

УДК 539.3

## АСИМПТОТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ЗАДАЧАМ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

Роменская Г. И., Сумбатян М. А.

Развивается метод решения задач о равновесии упругих тел конечных размеров, основанный на выделении погранслоистой части решения рассмотрением задачи для полуполосы. Построено замкнутое решение в квадратурах для полуполосы со свободным боковым торцом и с заданными нормальными смещениями продольных граней как при симметричном, так и при антисимметричном нагружении. В случае задания на лицевых гранях нормальных напряжений задача приводится к интегральному уравнению первого рода на полубесконечном интервале, обращение которого получается сведением к бесконечной системе алгебраических уравнений. Рассматриваемый подход к задачам для тел конечных размеров является асимптотическим по малому параметру, характеризующему толщину тела. Апробация метода на плоской задаче для упругого прямоугольника позволяет выяснить диапазон изменения указанного параметра, в котором данный подход обладает достаточной точностью. В рассматриваемом примере для случая квадратной области найдены значения напряжений, которые сравниваются с результатами, полученными ранее другими методами. Исследован характер влияния погранслоистого эффекта на распределение напряжений внутри тела.

Асимптотические методы, применяемые для тел плиточной конфигурации, у которых один из характерных размеров (толщина) значительно меньше двух других [1—4], по-видимому, можно отнести к трем направлениям. Первое из них [5, 6] характеризуется применением сращиваемых асимптотических разложений к некоторому классу решений уравнений теории упругости, а именно к однородным решениям. Второе направление [7, 8] отличается асимптотическим анализом непосредственно уравнений теории упругости. При этом выясняется, что для выделения погранслоистой части решения достаточно в первом приближении рассмотреть плоскую задачу и задачу кручения для полуполосы, боковой торец которой совмещен с образующей боковой поверхности плиты в данной точке. Наконец, к третьему направлению отнесем теории типа Векуа — Понятовского [9, 10], в которых также развиваются асимптотические методы [11]. В этом смысле данная работа относится ко второму из указанных направлений.

1. В декартовой системе координат  $x, y$  рассмотрим статическую задачу о плоской деформации упругой изотропной полуполосы (ось  $x$  является осью симметрии и направлена параллельно лицевым сторонам, ось  $y$  совмещена с торцом полуполосы) со следующими граничными условиями:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} x = 0, \quad \tau_{xy} = 0, \quad \sigma_x = 0 \\ y = \pm 1, \quad \tau_{xy} = 0, \quad u_y = \pm f(x) \end{aligned}$$

Граничную функцию  $f(x)$  предполагаем достаточно гладкой.

В этом симметричном случае (случай растяжения — сжатия) задача рассматривалась в [12], где получено ее замкнутое решение, основанное на теории дислокаций. Здесь будет получен аналогичный результат с использованием известного классического представления решения для полуполосы ( $\nu$  — коэффициент Пуассона) [2]

$$\begin{aligned} u_x = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ A(s) \operatorname{ch} sy + C(s) \left( \frac{3m-4}{ms} \operatorname{ch} sy + y \operatorname{sh} sy \right) \right] \sin sx \, ds + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} (B_n + D_n x) e^{-\alpha_n x} \cos \alpha_n y \end{aligned}$$

$$u_y = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [A(s) \operatorname{sh} sy + C(s) y \operatorname{ch} sy] \cos sx \, ds + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left( B_n + D_n x - D_n \frac{3m-4}{m\alpha_n} \right) e^{-\alpha_n x} \sin \alpha_n y; \quad \alpha_n = \pi n, \quad m = \frac{1}{\nu}$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.1), получаем соотношения

$$(1.2) \quad A(s)s = -C(s) \left( 2 \frac{m-1}{m} + s \operatorname{cth} s \right), \quad B_n \alpha_n = 2 \frac{m-1}{m} D_n$$

$$C(s) \frac{\operatorname{sh} s}{s} = -\frac{m}{2(m-1)} \int_0^{\infty} f(t) \cos st \, dt$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos \pi n y = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} C(s) [\operatorname{ch} sy (1 - s \operatorname{cth} s) + sy \operatorname{sh} sy] \, ds$$

