УДК 539.3

# ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА СО СТЕПЕННЫМ ЯДРОМ И ЕГО ПРИМЕНЕНИИ К КОНТАКТНЫМ ЗАДАЧАМ

Бородачев А. Н.

Предлагается основанный на теореме Гобсона [1] метод построения точных решений определенного на эллиптической площадке интегрального уравнения первого рода со степенным (полярным) ядром и полиномиальной правой частью. Приводятся в явном замкнутом виде решения этого уравнения, имеющие различные асимптотические разложения в окрестности граничного эллипса. В качестве примера рассматривается задача о давлении жесткого эллиптического цилиндра с произвольной полиномиальной формой основания на неоднородное ($\nu = \text{const}$, $E = E_\alpha x_3{}^\alpha$) упругое полупространство.

Ранее Н. А. Ростовцев [2, 3] указал только функциональный вид неограниченного решения указанного уравнения, но не получил в замкнутой форме соотношения для определения входящих в это решение постоянных коэффициентов. Решение для случая, когда правая часть интегрального уравнения — полином нулевой степени, содержится в [4]. Результаты исследования определенных на круговой и на полосовой площадках интегральных уравнений первого рода со степенным ядром изложены в [4, 5].

Использование теоремы Гобсона и полученных ниже линейных рекуррентных соотношений для обобщенных потенциальных факторов эллиптического диска позволяет, помимо прочего, полностью отказаться от привлечения введенного в [3] громоздкого аппарата функций, родственных эллипсоидальным функциям Ламе.

1. Точки вещественного евклидова пространства $R^3$ будем обозначать $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, а точки $R^2$ — $\mathbf{x}_0 = (x_1, x_2)$ и $\mathbf{y}_0 = (y_1, y_2)$. Пусть $R^2 \supset \Omega = \{\mathbf{x}_0\colon x_1{}^2/a_1{}^2 + x_2{}^2/a_2{}^2 \leqslant 1\}$. Рассмотрим следующее двумерное интегральное уравнение первого рода со степенным ядром относительно функции $p(\mathbf{x}_0)$:

$$\gamma \mathbf{U}_\xi p(\mathbf{x}_0) = q(\mathbf{x}_0), \quad \mathbf{x}_0 \in \Omega \tag{1.1}$$

$$\mathbf{U}_\xi p(\mathbf{x}) = \iint_\Omega |\mathbf{x} - \mathbf{y}_0|^{-\xi} p(\mathbf{y}_0)\, d\mathbf{y}_0$$

где функция $q$ и постоянная $\gamma$ предполагаются известными, а параметр $\xi$ принимает произвольные значения из интервала (0, 2). К интегральным уравнениям с такими операторами приводятся краевые задачи для уравнений эллиптического типа.

Интегральный оператор $\mathbf{U}_\xi$ является обобщенным потенциалом (или потенциалом Рисса) с плотностью $p$, распределенной по эллиптическому диску $\Omega$. Свойства операторов $\mathbf{U}_\xi$, действующих в пространствах суммируемых функций, обсуждались в [6].

Значения интеграла $\mathbf{U}_\xi p(\mathbf{x})$ в точках $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ определяют внутренний обобщенный потенциал эллиптического диска, который будем обозначать $\mathbf{U}_\xi{}^\Omega p(\mathbf{x}_0)$.

Далее будем считать, что

$$q(\mathbf{x}_0) = Q_l(\mathbf{x}_0) \equiv \sum_{m+n=0}^{l} q_{mn} x_1{}^m x_2{}^n \quad (q_{mn} = \text{const}) \tag{1.2}$$

где $l$ — произвольное целое неотрицательное число. Такое предположение является достаточно общим, так как, к примеру, любую функцию $q \in C^k(\Omega)$ можно равномерно аппроксимировать с помощью полиномов, так, чтобы и производные от $q$ до $k$-го порядка равномерно аппроксимировались производными соответствующего порядка от этих полиномов [7].

