Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 5, 1984

УДК 539.3

К МЕТОДУ ЭТАЛОННОГО УРАВНЕНИЯ В ДИНАМИКЕ СТРУКТУРНО-НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ СРЕД

Чигарев А. В.

Рассматривается развитие метода эталонного уравнения для изучения распространения гармонических волн в стохастически неоднородных упругих средах. В качестве эталонного уравнения исследуется операторное уравнение Гельмгольца, описывающее распространение среднего скалярного поля в среде. Для произвольной корреляционной функции упругих коэффициентов среды корни дисперсионного уравнения находятся разложением их в ряд по параметру дисперсии, соответственно приближенно определяются собственные векторы оператора. Для сред экспоненциального класса корни и собственные функции эталонной задачи определяются точно. При исследовании распространения волн в упругих средах используются результаты, полученные при решении эталонной задачи: корни и собственные векторы находятся в виде разложения в ряд по дисперсии. Установлена связь между спектрами упругого оператора и оператора эталонной задачи. Получены формулы для нахождения средних упругих полей (в том числе собственных векторов) через средние эталонные функции в виде ряда рассеяния.

В изотропном однородном теле упругий оператор имеет собственные векторы в виде продольной и поперечной волн, удовлетворяющих уравнениям Гельмгольца. Собственные значения и векторы упругого оператора представляют собой совокупность собственных значений и векторов оператора Гельмгольца [1]. В неоднородной среде в общем случае уравнения упругости не расщепляются в уравнения Гельмгольца или скалярные уравнения. Это можно сделать для высоких частот [2] и некоторых частных видов неоднородности [3].

Метод эталонных уравнений [4, 5] позволяет определить вид, в котором нужно искать собственные функции и собственные значения исследуемой задачи. Для стохастически неоднородных сред уравнения для среднего поля являются интегродифференциальными: среда обладает пространственной дисперсией. Дисперсионные уравнения трансцендентные и корни могут быть найдены лишь приближенно. В качестве эталонного уравнения берем операторное уравнение Гельмгольца [6], тогда для класса сред, характеризуемого экспоненциальной корреляционной функцией, корни дисперсионного уравнения и собственные функции находятся точно. При решении упругой задачи используются результаты решения эталонной задачи, причем собственные значения упругого оператора выражаются через собственные значения обобщенного оператора Гельмгольца. Корни дисперсионного уравнения, собственные векторы упругой задачи выражаются через корни и собственные векторы эталонной задачи. Эталонное решение качественно верно описывает распространение волны в структурно-неоднородной среде, что позволяет говорить о подобии соответствующих законов дисперсии и затухания [7]. Безразмерными параметрами, по которым раскладываются величины в обоих задачах, являются дисперсия и произведение радиуса корреляции на волновое число [7, 8].

1. Вектор перемещений $\mathbf{u}$ в гармонической волне, распространяющейся в стохастически неоднородной упругой среде, удовлетворяет уравнениям

$$L\mathbf{u}+\rho_0\omega^2\mathbf{u}=0,\quad L_{ik}=\nabla_j\lambda_{ijkl}(\mathbf{x})\nabla_l \tag{1.1}$$

Здесь λ_{ijkl} зависит от $\mathbf{x}$ случайным образом, ρ_0 — постоянная плотность, ω — частота.

Вводя эффективный упругий оператор Λ^* соотношением

$$\langle\lambda_{ijkl}u_{k,l}\rangle=\Lambda^*_{ijkl}\langle u_{k,l}\rangle\quad u_{k,l}=\frac{\partial u_k}{\partial x_l} \tag{1.2}$$

и осредняя уравнение (1.1), получим замкнутую систему уравнений для $\langle \mathbf{u} \rangle$

(1.3) $$L^* \langle \mathbf{u} \rangle + \rho_0 \omega^2 \langle \mathbf{u} \rangle = 0, \quad L_{ik}^* = \nabla_j \Lambda_{ijkl}^* \nabla_l$$

Для статистической изотропной однородной среды упругий оператор Λ^* имеет вид

(1.4) $$\Lambda^* = \int \lambda^* (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)\, d\mathbf{x}_1$$