Далее находим коэффициенты ряда Фурье в последнем соотношении (1.2) и используем выражение для функции  $C(s)$  из третьего соотношения (1.2). Ограничиваясь функциями  $f(x)$ , стремящимися к нулю при  $x \rightarrow \infty$ , после интегрирования по  $s$  [13] получим;

$$(1.3) \quad D_n = (-1)^n \alpha_n \frac{m}{1-m} \int_0^{\infty} f'(t) t e^{-\alpha_n t} \, dt$$

Теперь для функции Эри  $\psi(x, y)$  имеем следующее представление:

$$(1.4) \quad \frac{1}{2G} \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{1}{2G} \int \tau_{xy} \, dx = \\ = \frac{1}{\pi} \frac{m}{m-1} \int_0^{\infty} f'(t) \, dt \int_0^{\infty} \left( \frac{\operatorname{ch} s \operatorname{sh} sy}{\operatorname{sh}^2 s} - y \frac{\operatorname{ch} sy}{\operatorname{sh} s} \right) \sin st \cos sx \, ds + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \sum_{n=1}^{\infty} D_n \left( x + \frac{1}{\alpha_n} \right) e^{-\alpha_n x} \frac{\cos \alpha_n y}{\alpha_n}$$

Интеграл по  $s$ , входящий в формулу (1.4), вычисляется интегрированием по частям первого члена. Для вычисления ряда, входящего в (1.4), используем представление (1.3) и формулы для суммирования появляющихся при этом рядов [13]. В результате, интегрируя (1.4) по  $y$ , для функции Эри окончательно получаем

$$(1.5) \quad \psi(x, y) = -\frac{2G}{1-\nu} \int_0^{\infty} f'(t) \Psi(x, y, t) \, dt \\ \Psi(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{t-x}{2} \ln \frac{\chi^-}{\chi^+} + \pi x t \frac{\operatorname{sh} \pi(t+x)}{\chi^+} \right] \\ \chi^{\pm} = \operatorname{ch} \pi(t \pm x) + \cos \pi y$$

что с точностью до обозначений совпадает с результатом работы [12].

Если функция  $f(x)$  стремится при  $x \rightarrow \infty$  к постоянному значению  $f_0$ , отличному от нуля, то к полученному выражению (1.5) надо добавить решение для равномерно обжатой полуполосы

$$\psi(x, y) = G(1-\nu)^{-1} f_0 x^2$$

Рассмотрим теперь задачу для полуполосы в антисимметричном случае (случай изгиба), когда граничные условия имеют вид

$$(1.6) \quad x = 0, \quad \tau_{xy} = 0, \quad \sigma_x = 0 \\ y = \pm 1, \quad \tau_{xy} = 0, \quad u_y = f(x)$$

Проводя рассуждения, аналогичные изложенным выше, получаем следующее представление для функции Эри:

$$(1.7) \quad \psi(x, y) = -\frac{2G}{1-\nu} \int_0^{\infty} f(t) \Psi(x, y, t) dt$$

$$\Psi(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{t-x}{2} \ln \frac{\chi_1^+ \chi_2^-}{\chi_1^- \chi_2^+} + \frac{2\pi x t}{\chi^+} \sin \frac{\pi}{2} y \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} (t+x) \right]$$

$$\chi_1^{\pm} = \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} (t+x) \pm \sin \frac{\pi}{2} y, \quad \chi_2^{\pm} = \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} (t-x) \pm \sin \frac{\pi}{2} y$$

В случае обобщенного плоского напряженного состояния надо в формулах (1.5), (1.7)  $2G/(1-\nu)$  заменить на  $E$ .

Очевидно, что решение задачи с произвольно заданными перемещениями лицевых граней может быть представлено в виде суммы симметричного и антисимметричного решений.

