Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 5, 1984

УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ДВОЙСТВЕННОСТИ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ ФОРМЫ УПРУГИХ ТЕЛ

Петухов Л. В., Репин С. И.

Предлагается метод построения оценок величины глобального экстремума в задачах оптимизации формы пластин и трехмерных тел. Это позволяет оценить предельные возможности оптимизации. В некоторых случаях удается построить управления, для которых значения функционала цели близки, а иногда и равны величине глобального экстремума.

1. Свободные колебания тонких пластин. Пусть имеется область $\Omega \in R^2$ с кусочно-гладкой границей $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$. Частота свободных колебаний ω пластины толщины h определяется следующими соотношениями:

$$\omega^2 = \min_{w \in V} \Phi(h, w); \quad \Phi(h, w) = \Pi(h, w)/T(h, w) \tag{1.1}$$

$$\Pi(h, w) = \int_\Omega Dh^3 \psi(x, y)\, d\Omega; \quad T(h, w) = \int_\Omega \rho h \varphi(x, y)\, d\Omega$$

$$D = E/(12(1 - \nu^2)), \quad \varphi = w^2, \quad \psi = (\Delta w)^2 - 2(1 - \nu) \cdot$$
$$\cdot (w_{,xx} w_{,yy} - w^2{}_{,xy})$$
$$V = \{v \mid v \in W_2{}^2(\Omega); \quad v = v_{,n} = 0 \text{ на } \Gamma_1, \quad v = 0 \text{ на } \Gamma_2\}$$

Здесь E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, ρ — плотность, w — прогиб, x, y — декартовы координаты точки, а через $v_{,n}$ обозначена производная по нормали к контуру Γ. Задача оптимизации состоит в том, что необходимо найти h^* и w^*, такие, что

$$\Phi(h^*, w^*) = \sup_{h \in H} \inf_{w \in V} \Phi(h, w) \tag{1.2}$$

$$H = \left\{ h \in L_\infty(\Omega) \,\Big|\, \int_\Omega h\, d\Omega = h_3 \operatorname{mes} \Omega, \ h_1 \leqslant h \leqslant h_2 \right\}$$

$$h_2 > h_3 > h_1 > 0$$

Через $\operatorname{mes} \Omega$ обозначена лебегова мера области Ω.

Известно, что в задачах такого типа наряду с кусочно-гладкими решениями [1—4] возможно существование обобщенных решений [5, 6]. Кроме того, задача (1.2) невыпукла, поэтому различные численные алгоритмы часто приводят лишь к локально-оптимальным решениям [7, 8]. Можно, однако, попытаться найти функцию $h \in H$, для которой значение функционала цели меньше супремума на некоторую малую величину ε. Для этого необходимо оценить значение супремума, что может быть сделано при помощи двойственной задачи.

Двойственной к исходной называется следующая задача [9]: найти h^*, w^*, такие, что

$$\Phi(h^*, w^*) = \inf_{w \in V} \sup_{h \in H} \Phi(h, w) \tag{1.3}$$

Очевидно, что справедливы неравенства

$$\sup_{w \in V} \inf_{h \in H} \Phi(h, w) \leqslant \inf_{h \in H} \sup_{w \in V} \Phi(h, w) \tag{1.4}$$

которые могут быть использованы для построения оценки сверху величины супремума в задаче (1.2). Обозначим

(1.5) $$Q_0 = \sup_{h \in H} \Phi(h, w_0), \; w_0 \in V$$

В силу (1.3), (1.4) Q_0 является оценкой сверху. Для нахождения Q_0 необходимо построить функцию h_0, такую, что $\Phi(h_0, w_0) = Q_0$.

Утверждение 1. Промежуточный режим $h_1 < h < h_2$ в задаче (1.5) невозможен.

Доказательство. Пусть $h_0 = h_0(x, y)$ — решение (1.5). Предположим, что имеется подобласть $\Omega_1 \subset \Omega$, $\mathrm{mes}\,\Omega_1 > 0$, такая, что $h_1 < h_0 < h_2$, если $(x, y) \in \Omega_1$. Выберем Ω_1' и Ω_1'' такие, что $\Omega_1 = \Omega_1' \cup \Omega_1''$, $\Omega_1' \cap \Omega_1'' = \varnothing$, $\mathrm{mes}\,\Omega_1' = \mathrm{mes}\,\Omega_1''$, и построим функцию h_δ. Положим $h_\delta = h_0$ в $\Omega \setminus \Omega_1$; $h_\delta = h_0 - \delta$ в Ω_1'; $h_\delta = h_0 + \delta$ в Ω_1'' ($\delta = \mathrm{const}$).