Собственными векторами оператора (1.4) являются в среднем плоские волны [6]

(1.5) $$\langle \mathbf{u}(\mathbf{x}) \rangle = \mathbf{u}(\mathbf{q})\, e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}$$

В рассматриваемой среде существуют продольные $\langle \mathbf{u}^l \rangle$ и поперечные $\langle \mathbf{u}^t \rangle$ волны и имеем

(1.6) $$\langle \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}^l \rangle + \langle \mathbf{u}^t \rangle, \quad \langle \mathbf{u}^\alpha \rangle = \mathbf{u}^\alpha (\mathbf{q}_\alpha)\, e^{i\mathbf{q}_\alpha\cdot\mathbf{x}}$$

Из уравнений (1.3) при учете соотношений (1.5), (1.6) следуют дисперсионные уравнения относительно q_α

(1.7) $$\Delta_\alpha = q_\alpha^2 - \rho_0 \omega^2 \Lambda_\alpha^{-1} (q_\alpha, \omega) = 0$$

Здесь Λ_α — собственные значения тензора

(1.8) $$L_{ik}^* (\mathbf{q}) = \int L_{ik}^* (\mathbf{r})\, e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}\, d\mathbf{r}$$

Явный аналитический вид $\Lambda_\alpha (q_\alpha, \omega)$ зависит от конкретного вида корреляционной зависимости $\lambda_{ijkl} (\mathbf{x})$. Однако независимо от вида корреляционной функции для статистически изотропной однородной среды величина Λ_α зависит от q_α^2 и может быть представлена в комплексной плоскости q_α^2 в виде целой функции q_α^2 [6].

Для нахождения $\Lambda_\alpha (q_\alpha^2, \omega)$ с учетом многократного рассеяния применим метод замены полевых величин [6], тогда получим

(1.9) $$\Lambda_l (q_l, \omega) = \Lambda_{l_0} + \Gamma^* (1 - L^{(l)}\Gamma^*)^{-1} + {}^4/_3 \Lambda_t (q_l, \omega)$$
$$\Lambda_t (q_t, \omega) = \Lambda_{t_0} + \Gamma_2^* (1 - L^{(t)}\Gamma_2^*)^{-1}$$
$$\Lambda_{t0} = \mu_0, \quad \Lambda_{l0} = K_0 + {}^4/_3 \mu_0$$

Здесь K_0, μ_0 — объемный и сдвиговый упругие эффективные модули, $\Gamma^* (q, \omega)$, $\Gamma_2^* (q, \omega)$ — собственные значения оператора поляризуемости Γ^* рассматриваемой среды

(1.10) $$\Gamma_{ijkl}^* = \int \Gamma_{ijkl}^* (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)\, d\mathbf{x}_1, \quad \mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_1$$
$$\Gamma_{ijkl}^* (\mathbf{q}, \omega) = R_{ijst}^{mnkl} \gamma_{smnt}^* (\mathbf{q}, \omega)$$
$$\gamma^* (\mathbf{q}, \omega) = \int \gamma^* (\mathbf{r}, \omega)\, e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}\, d\mathbf{r}, \quad \Gamma_{nmst}^* (\mathbf{r}) = R_{mnql}^{past} \gamma_{qpal}^* (\mathbf{r})$$
$$\gamma_{qpal}^* (\mathbf{r}) = R(\mathbf{r})\, G_{qp,\, al}^{(R)} (\mathbf{r}), \quad R_{nmql}^{past} (\mathbf{r}) = R(\mathbf{r})\, R_{nmql}^{past}$$

Здесь R_{nmql}^{past} — постоянный тензор, определяющий тензорную зависимость корреляционного тензора $R_{nmql}^{past} (\mathbf{r})$ поля $\gamma_{ijkl} (\mathbf{x})$: $R_{nmql}^{past} (\mathbf{r}) = \langle \gamma_{past} (\mathbf{x})\, \gamma_{nmql} (\mathbf{x}_1) \rangle$, а корреляционная функция $R(r)$ определяет координатную зависимость корреляционного тензора $R_{nmql}^{past} (\mathbf{r})$. Для сильно изотропной среды тензоры $\Gamma_{ijkl}^* (\mathbf{q}, \omega)$, $\lambda_{ijkl}^* (\mathbf{q}, \omega)$, $\gamma_{ijkl}^* (\mathbf{q}, \omega)$ имеют вид