2. Рассмотрим первую основную граничную задачу для полуполосы, когда на ее лицевые стороны действует заданная нагрузка. Для простоты ограничимся симметричным случаем со следующими граничными условиями:

$$(2.1) \quad x = 0, \tau_{xy} = 0, \sigma_x = 0$$

$$y = \pm 1, \tau_{xy} = 0, \sigma_y = g(x)$$

Задача сводится к нахождению функции  $f(x)$  из интегрального уравнения первого рода на отрезке  $(0, \infty)$ , которое получается из (1.5) при  $y = 1$  применением к нему операции  $\partial^2/\partial x^2$ . Выделим в этом интегральном уравнении оператор, соответствующий задаче для бесконечной полосы, и обратим его. В итоге приходим к соотношению

$$(2.2) \quad f(x) = G(x) - \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau \int_0^{\infty} K(x, t) \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{t\tau}{\operatorname{ch} \pi(t+\tau) - 1} \right] dt$$

$$K(x, t) = 2 \int_0^{\infty} \frac{L(u)}{u} \cos ux \cos ut du$$

$$G(x) = \frac{1-\nu}{\pi G} \int_0^{\infty} g(t) K(x, t) dt, \quad L(u) = \frac{\operatorname{ch} 2u - 1}{\operatorname{sh} 2u + 2u}$$

Далее, учитывая соотношение

$$[\operatorname{ch} \pi(t+\tau) - 1]^{-1} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\pi k(t+\tau)}$$

интегрируем по  $\tau$ , используя формулу (1.3), после чего получаем

$$(2.3) \quad f(x) = G(x) - 8(1-\nu) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k D_k \int_0^{\infty} L(u) \frac{u \cos ux}{(\pi^2 k^2 + u^2)^2} du$$

Дифференцируем соотношение (2.3) и умножаем скалярно на  $x \operatorname{exr}(-\pi n x)$ . В результате проблему нахождения неизвестной функции  $f(x)$  удастся свести к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $D_n$ :

$$(2.4) \quad D_n = g_n + \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} D_k, \quad g_n = \frac{\pi n (-1)^n}{1-\nu} \int_0^{\infty} G'(x) x e^{-\pi n x} dx$$

$$c_{nk} = 16\pi^2 n^2 k (-1)^{n+k} \int_0^{\infty} \frac{L(u) u^3 du}{(\pi^2 n^2 + u^2)^2 (\pi^2 k^2 + u^2)^2}; \quad n = 1, 2, \dots$$

Заметим, что «вырожденное» решение системы (2.4)  $D_n = g_n$  соответствует задаче для бесконечной полосы.

Подобная система для задачи, родственной к рассматриваемой, другим путем получена в [2], где для ее исследования применялся аппарат бесконечных систем Кояловича. Из результатов [2] следует, что при достаточно гладкой функции  $g(x)$  система (2.4) регулярна, к ней применим метод редукции и справедливо соотношение

$$(2.5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n D_n n = a_0 = \text{const}$$

Показано также [2], что в случае, когда граничные значения удовлетворяют условию парности касательных напряжений в угловой точке области (а в рассматриваемой задаче это так), все напряжения и перемещения в этой точке конечны.

Находя коэффициенты  $D_n$  и подставляя их в (2.3), определяем функцию  $f(x)$ , после чего с использованием формулы (1.5) находим распределение напряжений в полуполосе. В частности, имеем

$$(2.6) \quad \sigma_y = \sigma_y^\circ - 2G \sum_{n=1}^{\infty} D_n b_n(x, y)$$

$$b_n(x, y) = (\pi n x - 1) e^{-\pi n x} \cos \pi n y + I^+(x, y)$$

$$(2.7) \quad \sigma_x = \sigma_x^\circ + 2G \sum_{n=1}^{\infty} D_n c_n(x, y)$$

$$c_n(x, y) = (\pi n x + 1) e^{-\pi n x} \cos \pi n y - I^-(x, y)$$

$$I^\pm(x, y) =$$

$$= 8n (-1)^n \int_0^\infty \frac{\text{sh } u \text{ ch } uy \pm (\text{ch } u \text{ ch } uy - y \text{ sh } u \text{ sh } uy)}{\text{sh } 2u + 2u} \frac{u^2 \cos ux}{(\pi^2 n^2 + u^2)^2} du$$

Знаком  $^\circ$  обозначены напряжения, соответствующие задаче для бесконечной полосы.

