa)\operatorname{sh}(\pi\tau)]^{-1}\exp(2\pi\tau)\end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что при $c = B_\varkappa s_\nu^{\varkappa}(\theta)\,[A_\varkappa s_\nu^{-\varkappa}(\theta)]^{-1}$ — функция $\chi_\nu^{\varkappa 3}(u,\theta)$ с точностью до множителя совпадает с функцией $S_\nu^{\varkappa(3)}(\operatorname{ch} u,\theta)$.

С учетом последнего из (2.8) получим

$$f(u)=\int_0^\infty S_\nu^{\varkappa(3)}(\operatorname{ch} u,\theta)\,\sigma(\tau)\,\tau\,d\tau\int_0^\infty S_\nu^{\varkappa(3)}(\operatorname{ch} y,\theta)\operatorname{sh} y f(y)\,dy \tag{2.10}$$

$$\sigma(\tau)=\pi\operatorname{sh}(\pi\tau)\,s_\nu^{\varkappa}(\theta)\,s_\nu^{-\varkappa}(\theta)\,\{[B_\varkappa^2\,|\,\Gamma(^1/_2-\varkappa+i\tau)\,|^2+$$
$$+A_\varkappa^2\,|\,\Gamma(^1/_2+\varkappa+i\tau)\,|^2\,|\cos[\pi(\varkappa+i\tau)]\,|^2-$$
$$-2\pi\cos(\pi\varkappa)\operatorname{ch}(\pi\tau)\,A_\varkappa B_\varkappa\}^{-1},\quad \nu=-^1/_2+i\tau$$

3. Полученные результаты применим к следующей контактной задаче. Пусть два одинаковых штампа, имеющих в плане форму двух полуплоскостей ω, под действием определенных моментов и вертикальных распределенных по их верхним граням сил $p_0(x,\ y)$, обладающих конечной равнодействующей P, перемещаются только поступательно в вертикальном направлении и вдавливаются в полупространство $z<0$. Эту задачу рассмотрим в постановке нелинейной теории установившейся ползучести, когда материал полупространства подчиняется степенной зависимости $\sigma_i=K\varepsilon_i^h$ $(0<h\leqslant 1)$ [3]. Здесь σ_i и ε_i — соответственно интенсивности напряжений и скоростей деформаций, а K и h — физические постоянные.

Придерживаясь обобщенного принципа суперпозиции перемещений [3], указанную задачу математически можно сформулировать относительно неизвестных контактных напряжений $p(x,\ y)$ в виде интегрального уравнения

$$\iint_\omega \frac{p(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{1-h/2}}=\left\{\frac{\delta-f(x,y)}{A}\right\}^h,\quad A=c(h)K^{-\gamma},\quad \gamma=\frac{1}{h} \tag{3.1}$$

$$\iint_\omega p(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta=P\qquad(P<\infty)$$

где δ — осадка штампов, $f(x,\ y)$ — функция, характеризующая их основания, $c(h)$ — определенная постоянная, причем $c(^2/_3)=0$, $c(1)=1/(4\pi)$ и $c(h)>0$ при $^2/_3<h\leqslant 1$. Последнее ограничение на h будем считать в дальнейшем всюду соблюденным.

Сравнением асимптотик левых и правых частей (3.1) при $x^2+y^2\to\infty$ находим, что должно быть

$$f(x,\ y)\backsim\delta-AP^\gamma(x^2+y^2)^{^1/_2-\gamma},\quad x^2+y^2\to\infty$$

откуда фактически определяется δ.

Далее, в интегральном уравнении (3.1) перейдем к безразмерным величинам и затем к его обеим частям применим интегральное преобразование Фурье по переменной x. В результате придем к следующему одномерному интегральному уравнению:

$$\left(\int_{-\infty}^{-1}+\int_1^\infty\right)\frac{K_\mu(|s|\,|\bar y-\bar\eta|)}{|\bar y-\bar\eta|^\mu}\,\varphi_s(\bar\eta)\,d\bar\eta=f_s(\bar y),\quad |\bar y|>1 \tag{3.2}$$

$$\varphi_s(y)=\int_{-\infty}^\infty\varphi(\bar x,\bar y)\,e^{i\bar x s}d\bar x,\quad g_s(\bar y)=\int_{-\infty}^\infty g(\bar x,\bar y)\,e^{is\bar x}d\bar x$$

$$f_s(\bar y)=\pi^{-^1/_2}2^{\mu-1}\Gamma(\mu+{}^1/_2)\,|s|^{-\mu}g_s(\bar y)$$
$$x,\ y;\ \xi,\ \eta=a\bar x,\ a\bar y;\quad a\bar\xi,\ a\bar\eta,\ \mu=(1-h)/2$$
$$\varphi(\bar x,\bar y)=A^h p(a\bar x,a\bar y),\qquad g(\bar x,\bar y)=[\delta_0-f_0(\bar x,\ \bar y)]^h$$
$$\delta_0=\delta/a,\quad f_0(\bar x,\ \bar y)=f(a\bar x,\ a\bar y)/a$$

После решения уравнения (32) образы Фурье $w_s(\bar y)$ обобщенных вертикальных перемещений $w(\bar x,\ \bar y)=[-a^{-1}u_z(a\bar x,\ a\bar y)]^h$ ($u_z(x,\ y)$ — истинные вертикальные перемещения) граничных точек полупространства вне штампов будут выражаться формулой

$$w_s(\bar y)=\left(\int_{-\infty}^{-1}+\int_1^\infty\right)\frac{K_\mu(|s|\,|\bar y-\bar\eta|)}{|\bar y-\bar\eta|^\mu}\,\psi_s(\bar\eta)\,d\bar\eta,\quad |\bar y|<1 \tag{3.3}$$

$$\psi_s(\bar y)=\sqrt{\pi}\,2^{1-\mu}\,|s|^\mu\varphi_s(\bar y)/\Gamma(\mu+{}^1/_2)$$

