

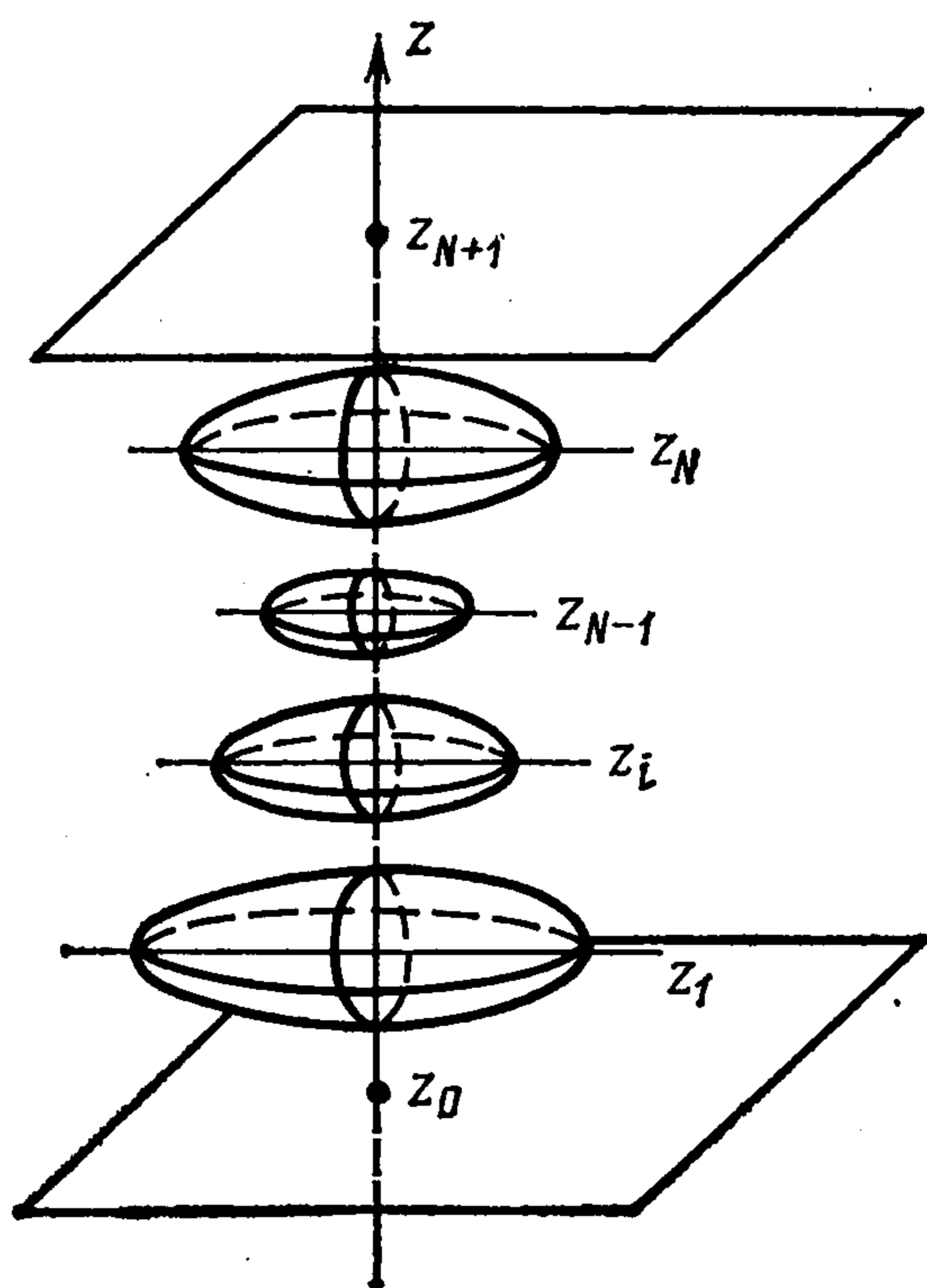
УДК 539.3

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СЛОЯ С СИСТЕМОЙ ТОНКИХ УПРУГИХ ВКЛЮЧЕНИЙ