Интересно проверить выполнимость граничных условий в полученных выражениях для напряжений. Если в (2.6) положить  $y = \pm 1$  и вычислить интеграл, входящий в представление для  $b_n$ , то легко получить, что  $b_n(x, \pm 1) \equiv 0$ . Таким образом, выражение (2.6) автоматически удовлетворяет последнему из граничных условий (2.1), независимо от того, какие значения принимают коэффициенты  $D_n$ . Можно убедиться также, что автоматически удовлетворяется условие равновесия полуполосы

$$\int_0^\infty \sigma_y dx = \int_0^\infty g(x) dx, \quad -1 \leq y \leq 1$$

В отличие от этого формула (2.7) не дает автоматического обращения в нуль напряжения  $\sigma_x$  при  $x = 0$ , и это граничное условие должно выполняться при подстановке в (2.7) истинных значений коэффициентов  $D_n$ .

Исследуем скорость затухания погранслоев. Используя теорию вычетов, можно показать, что  $b_n(x, y)$  и  $c_n(x, y)$  убывают при  $x \rightarrow \infty$ , как  $x^a \exp(-\delta_n x)$  ( $a > 0$  — некоторая постоянная). Здесь  $\delta_n$  принимает значения мнимой части нулей функции  $\text{sh } 2u + 2u$ , лежащих в верхней полуплоскости, а также значения, равные  $\pi n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Поскольку, как было отмечено во введении, рассматриваемая задача для полуполосы асимптотически охватывает теорию плит, то установленный характер скорости убывания погранслоев остается верным и для плит с произвольной

гладкой боковой поверхностью. Полученный результат совпадает с результатами работ [5, 6].

3. Применим развитую выше методику для полуполосы к асимптотическому анализу плоской задачи для узкого прямоугольника ( $-1/\lambda \leq x \leq 1/\lambda$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ ),  $\lambda$  — малый параметр.

При малой толщине области, очевидно, погранслоем в окрестности правой боковой стороны  $x = 1/\lambda$  слабо влияет на левый погранслой в окрестности стороны  $x = -1/\lambda$ , и наоборот. В силу этого для построения погранслойных решений в первом приближении достаточно рассмотреть задачи для двух полуполос ( $-1/\lambda \leq x < \infty$ ) и ( $-\infty < x \leq 1/\lambda$ ). Именно, применяя идею, впервые, видимо, использованную в контактных задачах для тонкого слоя [14, 15], представим асимптотически верное решение задачи в виде

$$(3.1) \quad \varphi(x) = \varphi_1\left(\frac{1}{\lambda} + x\right) + \varphi_2\left(\frac{1}{\lambda} - x\right) - v(x), \quad |x| \leq \frac{1}{\lambda}$$

Здесь  $\varphi(x)$  — любое из напряжений или перемещений в прямоугольнике,  $\varphi_1$  — аналогичная функция в первой полуполосе,  $\varphi_2$  — во второй полуполосе,  $v(x)$  — в бесконечной полосе ( $-\infty < x < \infty$ ). Погрешность представления (3.1) имеет порядок  $\exp(-\varepsilon/\lambda)$  при  $\lambda \rightarrow 0$  ( $\varepsilon > 0$ ), ибо, как показано в [16, 17], погранслойные части решения задачи в тонком прямоугольнике экспоненциально затухают при удалении внутрь области.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу. Пусть  $\lambda = 1$ ,  $g(x) = -A \cos \lambda x$ . Эта задача для случая квадратной области была рассмотрена [2] другим методом; здесь же она позволит оценить область изменения параметра  $\lambda$ , в которой предлагаемый асимптотический подход обладает достаточной эффективностью.