Интегральное уравнение (1.1) записывается при этом следующим образом:

$$\mathrm{U}_{\xi}^{\Omega} p(\mathbf{x}_0) = \gamma^{-1} Q_l(\mathbf{x}_0) \tag{1.3}$$

Его решение эквивалентно такому выбору плотности $p$, при котором внутренний обобщенный потенциал эллиптического диска обращается в заданный полином $\gamma^{-1}Q_l$. Основной результат, относящийся к обобщенным потенциалам эллиптического диска, был получен Гобсоном [1]. Установленная им теорема позволяет сводить двукратные интегралы $\mathrm{U}_{\xi} p(\mathbf{x})$ к сумме (в общем случае бесконечной) однократных интегралов.

Используя эту теорему и опуская громоздкие промежуточные вычисления, можно показать, что если

$$p^{(k)}(\mathbf{x}_0) = \left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2}\right)^{k+\xi/2-1} \sum_{m+n=0}^{l-2k} p_{mn}^{(k)} x_1^m x_2^n \tag{1.4}$$

где $p_{mn}^{(k)}$ — произвольные постоянные ($k = 0, 1, \ldots, [l/2]$), то

$$\mathrm{U}_{\xi}^{\Omega} p(\mathbf{x}_0; k) = \sum_{m+n=0}^{l} u_{mn}^{(k)}(p_{vw}^{(k)}) x_1^m x_2^n \tag{1.5}$$

$$u_{mn}^{(k)}(p_{vw}^{(k)}) = \frac{(\xi/2)_k}{k!} \sum_{r=0}^{[l/2]-k} \frac{2^{1-2r}}{r!\,(k+1)_r} \times$$

$$\times \sum_{\substack{i=0\\(i,\, j \in J)}}^{[m/2]} \sum_{j=0}^{[n/2]} (-1)^{i+j} C_{k+r}^{i} C_{k+r-i}^{j} \sum_{s=0}^{r} C_r^s (m-2i+1)_{2r-2s} \times$$

$$\times (n-2j+1)_{2s} a_1^{2(M-i)} a_2^{2(N-j)} B_{M,\, N,\, r}^{(\xi)} p_{2M-m,\, 2N-n}^{(k)}$$

Здесь $[l/2]$ — целая часть числа $l/2$, $(m)_r$ — символ Похгаммера, $C_k^i$ — биномиальный коэффициент, $M = m - i + r - s$, $N = n - j + s$, $J = \{i, j\colon k + r - {}^1/_2 (l - m - n) \leqslant i + j \leqslant k + r\}$, а также

$$B_{m,\, n,\, r}^{(\xi)} = \frac{\pi a_1 a_2}{2} \int_0^{\infty} \frac{\theta^{r-\xi/2} d\theta}{(a_1^2 + \theta)^{m+1/2} (a_2^2 + \theta)^{n+1/2}} \tag{1.6}$$

Итак, если плотность обобщенного потенциала имеет вид (1.4), то интегральное уравнение (1.3) сводится к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно постоянных $p_{vw}^{(k)}$:

$$u_{mn}^{(k)}(p_{vw}^{(k)}) = \gamma^{-1} q_{mn} \quad (m + n = 0, 1, \ldots, l) \tag{1.7}$$

Система (1.7) состоит из $t = {}^1/_2 (l + 1)(l + 2)$ уравнений и содержит $t_k = {}^1/_2 (l - 2k + 1)(l - 2k + 2)$ неизвестных, так что $t \geqslant t_k$ и знак равенства имеет место только при $k = 0$. Поэтому решение этой системы, а следовательно, и интегрального уравнения (1.3) при произвольных значениях постоянных $q_{mn}$ можно построить лишь в том случае, когда $k = 0$. Для существования решения типа (1.4) при $k > 0$ необходимо (и достаточно), чтобы постоянные $q_{mn}$ удовлетворяли набору вытекающих из (1.7) соотношений, количество которых равно $t - t_k$.