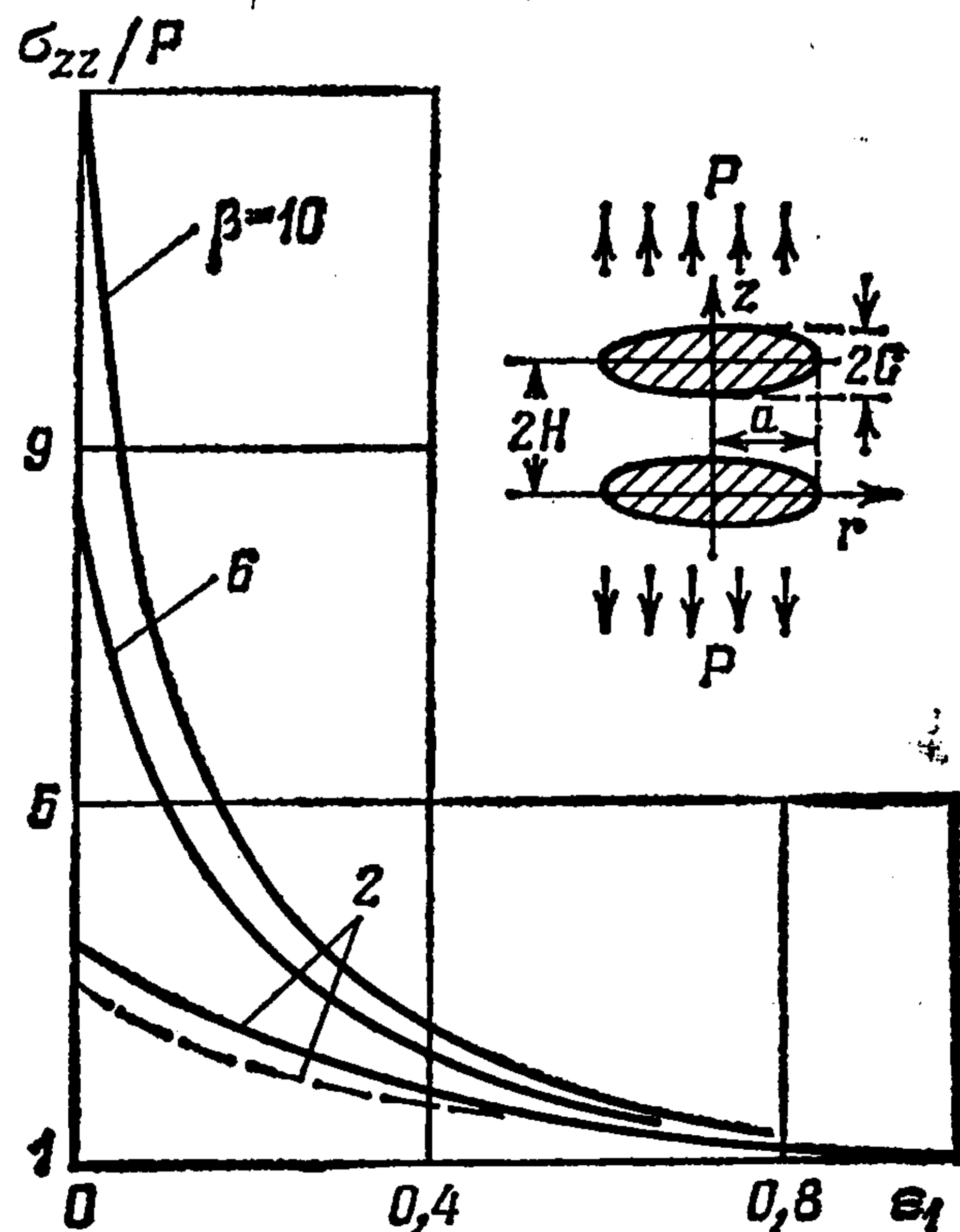
Силованюк В. П., Стадник М. М.