Можно показать, что

(1.6) $$\Phi(h_\delta, w_0) - \Phi(h_0, w_0) = [-\delta\Delta + 3\delta^2 T\Pi_2 + T\Pi_3\delta^3] \times [T^2 - \delta T T_1]^{-1}$$

$$\Delta = T_1\Pi - 3\Pi_1 T, \quad \Pi = \Pi(h_0, w_0), \quad T = T(h_0, w_0)$$

$$T_1 = \int_{\Omega_1'} \varphi\, d\Omega - \int_{\Omega_1''} \varphi\, d\Omega, \quad \Pi_1 = \int_{\Omega_1'} h_0^2\psi\, d\Omega - \int_{\Omega_1''} h_0^2\psi\, d\Omega$$

$$\Pi_2 = \int_{\Omega_1} h_0\psi\, d\Omega, \quad \Pi_3 = \int_{\Omega_1'} \psi\, d\Omega - \int_{\Omega_1''} \psi\, d\Omega$$

Если $\Delta = 0$, то при малых δ правая часть равенства (1.6) положительна. Если $\Delta \neq 0$, то, выбирая $\delta > 0$ или $\delta < 0$ в зависимости от знака Δ, получим, что правая часть (1.6) может быть сделана положительной при достаточно малых δ. Это противоречит тому, что h_0 — решение (1.5).

Следствие. Введем новую функцию управления $\mu = (h_2 - h)/(h_2 - h_1)^{-1}$ ($\mu = 1$, если $h = h_1$ и $\mu = 0$, если $h = h_2$). Тогда

(1.7) $$Q_0 = \sup_{\mu \in M} \Phi(\mu, w_0)$$

$$\Phi(\mu, w_0) = \int_\Omega (A\mu + B)\psi(w_0)\, d\Omega \times \left[\int_\Omega (C\mu + D)\varphi(w_0)\, d\Omega\right]^{-1}$$

$$A = h_1^3 - h_2^3, \; B = h_2^3, \; C = h_1 - h_2, \; D = h_2$$

Здесь M — множество функций, которые в каждой точке области Ω могут принимать только значения 0 или 1 и удовлетворяют изопериметрическому условию

$$\int_\Omega (\mu h_1 + (1 - \mu) h_2)\, d\Omega = h_3\, \mathrm{mes}\,\Omega$$

Обозначим через N замыкание множества M в $*$-слабой топологии пространства $L_\infty^*(\Omega)$

$$N = \left\{\mu \in L_\infty(\Omega) \mid 0 \leqslant \mu \leqslant 1, \; \int_\Omega (\mu h_1 + (1 - \mu) h_2)\, d\Omega = h_3\, \mathrm{mes}\,\Omega\right\}$$

Очевидно

(1.8) $$Q_0 = \sup_{\mu \in N} \Phi(\mu, w_0)$$

Утверждение 2. Задача (1.8) имеет решение, т. е. существует функция $\mu_0 \in N$, на которой функционал Φ достигает своей точной верхней грани.

Доказательство. Пусть $\{\mu_n\}$ — максимизирующая последовательность, т. е. $\Phi(\mu_n, w_0) \to Q_0$ при $n \to \infty$. Она равномерно ограничена, поэтому можно выделить подпоследовательность, также максимизирующую и сходящуюся к некоторой функции $\mu_0 \in N$ в $*$-слабой топологии L_∞ [9]. Переходя в (1.8) к пределу, имеем $\Phi(\mu_n, w_0) \to \Phi(\mu_0, w_0)$, $n \to \infty$, откуда следует, что $\Phi(\mu_0, w_0) = Q_0$.

Утверждение 3. Функция μ_0, сообщающая максимум функционалу $\Phi(\mu, w_0)$, принимает только два значения 0 и 1, причем если Ω_0, Ω_1 — соответственно подобласти, где $\mu_0 = 0$ и $\mu_0 = 1$, то

$$R(x, y) \geqslant R(\xi, \eta),\ \forall (x, y) \in \Omega_1,\ \forall (\xi, \eta) \in \Omega_0 \tag{1.9}$$
$$R(u, v) = \psi(u, v) - Q_0\varphi(u, v)/(h_1^2 + h_1h_2 + h_2^2)$$

Доказательство того, что μ_0 не принимает промежуточных значений, аналогично доказательству утверждения 1.