(1.11) $$F^* (q, \omega) = F_1^* (q, \omega) I^2 + F_2^* (q, \omega) I^1 \quad (F_i^* = \Gamma_i^*, \lambda_i^*, \gamma_i^*)$$
$$I^2 = \delta_{ij}\delta_{kl}, \quad I^1 = {}^1/_2 (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$
$$\Gamma^* = \Gamma_1^* + {}^2/_3 \Gamma_2^*, \quad K^* = \lambda_1^* + {}^2/_3 \mu^*, \quad \gamma^* = \gamma_1^* + {}^2/_3 \gamma_2^*$$
$$\Gamma_1^* = 3 (3\gamma_1^* + 4\gamma_2^*), \quad \Gamma_2^* = 3 (2\gamma_1^* + \gamma_2^*), \quad F_i^* = 0 \ (i = 3, 4, 5, 6)$$

Не конкретизируя вид корреляционной функции, вычислим компоненты γ^*_{ijkl} (q, ω) по третьей формуле (1.10). Перейдем под интегралом к сферической системе координат и проинтегрируем по углам, тогда получим [6, 9]

(1.12)
$$\gamma_1{}^* = \theta_t [P^3_{2(t)} - iP^2_{2(t)} - P^2_{1(t)}\varkappa_t] + 2^{-1}\gamma_2{}^*$$
$$\gamma_2{}^* = -2\theta_\alpha [P^3_{4(\alpha)} - 3iP^4_{4(\alpha)} + 2P^4_{3(\alpha)} + 2iP^3_{3(\alpha)}\varkappa_\alpha + P^3_{2(\alpha)}\varkappa_\alpha{}^2]^l{}_t$$
$$P^p_{n(\alpha)} = \int\limits_0^\infty j_n(z)\, y_\alpha^{-p} e^{iy_\alpha} R(r)\, r^2\, dr, \quad \alpha = l, t$$
$$z = qr, \quad y_\alpha = k_\alpha r, \quad \theta_\alpha = k_\alpha{}^3 (\rho_0 c_\alpha{}^2)^{-1}, \quad c_\alpha{}^2 = \Lambda_{0\alpha}\rho_0^{-1}$$

Здесь j_n (q, r) — сферическая функция Бесселя.

Представим j_n (qr) в виде

$$j_n(qr) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{n+2k} r^{n+2k}}{2^k\, k!\, (2n+2k+1)!!}$$

Тогда получим

(1.13)
$$P^p_{n(\alpha)} = \sum_{k=0}^{\infty} P^{pk}_{n(\alpha)} q^{2k}, \quad P^{pk}_{n(\alpha)} = \frac{(-1)^k k_\alpha^{-p} q^n}{(2n+2k+1)!!\, k!\, 2^k} \times$$
$$\times \int\limits_0^\infty R(r) \exp(ik_\alpha r)\, r^{n+2k-p+2}\, dr$$

С учетом (1.13) выражения (1.12) запишем в виде

(1.14)
$$\gamma_i{}^*(q) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_i^{(k)} q^{2k}, \quad i = 1, 2$$
$$\gamma_1^{(k)} = -\theta_t [P^{3(k+2)}_{2(t)} - iP^{2(k+2)}_{2(t)} - P^{2k}_{1(t)}\varkappa_t] + 2^{-1}\gamma_2^{(k)}$$
$$\gamma_2^{(k)} = -2\theta_\alpha [P^{3(k+4)}_{4(\alpha)} - 3iP^{4(k+4)}_{4(\alpha)} + 3P^{5(k+4)}_{4(\alpha)} +$$
$$+ 2P^{4(k+2)}_{3(\alpha)}\varkappa_\alpha + 2iP^{3(k+2)}_{3(\alpha)}\varkappa_\alpha + P^{3k}_{2(\alpha)}]^l{}_t$$

Таким образом, собственные значения оператора поляризуемости Γ^* (q, ω) представляют собой целые функции q^2 в комплексной плоскости q^2.