Предлагается приближенный метод определения концентрации напряжений в бесконечном упругом слое вблизи системы тонких упругих включений, ограниченных коаксиальными гладкими поверхностями вращения. Преобразованием Ганкеля задача сводится к системе интегральных уравнений второго рода, которые можно решать методом последовательных приближений или численно. Приводится численный расчет для случая двух сфероидальных включений в неограниченном пространстве. Результаты сопоставляются с известными в литературе.

1. Пусть в упругом слое на оси, нормальной к его границам, содержится N различных по геометрическим параметрам и упругим свойствам тонких включений, ограниченных гладкими поверхностями вращения V_i ($i = 1, \dots, N$), имеющими плоские срединные области, параллельные границам слоя (фиг. 1). Включения и материал слоя сопряжены вдоль всей



Фиг. 1



Фиг. 2

общей границы. Введем цилиндрическую систему координат r, φ, z с осью Oz , совпадающей с осью вращения поверхностей V_i . К границам слоя приложены осесимметричные усилия, которые в случае однородного слоя вызывают в срединных областях включений S_i (S_i — круги радиусов a_i) нормальные $z_{r,i}$ и касательные $f_{r,i}$ напряжения. Определим концентрацию напряжений в окрестности включений.

Для приближенного решения задачи заменим включения полостями с некоторым распределением напряжений на поверхностях V_i . Предположения о малой толщине включений $2h_i(r)$ ($h_i \ll a_i$), гладкости поверхностей V_i ($|dh_i/dr| \ll 1$) и жесткости включений ($E_i \ll E$) позволяют силовое взаимодействие включений с основным материалом представить при-

ближенно соотношениями [1,2]

$$(1.1) \quad f_{zi}^*(r) = 1/2 [u_{zi}^*(r)] E_i/h_i(r), \quad f_{ri}(r) = 1/2 [u_{ri}^*(r)] \mu_i/h_i(r)$$

где $[u] = u^+ - u^-$ (u^+ и u^- — значения величины u на верхних и нижних относительно областей S_i берегах поверхностей V_i соответственно), E_i, μ_i — модули упругости и сдвига материала включений, E — модуль упругости [матрицы, $u_i^* = u_i^*(u_{zi}^*, u_{ri}^*)$ — вектор перемещений точек поверхности V_i , который приближенно принимается равным сумме $u_i^0 + u_i$, u_i — вектор перемещения точек поверхности математического разреза вдоль S_i , к берегам которого приложены неизвестные напряжения $f_i^* = f_i$, $f_i = f_i(f_{zi}, f_{ri})$, u_i^0 — известный вектор перемещения точек поверхности V_i в случае однородного слоя при действии на границе заданных усилий.

Известно [3, 4], что напряженное состояние в окрестности концевой части тонкой полости может быть представлено через коэффициенты интенсивности напряжений для эквивалентно нагруженного математического разреза вдоль срединной области полости.

Таким образом, задача об неоднородностях сводится к некоторой краевой задаче теории упругости для слоя с разрезами S_i

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{zz}(r, z_0) = \sigma_{zz}(r, z_{N+1}) = 0 & \quad (0 \leq r < \infty) \\ \sigma_{rz}(r, z_0) = \sigma_{rz}(r, z_{N+1}) = 0, \quad \sigma_{zz}(r, z_i) = f_{zi}^*(r) - f_{zi}(r) & \quad (0 < r < \infty) \\ \sigma_{rz}(r, z_i) = f_{ri}^*(r) - f_{ri}(r) & \quad (0 \leq r < a_i) \end{aligned}$$

где $z = z_0, z = z_{N+1}$ — границы слоя, $z = z_i$ ($i = 1, \dots, N$) — плоскости, содержащие срединные области включений $S_i, z_{i+1} > z_i$.