Видно, что ряды в (2.6), (2.7) (учитываем соотношение (2.5)) обладают высокой скоростью сходимости везде, кроме окрестности бокового торца полуполосы  $x = 0$ . Для вычисления  $\sigma_y$  при  $x = 0$  в (2.6) вместо  $D_n$  подставляли представление (2.4) и после суммирования по  $n$  получали ряд по  $k$  с общим членом, убывающим с ростом  $k$ , как  $1/k^4$ . Для вычисления  $\sigma_x$  в окрестности торца  $x = 0$  в формуле (2.7) брали конечное число  $D_n$ , а далее подставляли асимптотическое выражение (2.5), после чего ряд суммировался в конечном виде.

Для получения числовых результатов была составлена программа на языке Фортран для ЭВМ ЕС-1022. Процедура вычисления интегралов, входящих в коэффициенты  $b_n$  и  $c_n$  (2.6) и (2.7), а также в (2.4), взята из [18].

В табл. 1 значения напряжений  $\sigma_y^* = A^{-1}10^3\sigma_y$  и  $\sigma_x^* = A^{-1}10^3\sigma_x$  в полуполосе при  $y = 0$  сравниваются с соответствующими значениями  $\sigma_y^{0*}$  и  $\sigma_x^{0*}$  для бесконечной полосы. Замечаем, что на расстоянии от торца порядка толщины плиты они различаются менее чем на 4%, что позволяет оценить скорость затухания погранслойного эффекта, обусловленного нулевыми граничными условиями на торце полуполосы. В рассматриваемом примере  $\sigma_y^0$  и  $\sigma_x^0$  выражаются через элементарные функции.

В табл. 2 значения напряжений  $\sigma_y^*$ , полученные по формуле (3.1) в рассматриваемой квадратной области и представленные нечетными строками, сравниваются с аналогичными значениями, полученными в [2] (последние указаны в скобках). Аналогичное сравнение для напряжений  $\sigma_x^*$  представлено четными строками. Вычисления про-