Рассмотрим две последовательности подобластей $\{\omega_k^+\} \in \Omega_1$, $\{\omega_k^-\} \in \Omega_0$; $\operatorname{mes}\omega_k^+ = \operatorname{mes}\omega_k^-$ $(k = 1, 2, \ldots)$, причем

$$\omega_k^+ \in S(x, y, \rho_k),\quad \omega_k^- \in S(\xi, \eta, \rho_k),\quad \rho_k \to 0,\ k \to \infty$$
$$S(u, v, \rho) = \{(x, y) \in \Omega \mid (x - u)^2 + (y - v)^2 \leqslant \rho^2\}$$

Построим последовательность управлений

$$\mu_k = \begin{cases} \mu_0 & \text{в } \Omega \diagdown (\omega_k^+ \cup \omega_k^-) = \Omega_k \\ 0 & \text{в } \omega_k^+ \\ 1 & \text{в } \omega_k^- \end{cases}$$

Если μ_0 — решение задачи (1.8), то при любом k должно выполняться неравенство

$$\Phi(\mu_0, w_0) - \Phi(\mu_k, w_0) \geqslant 0$$

из которого следует

$$T'A(a_k^+ - a_k^-) - \Pi'C(b_k^+ - b_k^-) \geqslant L(a_k^+b_k^+, a_k^+b_k^-, a_k^-b_k^+, a_k^-b_k^-) \tag{1.10}$$
$$a_k^+ = \int\limits_{\omega_k^+} \psi\, d\Omega,\quad a_k^- = \int\limits_{\omega_k^-} \psi\, d\Omega,\quad b_k^+ = \int\limits_{\omega_k^+} \varphi\, d\Omega,\quad b_k^- = \int\limits_{\omega_k^-} \varphi\, d\Omega$$
$$T' = \int\limits_{\Omega_k} (C\mu_0 + D)\varphi\, d\Omega,\quad \Pi' = \int\limits_{\Omega_k} (A\mu_0 + B)\psi\, d\Omega$$

(L —линейная функция своих аргументов). Поделив обе части неравенства (1.10) на $\operatorname{mes}\omega_k^+$ и переходя к пределу при $k \to \infty$, получим (1.9).

Замечание. Неравенство (1.9) позволяет построить функцию μ_0. Выберем некоторое значение Q, подставим его в (1.9) вместо Q_0 и построим соответствующую функцию μ. Вычислим $Q^* = \Phi(\mu, w_0)$, Q_0 отвечает наибольшему из тех значений Q, при которых $Q = Q^*$, и может быть найдено стандартными методами отыскания корней трансцендентных уравнений.

Примеры. Рассмотрим прямоугольную пластину со сторонами a и b и пусть $h = h(x)$. Стороны $y = 0$, b пластины свободно оперты, а $x = 0$, a свободны. Задача (1.1) сводится к следующей:

$$\omega^2 = \inf \Phi(h, F);\quad \Phi(h, F) = \Pi/T \tag{1.11}$$
$$\Pi = \int\limits_0^a (m_{22}F'' - \alpha^2 m_{11}F + 2m_{12}\alpha F')\, dx,\quad T = \int\limits_0^a hF^2 dx$$
$$m_{22} = Dh^3(F'' - \alpha^2\nu F),\quad m_{11} = Dh^3(\nu F'' - \alpha^2 F),\quad m_{12} = Dh^3(1 - \nu)F'$$
$$U = \{u \in W_2^2[0, a] \mid u(0) = u(a) = 0\},\quad \alpha = n\pi/b$$

Необходимо найти величину $h_* \in H_2$, такую, что

$$\omega^2(h_*) = \sup_{h \in H_2} \omega^2(h) \tag{1.12}$$
$$H_2 = \left\{h \in L_\infty[0, a] \mid h_1 \leqslant h \leqslant h_2;\ \int\limits_0^a h\, dx = h_3 a\right\}$$

Используя (1.9), получим следующую оценку супремума ($a = b = 1$):

$$Q_0 = \pi^4 (h_1^2 + h_2^2 + h_1 h_2 - h_1^2 h_2 - h_2 h_1^2)$$

Оказывается, что в множестве H_2 существуют элементы, для которых значение функционала цели близко к Q_0. Для того чтобы это показать, необходимо несколько изменить постановку задачи (1.12). Как уже отмечалось, задача (1.12) может и не иметь решения. Для устранения этой особенности необходимо произвести G-замыкание краевой задачи (1.11) [10]. Таким образом может быть построена новая расширенная (релаксированная) задача оптимизации, решение которой существует и может быть приближено по функционалу с любой степенью точности элементами исходного множества H_2. Если ограничиться рассмотрением управлений, принимающих только два значения h_1 и h_2, то G-замыкание (1.11) приводит к следующей вариационной задаче:

$$\omega^2 = \inf \Phi(\lambda, F); \quad \Phi(\lambda, F) = \Pi \left[\int_0^a (\lambda h_1 + (1-\lambda) h_2) F^2 dx \right]^{-1} \tag{1.13}$$

$$m_{22} = b_{22}(F'' - \alpha^2 \nu F), \quad m_{12} = 2 b_{12} F', \quad m_{11} = \nu b_{22} F'' - \alpha^2 b_{11} F$$