2. Рассмотрим теперь эталонную задачу о распространении гармонической волны в случайной неоднородной среде. Простейшая трехмерная задача описывается уравнением Гельмгольца [4—6]. Для нее возможно получение аналитических выражений в обозримом виде.

Это обусловлено тем, что дисперсионное уравнение имеет простой вид и корни вычисляются достаточно легко. Соответственно зависимости скорости и коэффициента рассеяния от частоты имеют сравнительно простой вид. Уравнение Гельмгольца используется в качестве эталонного для исследования распространения волн в неоднородных средах: в электродинамике [5], в теории упругости [2, 4]. При этом исключается учет эффектов, связанных с поляризацией волн [5]. Установлено, что для коротких (высокочастотных) волн уравнения динамики неоднородных сред могут быть расщеплены на уравнения Гельмгольца для продольных и поперечных волн [2].

Покажем, что для стохастически неоднородной упругой среды собственные значения упругого оператора выражаются через собственные значения обобщенного оператора Гельмгольца, а корни дисперсионных уравнений (1.7) и собственные векторы (1.5) — через корни и собственные векторы соответствующей эталонной задачи. Эталонное уравнение запишем в виде

(2.1)
$$\Delta\varphi + k^2\lambda(\mathbf{x})\,\varphi = 0$$

где k^2 — квадрат волнового числа эффективной однородной среды, $\lambda(\mathbf{x}) = n^2(\mathbf{x})$ — квадрат показателя преломления $n(\mathbf{x}) = c_0 c^{-1}(\mathbf{x})$ — случайной функции пространственных координат, $c(\mathbf{x})$ — скорость в неоднородной среде, c_0 — скорость в эффективной однородной среде.

Осредненное уравнение (2.1) в дальнейшем рассматривается как эталонное для операторных уравнений, соответствующих (1.7), которым удовлетворяют в среднем продольные и поперечные волны $\langle \mathbf{u}^\alpha \rangle$ упругой задачи. Поэтому величинам φ, k, λ, $c(\mathbf{x})$, c_0 приписываем индекс α, причем $\alpha = l$ при рассмотрении в среднем продольной и $\alpha = t$ при рассмотрении в среднем поперечной волн. В дальнейшем индекс α у указанных величин не пишем. Эффективный оператор эталонной задачи вводим соотношением

(2.2) $\quad \langle \lambda\varphi \rangle = \Lambda^* \langle \varphi \rangle$

Осредняя (2.1) с учетом (2.2), получим эталонное уравнение для $\langle \varphi \rangle$

(2.3) $\quad \Delta \langle \varphi \rangle + k^2 \Lambda^* \langle \varphi \rangle = 0$

Для статистически изотропной однородной среды Λ^* имеет вид (1.4), а собственные векторы — вид (1.5), хотя $\lambda^*(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)$, $u(\mathbf{q})$ другие.

Дисперсионное уравнение запишем в виде

(2.4) $$\Delta = q^2 - k^2 \Lambda^*(q, \omega) = 0, \quad \Lambda^* = \lambda_0 (1 - \Gamma^*(q, \omega))^{-1}$$

$$F^*(\mathbf{q}) = \int f^*(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad (F^* = \Lambda^*, \Gamma^*; \ f^* = \lambda^*, \gamma^*)$$

Для произвольной корреляционной функции $R(r) = \langle \gamma(\mathbf{x}) \gamma(\mathbf{x}_1) \rangle$ имеем

(2.5) $$\Gamma^*(q, \omega) = ak^2 \int_0^\infty R(r) e^{ikr} j_0(qr)\, dr = akP_0^1(q, \omega) =$$

$$= a\varkappa q^{-1} Q_0^1, \quad Q_n^p = \int_0^\infty j_n(z) z^{2-p} e^{i\varkappa z} R(z\alpha^{-1})\, dz$$

$$\varkappa = kq^{-1}, \quad \alpha = aq, \quad P_n^p = \varkappa^2 q^{-3} Q_n^p$$