Функциями $p^{(k)}(\mathbf{x}_0)$ ($k = 0, 1, \ldots, [l/2]$) определяются все возможные решения интегрального уравнения (1.3). Ранее Н. А. Ростовцев [2, 3] указал только функциональный вид решения $p^{(0)}(\mathbf{x}_0)$, но не получил в замкнутой форме систему алгебраических уравнений относительно постоянных $p_{vw}^{(0)}$.

**2.** При нахождении коэффициентов системы (1.7) необходимо вычислять несобственные однократные интегралы $B_{m,n,r}^{(\xi)}$, которые будем называть обобщенными внутренними потенциальными факторами эллиптического диска. Наиболее рациональный способ их вычисления заключается в использовании формул приведения.

Непосредственной проверкой устанавливается справедливость следующих рекуррентных соотношений:

$$B_{m,n,r}^{(\xi)} = B_{m-1,n,r-1}^{(\xi)} - a_1^2 B_{m,n,r-1}^{(\xi)} \tag{2.1}$$
$$B_{m,n,r}^{(\xi)} = B_{m,n-1,r-1}^{(\xi)} - a_2^2 B_{m,n,r-1}^{(\xi)}$$

которые позволяют представить произвольный фактор $B_{m,n,r}^{(\xi)}$ в виде линейной комбинации факторов $B_{v,w,0}^{(\xi)} \equiv B_{v,w}^{(\xi)}$.

Также непосредственно проверяется соотношение

$$(a_1^2 - a_2^2) B_{m,n}^{(\xi)} = B_{m-1,n}^{(\xi)} - B_{m,n-1}^{(\xi)} \tag{2.2}$$

имеющее место при $m \neq 0$ и $n \neq 0$.

Использование формулы Эйлера для однородных функций приводит к важному вспомогательному результату

$$(2m + 1)\, a_1^2 B_{m+1,n}^{(\xi)} + (2n + 1)\, a_2^2 B_{m,n+1}^{(\xi)} = (2m + 2n + \xi)\, B_{m,n}^{(\xi)} \tag{2.3}$$

Из (2.2) и (2.3) вытекают соотношения

$$(2m + 3)\, a_1^2 (a_1^2 - a_2^2)\, B_{m+2,0}^{(\xi)} = -(2m + \xi)\, B_{m,0}^{(\xi)} + \tag{2.4}$$
$$+ [a_1^2 (4m + \xi + 3) - a_2^2 (2m + \xi + 1)]\, B_{m+1,0}^{(\xi)}$$
$$(2n + 3)\, a_2^2 (a_1^2 - a_2^2)\, B_{0,n+2}^{(\xi)} = (2n + \xi)\, B_{0,n}^{(\xi)} +$$
$$+ [a_1^2 (2n + \xi + 1) - a_2^2 (4n + \xi + 3)]\, B_{0,n+1}^{(\xi)}$$

завершающие систему формул приведения.

Рекуррентные соотношения (2.1), (2.2) и (2.4) позволяют представить произвольный внутренний потенциальный фактор в виде линейной комбинации трех основных факторов $B_{1,0}^{(\xi)}$, $B_{0,1}^{(\xi)}$ и $B_{0,0}^{(\xi)}$, которые, однако, не являются независимыми. Связывающее их уравнение получаем из (2.3) при $m = n = 0$. Поэтому для эффективного вычисления интегралов $B_{m,n,r}^{(\xi)}$ достаточно составить таблицу значений любых двух из трех основных факторов для различных отношений $a_2/a_1$.

При $\xi = 1$, когда обобщенный потенциал переходит в гармонический потенциал простого слоя, внутренние потенциальные факторы эллиптического диска приводятся к полным эллиптическим интегралам первого и второго рода [8].