2. Представим тензор напряженного состояния в слое в виде [5]

$$(2.1) \quad \sigma = \sum_{i=0}^{N+1} \sigma^i$$

Здесь σ^i ($i = 1, \dots, N$) — тензор напряжений в неограниченном пространстве с плоским разрезом вдоль S_i , σ^0, σ^{N+1} — тензоры напряжений в полупространствах с границами $z = z_0$ и $z = z_{N+1}$ соответственно.

Граничные условия для таких вспомогательных задач будут следующими:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{zz}^0(r, z_0) = - \sum_{j=1}^{N+1} \sigma_{zz}^j(r, z_0), \quad \sigma_{rz}^0(r, z_0) = - \sum_{j=1}^{N+1} \sigma_{rz}^j(r, z_0) \\ \sigma_{zz}^{N+1}(r, z_{N+1}) = - \sum_{j=0}^N \sigma_{zz}^j(r, z_{N+1}), \quad \sigma_{rz}^{N+1}(r, z_{N+1}) = - \sum_{j=0}^N \sigma_{rz}^j(r, z_{N+1}) \\ (0 \leq r < \infty) \end{aligned}$$

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \sigma_{zz}^i(r, z_i) = f_{zi}^*(r) - f_{zi}(r) - \sum_{j=0(\neq i)}^{N+1} \sigma_{zz}^j(r, z_i) \\ \sigma_{rz}^i(r, z_i) = f_{ri}^*(r) - f_{ri}(r) - \sum_{j=0(\neq i)}^{N+1} \sigma_{rz}^j(r, z_i) \\ (0 \leq r < a_i), \quad i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

Как известно, осесимметричное напряженное состояние в теле может быть представлено через две гармонические функции Φ_1, Φ_2 . Компоненты тензора напряжений и вектора перемещений для каждого напряженного

состояния σ^i выражаются в виде

$$(2.4) \quad \begin{aligned} 2\mu u_z^i &= (z - z_i) \frac{\partial^2 (\Phi_1^i + \Phi_2^i)}{\partial z^2} - \frac{\partial \Phi_1^i}{\partial z} - (1 - 2\nu) \frac{\partial (\Phi_1^i + \Phi_2^i)}{\partial z} \\ 2\mu u_r^i &= (z - z_i) \frac{\partial^2 (\Phi_1^i + \Phi_2^i)}{\partial r \partial z} + \frac{\partial \Phi_2^i}{\partial r} + (1 - 2\nu) \frac{\partial (\Phi_1^i + \Phi_2^i)}{\partial r} \\ \sigma_{zz}^i &= (z - z_i) \frac{\partial^3 (\Phi_1^i + \Phi_2^i)}{\partial z^3} - \frac{\partial^2 \Phi_1^i}{\partial z^2} \\ \sigma_{rz}^i &= (z - z_i) \frac{\partial^3 (\Phi_1^i + \Phi_2^i)}{\partial z^2 \partial r} + \frac{\partial^2 \Phi_2^i}{\partial r \partial z} \end{aligned}$$

где μ , ν — модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала матрицы. Представим гармонические функции Φ_1^i , Φ_2^i в виде интегральных разложений Ганкеля

$$(2.5) \quad \Phi_k^i(r, z) = - \int_0^\infty \xi^{-1} A_k^i(\xi) \exp(-|z - z_i| \xi) J_0(\xi r) d\xi, \quad k = 1, 2$$

где A_k^i — неизвестные функции, J_0 — функция Бесселя первого рода.