Используя рекуррентные соотношения для сферических бесселевых функций [10], получим рекуррентные формулы для Q_n^p

(2.6) $$Q_{n+1}^p = (2n + 1) Q_n^{p+1} - Q_{n-1}^p$$

Обозначим

$$2 - p = m - n, \quad Q_n^m = \int_0^\infty j_n(z) z^{m-n} e^{i\varkappa z} R(z\alpha^{-1})\, dz$$

Тогда получим

(2.7) $$Q_{n+1}^{m+1} = (2n + 1) Q_n^{m-1} - Q_{n-1}^{m-1}$$

Формулы (2.6), (2.7) не дают возможности для произвольной корреляционной функции выразить собственные значения $\Gamma^*(q, \omega)$ упругой задачи через $\Gamma^*(q, \omega)$ соответствующей эталонной задачи.

Рассмотрим классы сред, описываемых корреляционными функциями вида

(2.8) $$R(r) = A(ra^{-1})^k e^{-dr}, \quad k = -1, 0$$

где a — радиус корреляции, A, d — комплексные величины.

Положим $k = 0$, $A = R_0$, $d = a^{-1}$, тогда в (2.5) получим

(2.9) $$\Gamma^*(q, \omega) = k^2 s^{-2} Q_0^1, \quad Q_0^1 = F\left(1, \frac{3}{2}; \frac{3}{2}; -\beta^{-2}\right) =$$

$$= (1 + \beta^{-2})^{-1}, \quad \beta = sq^{-1}, \quad s = a^{-1} - ik$$

Полагая в (2.8) $k = -1$, $A = R_0$, $d = a^{-1}$, получим

$$\Gamma^*(q, \omega) = R_0 a k^2 \beta^{-1} F\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; -\beta^{-2}\right) = R_0 a k^2 Q_0^0(\beta) = R_0 a k^2 \operatorname{arctg} \beta^{-1} \tag{2.10}$$

К виду (2.8) можно привести корреляционную функцию марковского поля вида

$$R(r) = R_0 j_0(ra^{-1}) = \frac{aR_0}{2i} e^{i(ra^{-1})(-1)^n}\Big|_1^2 \tag{2.11}$$

$$A = aR_0(2i)^{-1}, \quad d_n = -(-1)^n ia, \quad k = -1, \quad f_n|_1^2 = f_2 - f_1$$

$$\Gamma^*(q, \omega) = 2[Q_0^0(\beta_1^{-1}) + Q_0^0(\beta_2^{-1})], \quad \beta_1 = (1 - ak)\alpha^{-1}$$

$$\beta_2 = (1 + ak)\alpha^{-1}, \quad Q_0^0 = \frac{1}{2i}\ln\frac{\beta+1}{\beta-1} = \frac{1}{i\beta}F\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; \beta^{-2}\right)$$

Для рассматриваемых типов корреляционных функций коэффициенты $P_n^p(Q_n^m)$, а следовательно, и $\Gamma^*(q, \omega)$ в формулах (2.9) — (2.11) вычисляются через гипергеометрические функции

$$Q_n^m = \frac{m!\,\beta^{m-1}}{(2n+1)!!}F\left(\frac{m+1}{2}, \frac{m+2}{2}; \frac{2n+3}{2}; -\beta^{-2}\right)$$

Используя известные рекуррентные формулы Гаусса для гипергеометрических функций [9, 10], можно в дополнение к (2.6), (2.7) получить рекуррентные формулы для Q_n^m (P_n^p) для корреляционных функций вида

$$Q_{n+1}^m = \frac{(2n+1)\beta^2 + (4n-2m+1)}{(2n+1-m)(2n+2-m)}Q_n^m - \frac{(1+\beta^2)Q_{n-1}^m}{(2n+1-m)(2n+2-m)} \tag{2.12}$$

$$Q_n^{m+1} = \beta^{-1}[Q_{n-1}^m - (2n-m)Q_n^m]$$

Рассмотрим вычисление собственных значений оператора поляризуемости $\Gamma^*(q, \omega)$ согласно формулам (1.11), (1.12). Формулы (2.6), (2.7), (2.12) позволяют выразить Q_n^m через Q_1^1, Q_0^1