$$b_{22} = D h_1^3 h_2^3 [\lambda h_2^3 + (1-\lambda) h_1^3]^{-1}, \quad b_{12} = D(1-\nu)(\lambda h_1^3 + (1-\lambda) h_2^3)$$

$$b_{11} = (1+\nu) b_{12} + \nu^2 b_{22}$$

Расширенная задача оптимизации состоит в отыскании $\lambda_* \in N$, такого, что

$$\omega^2(\lambda_*) = \sup_{\lambda \in N} \omega^2(\lambda) \tag{1.14}$$

Здесь λ — новая функция управления, которая связана с h следующим образом. Если на некотором интервале $D_1 = [x_1, x_1 + \Delta]$, $\lambda = 1$, то $h(x) = h_1$, $x \in D_1$; если $\lambda(x) = 0$, то $h(x) = h_2$; $x \in D_1$, если же, например $\lambda = 0{,}5$, то в исходной задаче это отвечает бесконечно частому равномерному чередованию толщин h_1 и h_2.

Для получения оценки супремума снизу выберем некоторое значение $\lambda(x) \in N$ и решим задачу (1.13). Положим $\lambda(x) = 0{,}5$. Вычислим соответствующее значение частоты ω_*. Обозначим ω_p — значение частоты для пластины постоянной толщины того же веса и пусть $a = b = 1$, $h_3 = 1$. Тогда при $h_1 = 0{,}7$, $h_2 = 1{,}3$ имеем $\omega_*/\omega_p = 1{,}12$, $q_0/\omega_p = 1{,}18$; при $h_1 = 0{,}5$, $h_2 = 1{,}5$ имеем $\omega_*/\omega_p = 1{,}30$, $q_0/\omega_p = 1{,}38$, при $h_1 = 0{,}3$; $h_2 = 1{,}7$ имеем $\omega_*/\omega_p = 1{,}54$, $q_0/\omega_p = 1{,}65$, где $q_0 = \sqrt{Q_0}$. Видно, что значения выигрышей достаточно близки к оценке супремума сверху.

Рассмотрим следующую последовательность управлений $\{h_k\} \in H_2$, $k = 1, 2, \ldots$: $h = h_1$, если $x \in [(i-1)\Delta, i\Delta)$; $h = h_2$, если $x \in [i\Delta, (i+1)\Delta)$, $\Delta = 1/k$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Обозначим через ω_k значение частоты, отвечающей функции h_k. В силу свойств расширенной задачи имеем $\omega_k \to \omega_*$ при $k \to \infty$. Поэтому для достаточно большого k отношение ω_k/ω_p близко к ω_*/ω_p, а значение функционала цели для управления $h_k \in H_2$ близко к величине глобального супремума.

Аналогичные оценки можно получить и в других задачах, когда управление зависит от одной координаты. Рассмотрим, например, длинную прямоугольную пластину ($a \gg b$) со свободно опертыми краями и пусть $h = h(x)$. Выберем в качестве w_0 функцию

$$w_0 = F(x) \sin \alpha y; \quad F(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{\pi x}{2z}, & x \leqslant z \\ 1, & z < x < a - z \\ \sin \dfrac{\pi(b-x)}{2z}, & x \geqslant a - z \end{cases}$$

В этом случае

$$\frac{Q_0}{\omega_p^2} = \frac{h_2^3 [1 + i^1/_4 z^{-2}]^2 - 2h_1^3 + a[h_1^2 + h_2^2 + h_1 h_2 - h_1^2 h_2 - h_2 h_1^2] z^{-1}}{h_1 - 2h_2 + az^{-1}}$$

$$\frac{\omega_*^2}{\omega_p^2} = \frac{b_{11} a^2 b^{-2} + 2(\nu b_{22} + b_{12}) + b_{22} b^2 a^{-2}}{h_3^2 (ba^{-1} + ab^{-1})^2}$$

Например, при $h_1 = 0{,}5$, $h_2 = 1{,}5$, $h_3 = 1{,}0$, $b/a = 20$ получим $Q_0/\omega_p^2 = 2{,}28$, $\omega_*^2/\omega_p^2 = 1{,}61$ и $\omega_*^2/Q_0 = 0{,}71$. Таким образом, полученное значение частоты составляет не менее 84% от оценки сверху. Можно рассмотреть также задачу для кольцевой пластины радиусов r и R ($R > r$) в том случае, когда толщина зависит лишь от угловой координаты α. Оказывается, что при $r/R > 0{,}7 \div 0{,}8$ пластина с равномерно расположенными радиальными р. брами также обеспечивает решение, близкое к глобально оптимальному.