Рассмотрим сначала граничные задачи (2.2). Подставляя в условия (2.2) выражения компонент тензора напряжения через функции Φ_k^i , с учетом интегральных представлений (2.5) и применением преобразования Ганкеля получаем соотношения

$$(2.6) \quad \begin{aligned} A_1^0 + B_0^{N+1} &= - \sum_{j=1}^N B_0^j, \quad A_2^0 + C_0^{N+1} = - \sum_{j=1}^N C_0^j \\ A_1^{N+1} - B_{N+1}^0 &= - \sum_{j=1}^N B_{N+1}^j, \quad A_2^{N+1} - C_{N+1}^0 = - \sum_{j=1}^N C_{N+1}^j \\ B_k^n &= (|z_n - z_m| \xi (A_1^n + A_2^n) + A_1^n) \exp(-|z_n - z_m| \xi) \\ C_k^n &= (|z_n - z_m| \xi (A_1^n + A_2^n) - A_2^n) \exp(-|z_n - z_m| \xi) \\ n, m &= 0, 1, \dots, N+1 \end{aligned}$$

Перейдем к задачам для пространств с трещинами S_i , определяемых граничными условиями (2.3). Рассматривая отдельно случаи отсутствия в плоскости $z_i = 0$ касательных и нормальных напряжений, приходим к следующей системе парных интегральных уравнений:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \int_0^\infty A_1^i(\xi) J_0(\xi r) dr &= 0 \\ \int_0^\infty A_2^i(\xi) J_1(\xi r) d\xi &= 0 \quad (a_i < r < \infty) \\ \int_0^\infty \xi A_1^i(\xi) J_0(\xi r) d\xi &= Q_1^i(r) - \frac{2(1-\nu^2)\varepsilon_i}{h_i(r)} \int_0^\infty A_1^i(\xi) J_0(\xi r) d\xi - \\ &- \sum_{j=0(\neq i)}^{N+1} \int_0^\infty \xi B_j^j(\xi) J_0(\xi r) d\xi \\ \int_0^\infty \xi A_2^i(\xi) J_1(\xi r) d\xi &= Q_2^i(r) - \frac{(1-\nu^2)\varepsilon_i}{(1+\nu_i)h_i(r)} \int_0^\infty A_2^i(\xi) J_1(\xi r) d\xi + \\ &+ \sum_{j=0(\neq i)}^{N+1} \operatorname{sgn}(z_i - z_j) \int_0^\infty \xi C_j^j(\xi) J_1(\xi r) d\xi \quad (0 \leq r < a_i); \quad i = 1, \dots, N \\ Q_1^i &= [u_{zi}^0] \frac{E_i}{2h_i} - f_{zi}, \quad Q_2^i = - [u_{ri}^0] \frac{\mu_i}{2h_i} + f_{ri}, \quad \varepsilon_i = \frac{E_i}{E} \end{aligned}$$

где J_1 — функция Бесселя первого рода, u_{zi}^0, u_{ri}^0 — компоненты вектора \vec{u}_i^0 .

Решение уравнений (2.7) выбираем в следующей форме:

$$(2.8) \quad A_1^i(\xi) = \int_0^{a_i} \varphi_i(t) \sin \xi t dt, \quad A_2^i(\xi) = \int_0^{a_i} \psi_i(t) \cos \xi t dt$$

Здесь $\varphi_i(t), \psi_i(t)$ — функции, непрерывные вместе с первыми производными в интервалах $[0, a_i]$, и, кроме того, $\varphi_i(0) = 0$. Подстановкой выражений (2.8) в первые три уравнения (2.7) убеждаемся, что первое уравнение удовлетворяется тождественно для любых функций $\varphi_i(t)$ рассматриваемого класса, второе — при условии