**3.** В контактных задачах выбор вида решения интегрального уравнения (1.3) часто определяется априорным знанием характера асимптотического поведения решения в окрестности граничного эллипса $\Gamma = \{\mathbf{x}_0\colon x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2 = 1\}$, или, в параметрической форме, $\Gamma = \{\mathbf{x}_0\colon x_1 = a_1 \cos\varphi,\ x_2 = a_2 \sin\varphi\}$, где $\varphi$ — параметрический угол эллипса.

Очевидно, что решение $p^{(0)}(\mathbf{x}_0)$ имеет особенность в точках граничного эллипса, а решения $p^{(k)}(\mathbf{x}_0)$ при $k > 0$ обращаются в этих точках в нуль.

Определенный интерес представляет более детальное исследование асимптотического поведения решений интегрального уравнения (1.3).

Для точек $x_0 \in \Omega$ справедливы следующие представления [9]:

$$x_1 = (a_1 - \rho \varkappa_1 \Psi^{-1}) \cos \varphi, \quad x_2 = (a_2 - \rho \Psi^{-1}) \sin \varphi \tag{3.1}$$

$$\Psi = (1 - \varkappa^2 \cos^2 \varphi)^{1/2}, \quad \varkappa_1 = a_2/a_1, \quad \varkappa^2 = 1 - \varkappa_1^2$$

где $\rho$ — расстояние до Г. Подставляя (3.1) в (1.4), получаем

$$p^{(k)} (\rho) = (2\rho)^{k+\xi/2-1} L_k (\varphi) + O (\rho^{k+\xi/2}), \quad \rho \to 0 \tag{3.2}$$

Функция $L_k (\varphi)$ — коэффициент при главном члене асимптотического разложения решения интегрального уравнения (1.3) и определяет локальное поведение решения $p^{(k)} (x_0)$ в окрестности Г. Имеем

$$L_k (\varphi) = \lim_{\rho \to 0} (2\rho)^{1-k-\xi/2} p^{(k)} (\rho) = \tag{3.3}$$

$$= \left( \frac{\Psi}{a_2} \right)^{k+\xi/2-1} \sum_{m+n=0}^{l-2k} p_{mn}^{(k)} (a_1 \cos \varphi)^m (a_2 \sin \varphi)^n$$

Заметим, что функция $\Psi$ допускает две простые геометрические интерпретации, а именно

$$\Psi = a_1^{-2/3} a_2^{1/3} R^{1/3} = a_2^{-1} n$$

где $R$ — радиус кривизны, а $n$ — длина отрезка нормали для эллипса Г.

4. В качестве примера рассмотрим задачу о давлении (при отсутствии сил трения) жесткого эллиптического цилиндра с полуосями $a_1$ и $a_2$ на неоднородное изотропное полупространство $x_3 \geqslant 0$, коэффициент Пуассона $\nu$ которого — постоянный, а модуль упругости изменяется с глубиной по степенному закону $E = E_\alpha x_3^\alpha$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$. Упругое полупространство с такими характеристиками иногда называют квазиклассическим основанием [5].

Функцию, описывающую форму основания штампа, принимаем в виде

$$f (x_0) = Q_l^\circ (x_0) \equiv \sum_{m+n=2}^{l} \mathring{q}_{mn} x_1^m x_2^n, \quad x_0 \in \Omega \tag{4.1}$$

Определение контактного давления $p = -\sigma_{33}$ сводится при этом к решению интегрального уравнения (1.3), в котором следует положить (см. [5, 10]) $\xi = \alpha + 1$ и

$$\gamma = \frac{D \Gamma (1/2 + \alpha/2)}{2\pi^{1/2} \Gamma (1 + \alpha/2)}, \quad D = \frac{(1 - \nu^2) C \eta}{\pi (1 + \alpha) E_\alpha \Gamma (\alpha + 2)} \sin \frac{\pi \eta}{2}$$

$$C = 2^{1+\alpha} \Gamma (1/2 (\alpha + \eta + 3)) \, \Gamma (1/2 (\alpha - \eta + 3))$$

$$\eta^2 = 1 + \alpha - \alpha (1 + \alpha) \nu (1 - \nu)^{-1}, \quad q_{0,0} = \delta$$

$$q_{1,0} = -\beta_2, \quad q_{0,1} = \beta_1, \quad q_{mn} = -q_{mn}^\circ \; (m + n > 1)$$