В двумерных задачах, когда $h = h(x, y)$, неравенство (1.9) позволяет быстро построить h_0 и вычислить Q_0 для данной функции ω_0. Так, для случая $h_1 = 0{,}5$, $h_2 = 1{,}5$, $h_3 = 1$ получено $Q_0/\omega_p^2 = 2{,}21$ (все стороны квадратной пластины свободно оперты), а при $h_1 = 0{,}7$, $h_2 = 1{,}3$, $h_3 = 1{,}0$ имеем $Q_0/\omega_p^2 = 1{,}45$.

Таким образом, сразу может быть установлена верхняя граница величины оптимизируемого параметра. Следует иметь в виду, что полученная таким способом оценка может оказаться сильно завышенной либо в силу неудачного выбора w_0, либо из-за наличия неустранимого зазора между прямой и двойственной задачами в неравенстве (1.4).

2. Постановка задач оптимизации для трехмерной упругой среды. Пусть область $\Omega \subset R^3$ заполнена упругой средой, состоящей из двух материалов, которые характеризуются тензорами упругих постоянных $\theta a = \{\theta a_{ijkl}\}$, плотностями $\theta\rho$ и пределами текучести на кручение $\theta\sigma_0$, где $\theta = \theta_0 > 0$ $(\theta_0 \ll 1)$ или $\theta = 1$. Здесь и везде далее латинские индексы пробегают значения от 1 до 3. В области Ω задан вектор объемных нагрузок $f(x) = \{f_i(x)\}$, где $x = \{x_i\}$ — декартовы координаты точек Ω. Границу Ω, которую обозначим через Γ, будем считать состоящей из двух частей: Γ_u и Γ_F $(\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_F)$, на первой из которых задан вектор перемещений $u = \{u_i\} = 0$, а на второй — вектор поверхностных нагрузок $F = \{F_i\}$. Величины a_{ijkl}, ρ, σ_0, θ_0 предполагаются не зависящими от координат x_i.

Расширим несколько первоначальную постановку задачи. Предположим, что имеется гипотетическая неоднородная упругая среда, для которой $0 < \theta_0 \leqslant \theta(x) \leqslant 1$.

Конкретизируем теперь введенные выше величины. Пусть Ω — собственно регулярная область [11]. Введем множества

$$\theta = \{\Theta \in L_\infty(\Omega) \mid 0 < \theta_0 \leqslant \theta(x) \leqslant 1\}$$
$$U = \{u \mid u_i \in H^1(\Omega),\quad u_i = 0 \text{ на } \Gamma_u\}$$

где $H^1(\Omega)$ — пространство С. Л. Соболева [12]. Будем считать, что

$$f_i \in L_2(\Omega),\quad F_i \in L_2(\Gamma_F)$$

Для любого фиксированного $\theta \in \Theta$ перемещение $u \in U$ точек Ω определяется интегральным тождеством [12]

$$\int_\Omega (\theta a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varkappa_{kl} - v_i f_i)\,dx - \int_{\Gamma_F} F_i v_i\,d\Gamma = 0 \tag{2.1}$$
$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2,\quad \forall v \in U,\quad \varkappa_{kl} = (v_{k,l} + v_{l,k})/2$$

где $\varepsilon = \{\varepsilon_{ij}\}$, $\varkappa = \{\varkappa_{kl}\}$ — тензоры деформаций, $(\cdot)_{,i}$ — производная по координате x_i, по повторяющимся индексам здесь и везде далее предполагается суммирование от 1 до 3. Если решение u найдено, то можно определить тензор напряжений $\sigma = \{\sigma_{ij}\} = \{\theta a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\}$.

В задачах оптимального проектирования часто встречается ограничение на напряжения $b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} \leqslant \theta^2\sigma_0^2$ для почти всех $x \in \Omega$, из которого очевидно вытекает ограничение на деформации:

$$c_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \leqslant \sigma_0^2 \tag{2.2}$$

почти для всех $x \in \Omega$, где $b = \{b_{ijkl}\}$, $c = \{c_{ijkl}\}$ — тензоры, определяющие инварианты в ограничениях на напряжения и деформации, $c_{ijkl} = b_{pqrs}a_{ijpq}a_{klrs}$.