$$(2.9) \quad \int_0^{a_i} \psi_i(t) dt = 0$$

а третье приводит к интегральному уравнению

$$(2.10) \quad \int_0^r \frac{\varphi_i'(t) dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} = Q_1^i(r) - \frac{2(1 - \nu^2)\varepsilon_i}{h_i(r)} \int_0^{a_i} \frac{\varphi_i(t) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} - \\ - \sum_{j=1(\neq i)}^N \int_0^{a_j} (|z_i - z_j| \left(\varphi_j(t) \int_0^\infty \xi^2 \sin \xi t J_0(\xi r) \exp(-|z_i - z_j|\xi) d\xi + \right. \\ \left. + \psi_j(t) \int_0^\infty \xi^2 \cos \xi t J_0(\xi r) \exp(-|z_i - z_j|\xi) d\xi \right) + \\ \left. + \varphi_j(t) \int_0^\infty \xi \sin \xi t J_0(\xi r) \exp(-|z_i - z_j|\xi) d\xi \right) dt - \\ - \int_0^\infty (B_i^0(\xi) + B_i^{N+1}(\xi)) \xi J_0(\xi r) d\xi$$

Последнее уравнение из (2.7) интегрированием по r на основании соотношений (2.8) может быть приведено к виду

$$(2.11) \quad - \int_0^r \frac{\psi_i(t) dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} = C_i + \int_0^r Q_2^i(r) dr - \\ - \frac{(1 - \nu^2)\varepsilon_i}{(1 + \nu_i)} \int_0^{a_i} \psi_i(t) dt \int_0^r T_i(r, t) dr - \sum_{j=0(\neq i)}^{N+1} \operatorname{sgn}(z_i - z_j) \times \\ \times \int_0^{a_j} (|z_i - z_j| \varphi_j(t) \int_0^\infty \xi \sin \xi t J_0(\xi r) \exp(-|z_i - z_j|\xi) d\xi + \\ + \psi_j(t) \int_0^\infty (|z_i - z_j|\xi - 1) \cos \xi t J_0(\xi r) \exp(-|z_i - z_j|\xi) d\xi) dt - \\ - \int_0^\infty (C_i^0(\xi) - C_i^{N+1}(\xi)) J_0(\xi r) d\xi, \quad T_i = \frac{1}{h_i(r)} \int_0^\infty \cos \xi t J_1(\xi r) d\xi$$

На основании известного решения уравнения Абеля соотношения (2.10), (2.11) приводятся к следующим интегральным уравнениям второго рода:

$$\begin{aligned}
(2.12) \quad & \varphi_i(t) + \frac{4(1-v^2)\varepsilon_i}{\pi} \int_0^{a_i} \varphi_i(x) dx \int_0^{\xi} \frac{r dr}{V(t^2-r^2)(x^2-r^2)h_i(r)} + \\
& + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1(\neq i)}^N \int_0^{a_j} (\varphi_j(x) \int_0^{\infty} (1+\xi|z_i-z_j|) \sin \xi x \sin \xi t \times \\
& \times \exp(-|z_i-z_j|\xi) d\xi + \\
& + \psi_j(x) \int_0^{\infty} \xi \cos \xi x \sin \xi t \exp(-|z_i-z_j|\xi) d\xi) dx + \\
& + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} (B_i^0(\xi) + B_i^{N+1}(\xi)) \sin \xi t d\xi = \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{rQ_1^i(r) dr}{Vt^2-r^2} \\
& \psi_i(t) - \frac{2(1-v^2)\varepsilon_i t}{(1+v_i)\pi} \int_0^{a_i} \psi_i(x) dx \int_0^t \frac{T_i(x,r) dr}{Vt^2-r^2} - \\
& - \frac{2}{\pi} \sum_{j=1(\neq i)}^N \operatorname{sgn}(z_i-z_j) \int_0^{a_j} (\varphi_j(x) |z_i-z_j| \int_0^{\infty} \xi \sin \xi x \cos \xi t \times \\
& \times \exp(-|z_i-z_j|\xi) d\xi + \psi_j(x) \int_0^{\infty} (|z_i-z_j|\xi-1) \cos \xi x \cos \xi t \times \\
& \times \exp(-|z_i-z_j|\xi) d\xi) dx - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} (C_i^0(\xi) - C_i^{N+1}(\xi)) \cos \xi t d\xi = \\
& = -\frac{2}{\pi} C_i - \frac{2}{\pi} t \int_0^t \frac{Q_2^i(r) dr}{Vt^2-r^2}, \quad \xi = \begin{cases} x, & x < t \\ t, & x > t \end{cases} \quad (i=1, \dots, N)
\end{aligned}$$