Заранее неизвестные постоянные $\delta$, $\beta_1$, $\beta_2$ обозначают поступательное перемещение и проекции вектора поворота штампа, $\Gamma (\alpha)$ — гамма-функция.

Главный вектор и главные моменты приложенных к штампу сил имеют вид

$$P = \iint_\Omega p \, dx_0, \quad M_1 = \iint_\Omega x_2 p \, dx_0, \quad M_2 = -\iint_\Omega x_1 p \, dx_0 \tag{4.2}$$

и предполагаются известными.

В качестве решения интегрального уравнения (1.3), имеющего особенность в точках $x_0 \in \Gamma$, выбираем

$$p^{(0)} (x_0) = \left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2}\right)^{1/2(\alpha-1)} \sum_{m+n=0}^{l} p_{mn}^{(0)} x_{1m} x_2^n \tag{4.3}$$

что приводит к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно $\delta$, $\beta_1$, $\beta_2$ и $p_{vw}^{(0)}$:

$$u_{mn}^{(0)}(p_{vw}^{(0)}) = \gamma^{-1}q_{mn}\ (m+n=0, 1, .., l) \tag{4.4}$$

Условия равновесия штампа (4.2) дают еще три линейных алгебраических уравнения относительно $p_{vw}^{(0)}$

$$P = \sum_{m+n=0}^{[l/2]} t_{2m,\,2n}p_{2m,\,2n}^{(0)}, \quad M_1 = \sum_{m+n=0}^{[{}^1/_2(l-1)]} t_{2m,\,2n+2}p_{2m,\,2n+1}^{(0)} \tag{4.5}$$

$$M_2 = -\sum_{m+n=0}^{[{}^1/_2(l-1)]} t_{2m+2,\,2n}p_{2m+1,\,2n}^{(0)}$$

$$t_{2m,\,2n} = \frac{\pi a_1^{2m+1}a_2^{2n+1}(2m-1)!!\,(2n-1)!!}{2^{m+n}(\xi/2)_{m+n+1}}$$

Таким образом, если в квазиклассическое основание вдавливается жесткий эллиптический цилиндр, поверхность основания которого описывается формулой (4.1), то контактное давление имеет вид (4.3), а постоянные $p_{vw}^{(0)}$ и параметры $\delta$, $\beta_1$, $\beta_2$ находятся из системы линейных алгебраических уравнений (4.4) и (4.5). Сформулированный результат обобщает теорему Н. А. Ростовцева [2, 3].

Решение соответствующей контактной задачи для однородного полупространства с модулем упругости $E$ получаем в качестве частного случая при $\alpha = 0$, когда $\xi = 1$ и $\gamma = (1-\nu^2)(\pi E)^{-1}$.

Следует отметить, что к интегральному уравнению типа (1.3) приводится также решение соответствующей контактной задачи нелинейной установившейся ползучести со степенным законом связи между интенсивностями напряжений и скоростями деформации, получаемое в рамках принципа суперпозиции «обобщенных» перемещений [11] (некоторые ограничения такого подхода указаны в [12]).