Сформулируем теперь две задачи оптимального управления: задача минимизации массы материала при ограничениях на напряжения (задача W):

$$\inf \int_\Omega \theta\rho\, dx \tag{2.3}$$

для $\forall\theta \in \Theta$, $\forall u \in U$, удовлетворяющих (2.1), (2.2); задача минимизации энергии упругой деформации при ограничениях на массу материала (задача P)

$$\inf \int_\Omega \frac{1}{2} \theta a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}\, dx \tag{2.4}$$

для $\forall u \in U$, удовлетворяющих равенству (2.1), и

$$\forall\theta \in \vartheta = \left\{\theta \in \Theta \,\middle|\, \int_\Omega \theta\rho\, dx = \rho_0 \operatorname{mes}\Omega, \quad \theta_0 < \rho_0 / \rho < 1\right\}$$

3. Двойственная оценка в задаче W. Построим функционал Лагранжа

$$L(u, \theta, v, \mu) = \int_\Omega (\theta\rho + \theta a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varkappa_{kl} + \mu c_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} - \tag{3.1}$$
$$- v_i f_i - \mu\sigma_0^2)\, dx - \int_{\Gamma_F} F_i v_i\, d\Gamma, \quad \forall u, v \in U, \quad \forall\theta \in \Theta$$
$$\forall\mu\, (x) \in \mathrm{M} = \{\mu \in L_\infty(\Omega) \mid \mu \geqslant 0\}$$

Рассмотрим две экстремальные задачи для функционала L.

Первая из них

$$\inf L^\circ(u, \theta),\ \forall u \in U,\ \forall\theta \in \Theta;\ L^\circ(u, \theta) = \sup L,\ \forall v \in U,\ \forall\mu \in \mathrm{M}$$

эквивалентна задаче W.

Вторая

$$\sup L_0(v, \mu),\ \forall v \in U,\ \forall\mu \in \mathrm{M};\ L_0(v, \mu) = \inf L,\ \forall\varepsilon_{ij} \in L_2(\Omega),\ \forall\theta \in \Theta$$

является двойственной к задаче W и может быть использована для оценки значения (2.3) снизу.

Действительно, из очевидных неравенств

$$L_0(v, \mu) \leqslant \sup_{v\in U,\, \mu\in \mathrm{M}} L_0(v, \mu) \leqslant \sup_{v\in U,\, \mu\in \mathrm{M}}\ \inf_{u\in U,\, \theta\in\Theta} L \leqslant \tag{3.2}$$
$$\leqslant \inf_{u\in U,\, \theta\in\Theta}\ \sup_{v\in U,\, \mu\in \mathrm{M}} L = \inf_{u\in U,\, \theta\in\Theta} L^\circ(u, \theta)$$

следует, что значение $L_0(v, \mu)$ дает оценку снизу для (2.3).

Займемся теперь построением функционала $L_0(v, \mu)$. При каждых фиксированных v и μ подынтегральная функция в первом интеграле (3.1) — выпуклая функция ε_{ij}, поэтому необходимо минимизировать функцию

$$\varphi(\varepsilon) = \mu c_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} + \theta a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varkappa_{kl}$$

Тензор μc в общем случае не является положительно-определенным, а лишь положительным, поэтому необходимое и достаточное условие минимума

$$2\mu c_{ijkl}\varepsilon_{kl} + \theta a_{ijkl}\varkappa_{kl} = 0, \quad \forall v \in U, \quad \forall\mu \in \mathrm{M} \tag{3.3}$$

нельзя разрешить непосредственно относительно ε_{kl}.

Действительно, рассмотрим в качестве условия прочности ограничение на интенсивность касательных напряжений (условие текучести Мизеса) [13] для изотропного материала. Тогда

$$\varphi(\varepsilon) = 4G^2\mu\, [(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2 + \tag{3.4}$$
$$+ 6\,(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2)]/6 + \theta a_{ijkl}\varkappa_{kl}\varepsilon_{ij}$$

Условия (3.3) для (3.4) в развернутой форме примут вид

$$(3.5)\qquad 4G^2\mu\,(3\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})/3 + \theta a_{iikl}\varkappa_{kl} = 0$$

$$4G^2\mu\varepsilon_{ij} + \theta a_{ijkl}\varkappa_{kl} = 0 \ (i \neq j)$$

откуда следует, что если $\varkappa_{11} + \varkappa_{22} + \varkappa_{33} \neq 0$, то $\inf_\varepsilon \varphi(\varepsilon) = -\infty$, который достигается при $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \pm\infty$. Таким образом, конечные значения функция $\varphi(\varepsilon)$ принимает лишь при условии

$$(3.6)\qquad \varkappa_{11} + \varkappa_{22} + \varkappa_{33} = 0$$

При условии (3.6) решение (3.5) может быть найдено в виде

$$(3.7)\qquad \varepsilon_{ii} = D - \theta a_{iikl}\varkappa_{kl}/(4G^2\mu)$$

$$\varepsilon_{ij} = -\theta a_{ijkl}\varkappa_{kl}/(4G^2\mu) \ (i \neq j)$$

где D — произвольная постоянная. Подставляя (3.7) в (3.4) и учитывая (3.6), получим