Определив постоянные C_i путем интегрирования последнего уравнения по t от 0 до a_i с учетом условия (2.9), систему уравнений (2.12) приводим к такому виду:

$$\begin{aligned}
(2.13) \quad & \varphi_i(t) + \frac{4(1-v^2)\varepsilon_i}{\pi} \int_0^{a_i} \varphi_i(x) dx \int_0^{\xi} \frac{r dr}{V(t^2-r^2)(x^2-r^2)h_i(r)} + \\
& + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1(\neq i)}^N \int_0^{a_j} (\varphi_j(x) K_{1,j}(x,t) + \psi_j(x) K_{2,j}(x,t)) dx + \\
& + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} (B_i^0(\xi) + B_i^{N+1}(\xi)) \sin \xi t d\xi = \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{rQ_1^i(r) dr}{Vt^2-r^2} \\
& \psi_i(t) - \frac{2(1-v^2)\varepsilon_i}{(1+v_i)\pi} \int_0^{a_i} \psi_i(x) \left(t \int_0^t \frac{T_i(x,r) dr}{Vt^2-r^2} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{a_i} \int_0^{a_i} t dt \int_0^t \frac{T_i(x,r) dr}{Vt^2-r^2} \right) dx - \\
& - \frac{2}{\pi} \sum_{j=1(\neq i)}^N \operatorname{sgn}(z_i-z_j) \int_0^{a_j} (\varphi_j(x) K_{3,j}(x,t) + \psi_j(x) K_{4,j}(x,t)) dx - \\
& - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} (C_i^0(\xi) - C_i^{N+1}(\xi)) \left(\cos \xi t - \frac{\sin \xi a_i}{\xi a_i} \right) d\xi = \\
& = -\frac{2}{\pi} t \int_0^t \frac{Q_2^i(r) dr}{Vt^2-r^2} + \frac{2}{\pi a_i} \int_0^{a_i} t dt \int_0^t \frac{Q_2^i(r) dr}{Vt^2-r^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{1,j}(x,t) &= \frac{1}{2} |z_j - z_i| (G(x-t) - G(x+t) + D(x-t) - D(x+t)) \\
K_{2,j}(x,t) &= (z_j - z_i)^2 ((x+t) D^2(x+t) + (t-x) D^2(t-x)) \\
K_{3,j}(x,t) &= (z_j - z_i)^2 ((x+t) D^2(x+t) + (x-t) D^2(x-t)) - \frac{1}{2} |z_j - z_i| a_i^{-1} (D(a_i - x) - D(a_i + x)) \\
K_{4,j}(x,t) &= \frac{1}{2} |z_i - z_j| (-G(x+t) - G(x-t) - \\
&\quad - a_i^{-1} ((a_i + x) D(a_i + x) - (a_i - x) D(a_i - x))) - \\
&\quad - \frac{1}{2} (|z_i - z_j| (D(x+t) + D(x-t)) - \\
&\quad - a_i^{-1} \left(\operatorname{arctg} \frac{a_i + x}{|z_i - z_j|} + \operatorname{arctg} \frac{a_i - x}{|z_i - z_j|} \right)) \\
G(y) &= \frac{(z_j - z_i)^2 - y^2}{((z_j - z_i)^2 + y^2)^2}, \quad D(y) = \frac{1}{(z_j - z_i)^2 + y^2}
\end{aligned}$$

Неизвестные функции $A_1^0(\xi)$, $A_2^0(\xi)$, $A_1^{N+1}(\xi)$, $A_2^{N+1}(\xi)$ исключаются из полученных интегральных уравнений при помощи системы алгебраических уравнений (2.6) и выражений (2.8).