5. Пусть в неоднородное полупространство внедряется жесткий эллиптический цилиндр с плоским основанием под действием центральной силы $P$. В этом случае на основании результатов п. 4 для контактного давления и осадки штампа имеем

$$p^{(0)}(\mathbf{x}_0) = \frac{(1+\alpha)P}{2\pi a_1 a_2}\left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2}\right)^{{}^1/_2(\alpha-1)} \tag{5.1}$$

$$\delta = (1+\alpha)\,\gamma P\,(\pi a_1 a_2)^{-1}B_{0,0}^{(\xi)}$$

что совпадает с решением, полученным другим способом в [4].

Рассмотрим также задачу о центральном вдавливании в неоднородное полупространство жесткого эллиптического цилиндра, форма основания которого описывается функцией

$$f(\mathbf{x}_0) = \mathring{q}_{2,0}x_1^2 + \mathring{q}_{0,2}x_2^2, \quad \mathbf{x}_0 \in \Omega \tag{5.2}$$

Используя результаты п. 4, находим, что в данном случае контактное давление определяется формулой

$$p^{(0)}(\mathbf{x}_0) = (p_{0,0}^{(0)} + p_{2,0}^{(0)}x_1^2 + p_{0,2}^{(0)}x_2^2)\left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2}\right)^{{}^1/_2(\alpha-1)} \tag{5.3}$$

а входящие в (5.3) постоянные и осадка штампа удовлетворяют соотношениям

$$(2a_1^4B_{2,0,0}^{(\xi)} - a_1^2B_{2,0,1}^{(\xi)})\,p_{2,0}^{(0)} - a_2^2B_{1,1,1}^{(\xi)}p_{0,2}^{(0)} = -\gamma^{-1}q_{2,0}^0 \tag{5.4}$$

$$(2a_2^4B_{0,2,0}^{(\xi)} - a_2^2B_{0,2,1}^{(\xi)})\,p_{0,2}^{(0)} - a_1^2B_{1,1,1}^{(\xi)}p_{2,0}^{(0)} = -\gamma^{-1}q_{0,2}^0$$

$$t_{0,0}p_{0,0}^{(0)} = P - t_{2,0}p_{2,0}^{(0)} - t_{0,2}p_{0,2}^{(0)}$$

$$\gamma^{-1}\delta = 2B_{0,0,0}^{(\xi)}p_{0,0}^{(0)} + a_1^2B_{1,0,1}^{(\xi)}p_{2,0}^{(0)} + a_2^2B_{0,1,1}^{(\xi)}p_{0,2}^{(0)}$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Hobson E. W.* On some general formulae for the potentials of ellipsoids, shells and discs.— Proc. London Math. Soc., 1896, v. 27, p. 519—544.
2. *Ростовцев Н. А.* Об одном интегральном уравнении, встречающемся в задаче о давлении жесткого фундамента на неоднородный грунт.— ПММ, 1961, т. 25, вып. 1, с. 164—168.
3. *Ростовцев Н. А.* О некоторых решениях интегрального уравнения теории линейно-деформируемого основания.— ПММ, 1964, т. 28, вып. 1, с. 111—127.
4. *Рвачев В. Л., Проценко В. С.* Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. Киев: Наук. думка, 1977. 235 с.
5. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
6. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966. 499 с.
7. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 1. М.— Л.: Гостехтеоретиздат, 1951. 476 с.
8. *Бородачев А. Н.* Определение коэффициентов интенсивности напряжений для плоской эллиптической трещины при произвольных граничных условиях.— Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 2, с. 63—69.
9. *Си Г., Либовиц Г.* Математическая теория хрупкого разрушения.— В кн.: Разрушение. Т. 2. М.: Мир, 1975, с. 83—203.
10. *Ростовцев Н. А.* К теории упругости неоднородной среды.— ПММ, 1964, т. 28, вып. 4, с. 601—611.
11. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории ползучести.— ПММ, 1959, т. 23, вып. 5, с. 901—924.
12. *Александров В. М., Сумбатян М. А.* Об одном решении контактной задачи нелинейной установившейся ползучести для полуплоскости.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 1, с. 107—113.

Поступила в редакцию 5.XII.1983

Киев