$$(3.8)\qquad \inf_\varepsilon \varphi(\varepsilon) = \frac{\theta^2}{\mu}\left[\frac{1}{6}(\varkappa_{11} - \varkappa_{22})^2 + \frac{1}{6}(\varkappa_{22} - \varkappa_{33})^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{6}(\varkappa_{33} - \varkappa_{11})^2 - \varkappa_{11}^2 - \varkappa_{22}^2 - \varkappa_{33}^2 - \varkappa_{12}^2 - \varkappa_{23}^2 - \varkappa_{31}^2\right] =$$

$$= -\frac{\theta^2}{\mu}\psi(x)$$

$$\psi(\varkappa) = d_{ijkl}\varkappa_{ij}\varkappa_{kl}$$

Анализ показывает, что тензор $d = \{d_{ijkl}\}$ положительно-определенный. В точках, в которых $\mu = 0$, функция $\varphi(\varepsilon)$ вырождается в линейную и $\inf \varphi(\varepsilon) = -\infty$, $\forall \varepsilon_{ij} \in L_2(\Omega)$.

Подставим (3.8) в (3.1), тогда

$$\inf_{\varepsilon_{ij} \in L_2(\Omega)} L = \int_\Omega \left[\theta\rho - \frac{\theta^2}{\mu}\psi(\varkappa) - v_i f_i - \mu\sigma_0^2\right] dx - \int_{\Gamma_F} F_i v_i \, d\Gamma$$

после чего найдем

$$(3.9)\qquad L_0(v, \mu) = \int_\Omega [\omega(\varkappa, \mu) - v_i f_i - \mu\sigma_0^2]\, dx - \int_{\Gamma_F} F_i v_i \, d\Gamma$$

$$\omega(\varkappa, \mu) = \begin{cases} \rho - \psi(\varkappa)/\mu, & \mu \leqslant (1 + \theta_0)\,\psi(\varkappa)/\rho \\ \theta_0\rho - \theta_0^2\psi(\varkappa)/\mu, & \mu \geqslant (1 + \theta_0)\,\psi(\varkappa)/\rho \end{cases}$$

Значение $L_0(v, \mu)$ при фиксированных v и μ дает оценку снизу инфимума исходной задачи (см. неравенства (3.2)). Для улучшения этой оценки следует максимизировать (3.9). Функционал (3.9) не зависит от значений $\theta > \theta_0$ и $\theta < 1$, следовательно, в п. 2 можно было предположить наличие двух материалов с $\theta = \theta_0$ и $\theta = 1$.

Пример. Рассмотрим куб с ребром e, нагруженный по двум противоположным граням $x_3 = 0$ и $x_3 = e$ сжимающими усилиями постоянной интенсивности F, которая удовлетворяет неравенствам $\theta_0 \leqslant F(\sqrt{3}\sigma_0)^{-1} \leqslant 1$, получающимся из условия равнопрочности в смысле условий Мизеса [3] для $\theta = \theta_0$ и $\theta = 1$. Оптимальное управление и соответствующая масса материала:

$$\theta = F(\sqrt{3}\sigma_0)^{-1}, \quad m_0 = \rho e^3 F(\sqrt{3}\sigma_0)^{-1}$$

Получим теперь оценку снизу, используя (3.9). Положим $v_1 = -\alpha x_1/2$, $v_2 = -\alpha x_2/2$, $v_3 = \alpha x_3$, тогда условие (3.6) будет выполнено, $\psi(\varkappa) = 3\alpha^2/4$, а $L_0(v, \mu) = e^3\,[\omega(\varkappa,$

$\mu) - \mu\sigma_0^2 + F\alpha]$, откуда найдем двойственную оценку для

$$m^\circ = \sup_{\mu \geqslant 0} \sup_{\alpha \in R} L_0(v, \mu) = \rho e^3 [\theta_0 + F^2 (\sqrt{3}\sigma_0)^{-2}](1 + \theta_0)^{-1}$$

Сравнивая m_0 и m°, видим, что при всех допустимых F $m^\circ \leqslant m_0$, причем двойственная оценка хороша либо при малых, либо при больших допустимых F. Двойственную оценку можно улучшить, если максимизировать (3.9).

4. Двойственная оценка в задаче $\boldsymbol{P}$. Построим функционал Лагранжа

$$L(u, \theta, v, \mu) = \int_\Omega \Big(\frac{1}{2} a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} + \theta a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varkappa_{kl} - v_i f_i + \mu\theta\rho - \mu\rho_0\Big) dx - \int_{\Gamma_F} F_i v_i \, d\Gamma, \quad \forall u, v \in U, \quad \forall \theta \in \vartheta, \quad \forall \mu \in R \tag{4.1}$$

Если в п. 3 заменить множества Θ и M соответственно множествами ϑ и R и привести аналогичные рассуждения, то можно получить двойственную задачу

$$\sup L_0(v, \mu), \quad \forall v \in U, \quad \forall \mu \in R \tag{4.2}$$

и неравенства, аналогичные (3.2).