$$Q_n^m = A_n^m Q_0^1 + B_n^m Q_1^1 \tag{2.13}$$

По формулам (2.13) выражение для $\Gamma^*(q, \omega)$ получим в виде

$$\Gamma^* = \tau_1^{(0)} Q_1^1 + \tau_2^{(0)} Q_0^1, \quad \Gamma_2^* = \tau_1^{(2)} Q_1^1 + \tau_2^{(2)} Q_0^1 \tag{2.14}$$

$$\tau_1^{(0)} = -3q^{-3}(3\theta_t D_1 + 11\theta_\alpha D_2), \quad \tau_2^{(0)} = -3q^{-3}(3\theta_t C_1 + 11\theta_\alpha C_2)$$

$$\tau_1^{(2)} = -6q^{-3}(\theta_t D_1 + 2\theta_\alpha D_2), \quad \tau_2^{(2)} = -6q^{-3}(\theta_t C_1 + 2\theta_\alpha C_2)$$

$$C_1 = \varkappa_t^{-3}A_2^1 - 3i\varkappa_t^{-2}A_1^0 + i\varkappa_t^{-2}A_0^0$$

$$D_1 = \varkappa_t^{-3}B_2^1 - 3i\varkappa_t^{-2}B_1^0 + i\varkappa_t^{-2}B_0^0$$

$$C_2 = 3\varkappa_\alpha^{-5}A_4^1 - 3i\varkappa_\alpha^{-4}A_4^2 + \varkappa_\alpha^{-1}(1 - \varkappa_\alpha^{-2})A_2^1 + 9\varkappa_\alpha^{-3}A_3^1 + 8i\varkappa_\alpha^{-2}A_1^0$$

$$D_2 = 3\varkappa_\alpha^{-5}B_4^1 - 3i\varkappa_\alpha^{-4}B_4^2 + \varkappa_\alpha(1 - \varkappa_\alpha^{-2})B_2^1 + 9\varkappa_\alpha^{-3}B_3^1 + 8i\varkappa_\alpha^{-2}B_1^0$$

$$A_4^1 = -\frac{b(35\beta^4 + 79\beta^2 + 57)}{7!}, \quad B_4^1 = \frac{b^3}{6!!}$$

$$A_4^2 = \frac{b(35\beta^4 + 52\beta^2 + 15)}{7!\,\beta}, \quad B_4^2 = -\frac{b(1 + 3\beta^2)}{6!!\,\beta}$$

$$A_3^1 = -\frac{b(5\beta^2 + 7)}{5!}, \quad B_3^1 = \frac{b^2}{4!!}, \quad A_2^1 = -\frac{b}{3!}, \quad B_2^1 = \frac{b}{2!}$$

$$A_1^0 = \frac{b}{2\beta}, \quad B_1^0 = -A_1^0, \quad A_0^0 = b\beta^{-1}, \quad B_0^0 = -\beta^{-1}, \quad b = 1 + \beta^2$$

С учетом формул (2.9), (2.10) из (2.14) получаем представление

$$\Gamma^* = \tau_1^{(0)} + T_1^{(0)}\Gamma^{(1)} + T_2^{(0)}\Gamma^{(2)}, \quad \Gamma_2^* = \tau_1^{(2)} + T_1^{(2)}\Gamma^{(1)} + T_2^{(2)}\Gamma^{(2)} \tag{2.15}$$
$$\Gamma^{(1)} = ak^2R_0Q_0{}^0, \quad \Gamma^{(2)} = k^2s^{-2}R_0Q_0{}^1, \quad Q_1{}^1 = 1 - \beta Q_0{}^0$$
$$T_1^{(0)} = -\beta(R_0ak^2)^{-1}\tau_1^{(0)}, \quad T_2^{(0)} = R_0^{-1}k^{-2}s^2\tau_2^{(2)}$$
$$T_1^{(2)} = -\beta(R_0ak^2)^{-1}\tau_1^{(2)}, \quad T_2^{(2)} = R_0^{-1}k^{-2}s^2\tau_2^{(2)}$$