Теперь, рассматривая симметрический случай загружения штампов, решение уравнения (3.2) представим в виде

$$\varphi_s(\bar y)=(\bar y^2-1)^{-\varkappa/2}\int_0^\infty\Phi_s^{\varkappa}(\tau)\,S_\nu^{\varkappa(3)}(\bar y,\theta)\,d\tau,\quad \bar y>1 \tag{3.4}$$

где $\Phi_s^{\varkappa}(\tau)$ — пока неизвестная функция. Это выражение $\varphi_s(\bar{y})$ подставим в (3.2), поменяем порядок интегрирования и воспользуемся соотношением (1.19) со знаком плюс. Будем иметь

$$(\bar{y}^2-1)^{\varkappa/2}\int_0^\infty \lambda_{\nu,\varkappa}^{+}\Phi_s^{\varkappa}(\tau)\, S_\nu^{\varkappa(3)}(\bar{y},\theta)\,d\tau = f_s(\bar{y}),\ \bar{y}>1$$

Отсюда по формуле (2.10), в которой заменим $\operatorname{ch} y$ на $\bar{y}$, получим

$$\Phi_s^{\varkappa}(\tau) = (\lambda_{\nu,\varkappa}^{+})^{-1}\sigma(\tau)\,\tau\int_0^\infty(\bar{y}^2-1)^{-\varkappa/2}f_s(\bar{y})\,S_\nu^{\varkappa(3)}(\bar{y},\theta)\,d\bar{y} \tag{3.5}$$

Таким образом, решение уравнения (3.2) в симметрическом случае дается формулами (3.4)—(3.5).

Наконец, подставляя $\varphi_s(\bar{y})$ из (3.4) в (3.3) и принимая во внимание (1.21) со знаком плюс, находим $(0<\bar{y}<1)$

$$w_s(\bar{y}) = (1-\bar{y}^2)^{\varkappa/2}\int_0^\infty C_\nu^{\varkappa}(s,\theta)\,\Phi_s^{\varkappa}(\tau)\,H_{\nu,\varkappa}^{+}(\arccos\bar{y})\,d\tau$$

$$C_\nu^{\varkappa}(s,\theta) = \sqrt{\pi}\,2^{\varkappa+1/2}h_{\nu,\varkappa}^{+}|s|^{1/2-\varkappa}[\Gamma(1-\varkappa)]^{-1}$$

Следует подчеркнуть, что в разбираемом случае в выражениях $\lambda_{\nu,\varkappa}^{+}$ и $h_{\nu,\varkappa}^{+}$ из (1.19) и (1.21), соответственно, необходимо формально положить $a=1$.

Отметим, что изложенные здесь результаты могут быть применены к довольно большому числу контактных и смешанных задач теории упругости, а также к разнообразным смешанным задачам математической физики. На этом пути возникает необходимость табулирования функций $S_\nu^{\varkappa(3)}(x,\theta)$ $(0\leqslant x<\infty)$ и $G_{\nu,\varkappa}^{\pm}(\arccos x)$ $(|x|<1)$, чего можно достичь при помощи аппарата непрерывных дробей [10—12].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Раков А. X.*, *Рвачев В. Л.* Контактная задача теории упругости для полупространства, модуль упругости которого есть степенная функция глубины.— Докл. АН УССР, 1961, № 3, с. 286—290.
2. *Титчмарш Э. Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1960, 278 с.
3. *Арутюнян Н. X.* Плоская контактная задача теории ползучести.— ПММ, 1959, т. 23, вып. 5, с. 901—924.
4. *Попов Г. Я.* Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. Киев — Одесса: Вища школа, 1982. 167 с.
5. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
6. *Belward J. A.* On the relationship of some Fredholm integral equations of the first kind to a family of boundary value problems.— J. Math. Analysis and Appl., 1974 v. 48, No. 1, p. 184—199.
7. *Александров В. М.*, *Коваленко Е. В.*, *Мхитарян С. М.* Об одном методе получения спектральных соотношений для интегральных операторов смешанных задач механики сплошных сред.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 6, с. 1023—1031.
8. *Мхитарян С. М.* О двух спектральных соотношениях для интегральных операторов на полубесконечном интервале и их приложении к смешанным задачам.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 1, с. 63—72.
9. *Мхитарян С. М.* О некоторых спектральных соотношениях, связанных с интегральным уравнением Карлемана, и их приложениях к контактным задачам.— ПММ, 1983, т. 47, вып. 2, с. 219—227.
10. *Бейтмен Г.*, *Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1967. 299 с.
11. *Meixner J.* Klassifikation, Bezeichnung und Eigenschaften der Sphäroidfunktionen.— Math. Nachr., 1951, B. 5, S. 1—18.
12. *Meixner J.*, *Schäfke F. W.* Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen mit Anwendungen auf physikalische und technische Probleme. B.— Heidelberg: Springer, 1954. 414 S.
13. *Бейтмен Г.*, *Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М. : Наука, 1973. 294 с.
14. *Magnus W.*, *Oberhettinger F.*, *Soni R. P.* Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics. B.— Heidelberg — N. Y.: Springer, 1966. 508 p.

Ереван

Поступила в редакцию
18.VII.1983