Построим функционал $L_0(v, \mu)$. При каждом фиксированном v и μ подынтегральная функция в первом интеграле (4.1) является сильно выпуклой функцией компонент ε_{ij}, поэтому необходимым и достаточным условием минимума L по ε_{ij} является

$$\varepsilon_{ij} = -\varkappa_{ij} \tag{4.3}$$

Подставляя (4.3) в (4.1), получим

$$\inf_{\varepsilon_{ij} \in L_2(\Omega)} L = \int_\Omega \Big(-\frac{1}{2}\theta a_{ijkl}\varkappa_{ij}\varkappa_{kl} - v_i f_i + \mu\theta\rho - \mu\rho_0\Big) dx - \int_{\Gamma_F} F_i v_i \, d\Gamma$$

откуда найдем

$$L_0(v, \mu) = \int_\Omega [\omega(\varkappa, \mu) - v_i f_i - \mu\rho_0] \, dx - \int_{\Gamma_F} F_i v_i \, d\Gamma \tag{4.4}$$

$$\omega(\varkappa, \mu) = \begin{cases} \mu\rho - a_{ijkl}\varkappa_{ij}\varkappa_{kl}/2, & \mu \leqslant a_{ijkl}\varkappa_{ij}\varkappa_{kl}/(2\rho) \\ \mu\theta_0\rho - \theta_0 a_{ijkl}\varkappa_{ij}\varkappa_{kl}/2, & \mu \geqslant a_{ijkl}\varkappa_{ij}\varkappa_{kl}/(2\rho) \end{cases}$$

Здесь так же, как и в п. 3, L_0 не зависит от промежуточных значений θ.

Пример. Рассмотрим опять куб с ребром e, нагруженный по двум противоположным граням $x_3 = 0$ и $x_3 = e$ сжимающими усилиями постоянной интенсивности F. Положим $\theta = \rho_0/\rho$, тогда соответствующая энергия упругой деформации равна

$$\Pi_0 = \rho e^3 F^2/(2E\rho_0)$$

Получим теперь оценку снизу, используя (4.4). Положим $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, $v_3 = \alpha x_3$, $\alpha = \mathrm{const}$, тогда отличной от нуля будет только деформация $\varkappa_{33} = \alpha$; $L_0(v, \mu) = e^3 [\omega(\varkappa, \mu) - \mu\rho_0 + F\alpha]$, откуда найдем двойственную оценку для Π_0, а именно

$$\Pi^0 = \sup_{\mu \in R} \sup_{\alpha \in R} L_0(v, \mu) = \rho e^3 F^2/(2E\rho_0)$$

Здесь $\Pi^0 = \Pi_0$, поэтому $\theta = \rho_0/\rho$ — оптимальное управление.

Если θ может принимать только значения θ_0 или 1, то в этом случае оптимальное управление является скользящим режимом. Подобное решение получено в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tadjbakhsh I., Keller J. B.* Strongest columns and isoperimetric inequalities for eigenvalues.— Trans. ASME. Ser. E., 1962, v. 29, No. 1, p. 159—164.
2. *Баничук Н. В.* Оптимизация формы упругих тел. М.: Наука, 1980. 255 с.
3. *Троицкий В. А., Петухов Л. В.* Оптимизация формы упругих тел. М.: Наука, 1982. 432 с.
4. *Сейранян А. П.* Оптимальное проектирование балки с ограничениями на частоту собственных колебаний и силу потери устойчивости.— Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 1, с. 147—152.
5. *Филиппов А. Ф.* О некоторых вопросах теории оптимального регулирования.— Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., астрон., физ., хим., 1959, № 2, с. 25—32.
6. *Гамкрелидзе. Р. В.* О скользящих оптимальных режимах.— Докл. АН СССР, 1962, т. 143, № 6, с. 1243—1245.
7. *Арман Ж.-Л. П.* Приложения теории оптимального управления системами с распределенными параметрами к задачам оптимизации конструкций. М.: Мир, 1977. 142 с.
8. *Ольхофф Н.* Оптимальное проектирование конструкций. М.: Мир, 1981. 277 с.
9. *Сеа Ж.* Оптимизация. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1973. 244 с.
10. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., Нгоан Ха Тьен.* Усреднения и G-сходимость дифференциальных операторов.— Успехи матем. наук, 1979, т. 34, № 5, с. 65—133.
11. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. 159 с.
12. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 383 с.
13. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.

Ленинград

Поступила в редакцию 19.IX.1983