Таким образом, собственные значения оператора поляризуемости упругой задачи $\Gamma^*(q, \omega)$, $\Gamma_2^*(q, \omega)$ выражаются через собственные значения $\Gamma^{(2)}(q, \omega)$, $\Gamma^{(1)}(q, \omega)$ эталонных задач (2.9) (2.10) соответственно. Вследствие формул (1.9) собственные значения упругого оператора $\Lambda_\alpha(q_\alpha, \omega)$ выражаются через $\Gamma^{(i)}(q_\alpha, \omega)$ двух эталонных задач. В эталонной задаче $\Gamma^{(i)}(q, \omega)$ собственные значения Γ^* — оператора поляризуемости при учете многократного рассеяния связаны с собственными значениями $\Lambda^{(i)}(q, \omega)$ оператора Λ^* формулой

$$\Gamma^*(q, \omega) = (\Lambda^*(q, \omega) - \lambda_0)\, \Lambda^{*-1}(q, \omega) \tag{2.16}$$

Итак, собственные значения упругого оператора выражаются через собственные значения операторов Λ^* соответствующих эталонных задач. Например, для упругой среды с экспоненциальной корреляционной функцией (2.8) при $k = 0$, $A = R_0$, $d = a^{-1}$ собственные значения $\Gamma^*(q, \omega)$ выражаются по формулам (2.15) через собственные значение $\Gamma^{(1)}(q, \omega)$ эталонной задачи для среды с такой же корреляционной функцией и через собственное значение $\Gamma^{(2)}(q, \omega)$ эталонной задачи для среды с корреляционной функцией (2.8) при $k = -1$, $A = R_0$, $d = a^{-1}$.

3. Рассмотрим вычисление собственных векторов и корней дисперсионных уравнений упругой задачи через соответствующие величины эталонной задачи. В среднем продольные и поперечные волны в упругой среде удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\Lambda_{\alpha u}^{*-1}\langle u^\alpha\rangle + k_\alpha{}^2\langle u^\alpha\rangle = 0, \quad \alpha = l, t \tag{3.1}$$

Соответствующие эталонные уравнения имеют вид

$$\Delta\Lambda_{\alpha\varphi}^{*-1}\langle \varphi^\alpha\rangle + k_\alpha{}^2\langle \varphi^\alpha\rangle = 0, \quad \alpha = l, t \tag{3.2}$$

Здесь $\Lambda_{\alpha\varphi}^{*-1}$ — оператор, обратный Λ^* в уравнении (2.2). В дальнейшем индекс α опускаем, сохраняя для обозначения величин упругой задачи индекс —u, а для эталонной — индекс —φ.

Уравнениям (3.1), (3.2) эквивалентно интегральное уравнение

$$\langle u^\alpha\rangle = \langle\varphi^\alpha\rangle - \int G_{\alpha\varphi}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)\,\Delta\Lambda_\alpha'(\mathbf{x}_1)\langle u^\alpha\rangle\, d\mathbf{x}_1 \tag{3.3}$$
$$\Lambda_\alpha' = \Lambda_{\alpha u}^* - \Lambda_{\alpha\varphi}^*, \quad (\Delta\Lambda_{\alpha\varphi}^* + k^2)\,G_{\alpha\varphi} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)$$

Решая уравнение (3.3) последовательными итерациями, получим

$$\langle u^\alpha\rangle = T_\alpha{}^*\langle\varphi^\alpha\rangle, \quad T_\alpha{}^* = 1 + \int G_{\alpha\varphi}\Delta\Lambda_\alpha'\, d\mathbf{x}_1 + \tag{3.4}$$
$$+ \iint G_{\alpha\varphi}G_{\alpha\varphi}\Delta\Lambda_\alpha'\Delta\Lambda_\alpha'\, d\mathbf{x}_1\, d\mathbf{x}_2 + \ldots$$

В формулах (3.1) — (3.4) суммирования по повторяющимся иннексам нет. Решение $\langle u^\alpha\rangle$ в виде ряда рассеяния (3.4) учитывает последовательное перерассеяние «эталонной» волны на осредненных неоднородностях упругой среды.