Таким образом, задача для слоя с включениями приведена к решению системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода (2.13) и алгебраических уравнений (2.6). Если функции $\varphi_i(t)$ и $\psi_i(t)$ найдены из этих уравнений, то нормальные и касательные напряжения в плоскости $z = z_i$ вне разреза S_i могут быть определены из выражений

$$(2.14) \quad \sigma_{zz}^i = \int_0^\infty \xi A_1^i(\xi) J_0(\xi r) d\xi, \quad \sigma_{rz}^i = - \int_0^\infty \xi A_2^i(\xi) J_1(\xi r) d\xi$$

где $A_1^i(\xi)$, $A_2^i(\xi)$ находятся по формулам (2.8).¹

В частности, асимптотические выражения напряжений в окрестности контуров ($r \rightarrow a_i$) будут иметь вид

$$(2.15) \quad \sigma_{zz}^i = - \frac{\varphi_i(a_i)}{\sqrt{r^2 - a_i^2}} + O(1), \quad \sigma_{rz}^i = - \frac{a_i \psi_i(a_i)}{r \sqrt{r^2 - a_i^2}} + O(1)$$

Здесь $O(1)$ — величина, ограниченная при $r \rightarrow a_i$.

Определяя из соотношений (2.14) коэффициенты интенсивности напряжений K_I , K_{II} и пользуясь результатами работ [3, 4], находим величину [концентрации] нормальных и касательных напряжений в окрестности включений

$$(2.16) \quad \sigma_{zz} = f_{zi} - \frac{2\varphi_i(a_i)}{\sqrt{a_i \rho_i}}, \quad \sigma_{rz} = f_{ri} - \frac{\psi_i(a_i)}{\sqrt{a_i \rho_i}}$$

где ρ_i — радиус кривизны вершины i -го включения.

В качестве примера приведем значения численного анализа уравнений (2.13) для случая бесконечного пространства с двумя одинаковыми сфероидальными включениями. На бесконечности задавалось поле одноосного растяжения в направлении оси включений. Результаты представлены на (фиг. 2) для разных значений параметра $\beta = a/c$ при $\nu = \nu_1 = 0,3$, $H/a = 2$.

Для сравнения приведены также данные работы [6] (штриховая линия), полученные методом эквивалентного включения. Как видно из приведенных кривых, имеет место хорошее соответствие результатов даже для довольно толстых включений и широкого диапазона изменения параметра $\varepsilon_1 = E_1/E$.

Как частные случаи из уравнений (2.13), (2.16) следуют результаты работ [7—9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г. П., Кочаров Р. С., Соткилава О. В. Об одном трещиновидном дефекте в упругой плоскости.— Прикл. механика, 1977, т. 13, вып. 2, с. 48—55.
2. Панасюк В. В., Андрейкив А. Е., Стадник М. М. Упругое равновесие неограниченного тела с тонким включением.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1976, № 7, с. 636—639.
3. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
4. Парис П., Си Дж. Анализ напряженного состояния около трещин.— В кн.: Прикладные вопросы вязкости разрушения. М.: Мир, 1968, с. 64—142.
5. Андрейкив А. Е. Разрушение квазихрупких тел с трещинами при сложном напряженном состоянии. Киев: Наук. думка, 1979. 141 с.
6. Moschovidis Z. A., Mura T. Two ellipsoidal inhomogeneities by the equivalent inclusion method.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1975, v. 42, No. 4, p. 847—852.
7. Панасюк В. В., Силованюк В. П., Стадник М. М. Осесимметричная упругая задача для полупространства с тонким включением.— Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 2, с. 65—69.
8. Панасюк В. В., Стадник М. М., Силованюк В. П. Осесимметричная задача для пространства с периодической системой тонких включений.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1981, № 1, с. 43—45.
9. Стадник М. М., Силованюк В. П. Упругая задача для слоя с тонким включением.— Физ.-хим. механика материалов, 1981, т. 17, № 6, с. 72—76.

Львов

Поступила в редакцию
11.V.1983