Дисперсионные уравнения, соответствующие уравнениям (3.1), (3.2), запишем соответственно в виде

(3.5) $$q_{\alpha\beta}^2 = k_\alpha^2 \Lambda_{\alpha\beta}^{*-1}(q_{\alpha\beta}, \omega),\ \beta = u,\ \varphi$$

Из уравнений (3.5) получим уравнения для вычисления $q_{\alpha u}^2$ через $q_{\alpha\varphi}$:

(3.6) $$q_{\alpha u}^2 = q_{\alpha\varphi}^2 - k_\alpha^2 \Lambda'_{\alpha u\varphi}(q_{\alpha u}, q_{\alpha\varphi}, \omega),\quad \Lambda'_{\alpha u\varphi} = \Lambda_{\alpha u}^{*-1} - \Lambda_{\alpha\varphi}^{*-1}$$

Решая уравнение (3.6) последовательными итерациями, находим

(3.7) $$q_{u(0)} = q_\varphi,\ n = 1, 2, \ldots$$
$$q_{u(n)}^2 = q_\varphi^2 - k^2 \Lambda'_{u\varphi}(q_{u(n-1)}, q_\varphi, \omega)$$

Собственные векторы операторов Λ_u^{*-1} и Λ_φ^{*-1} для статистически изотропной однородной среды имеют вид $\exp(i\mathbf{q}_u \cdot \mathbf{x})$ и $\exp(i\mathbf{q}_\varphi \cdot \mathbf{x})$. Собственные функции упругого оператора выражаются через собственные функции эталонного оператора

(3.8) $$\exp(i\mathbf{q}_u \cdot \mathbf{x}) = \exp(i\mathbf{q}_\varphi \cdot \mathbf{x}) \exp(i\boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{x})$$
$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{q}_\varphi k^2 \Lambda'_{u\varphi}(q_\varphi, \omega) + q_u \cdot \mathbf{q}'$$
$$\mathbf{q}' = \mathbf{q}_u^0 - \mathbf{q}_\varphi^0,\ \mathbf{q}_\beta^0 = \mathbf{q}_\beta q_\beta^{-1},\quad \beta = u,\ \varphi$$

В формуле (3.8) в векторе $\boldsymbol{\psi}$ первый член учитывает отличие $\mathbf{q}_u$ от $\mathbf{q}_\varphi$ за счет различия собственных значений $\Lambda_{u\varphi}'$, а второй — за счет различия в направлениях упругого и эталонного векторов.

Вычисление приближенных собственных векторов и корней упругой задачи через эталонные есть следствие расширения эталонного оператора до упругого [11, 12]. Отметим, что формула (3.7) позволяет связать между собой распределение корней [13] упругой и эталонной задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дьелесан Э., Руайе Д.* Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов. М.: Наука, 1982. 424 с.
2. *Мухина И. В.* Приближенное сведение к уравнениям Гельмгольца уравнений теории упругости и электродинамики для неоднородных сред.— ПММ, 1972, т. 36, вып. 4, с. 667—671.
3. *Саакян С. Г.* Разделение векторного волнового уравнения для неоднородных упругих сред.— Докл. АН СССР, 1983, т. 269, № 3, с. 565—567.
4. *Бабич В. М., Булдырев В. С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 456 с.
5. *Татарский В. И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967. 548 с.
6. *Чигарев А. В.* Распространение волн в упругой микронеоднородной среде.— Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 4, с. 128—135.
7. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1967. 428 с.
8. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 274 с.
9. *Григорьев О. А., Шермергор Т. Д.* Распространение ультразвуковых волн в поликристаллах кубической симметрии с учетом многократного рассеяния.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 2, с. 310—319.
10. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979. 830 с.
11. *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики. М.: Мир, 1982. 486 с.
12. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968. 503 с.
13. *Болотин В. В.* О плотности параметрических резонансов.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 6, с. 1087—1094.

Минск

Поступила в редакцию
30.VIII.1983