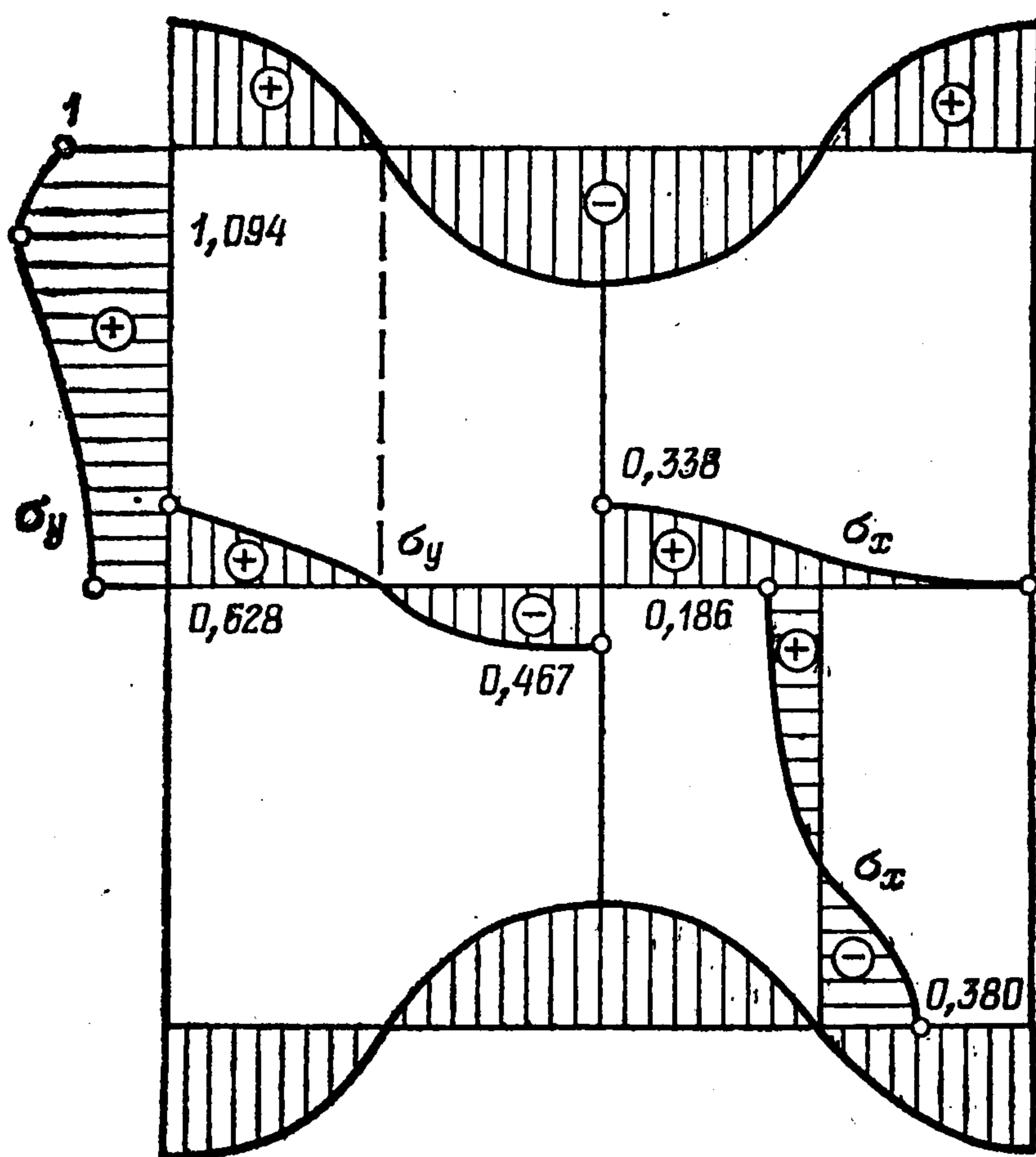
Таблица 1

$x$	0,0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	2,0
$\sigma_y^*$	640	551	288	-6,2	-254	-393	-388	-251	-33	182	338
$\sigma_y^{0*}$	350	333	206	0	-206	-333	-333	-206	0	206	350
$\sigma_x^*$	0	10	75	161	236	267	237	148	25	-92	-176
$\sigma_x^{0*}$	-182	-173	-107	0	107	173	173	107	0	-107	-182

$y$	$x=0$	0,5	1
0	-467 (-465,7) 338 (334,0)	-39,5 (-41,0) 186 (180,5)	628 (604,8) -3,1 (-0,7)
0,5	-649 (-647,9) 171 (171,3)	-48,7 (-50,2) 61,3 (61,0)	899 (893,7) -2,7 (0,6)
1	-1000 (-1000) -1172 (-1163,7)	0 (0) -380 (-371,5)	1000 (1001,7) - (0,2)

водились при сохранении в бесконечной системе (2.4), а также во всех бесконечных рядах 5, 10 и 18 членов. Представленные в табл. 2 результаты для всех трех случаев практически идентичны.

Заметим, что значения, проведенные в табл. 2, несут погрешность решения граничной задачи для полуполосы и погрешность формулы (3.1), справедливой асимпто-



тически лишь для тонких областей. Тем не менее приведенное сравнение указывает на эффективность метода уже для областей, толщина которых соизмерима с протяженностью.

На фигуре приведены эпюры распределения напряжений внутри квадрата.

Время вычисления любого из напряжений  $\sigma_x$  или  $\sigma_y$  в произвольной точке области (кроме угловой) в среднем составляет 10—25 с.

Авторы благодарят Н. Х. Арутюняна, В. М. Александрова, А. Л. Гольденвейзера, В. Т. Гринченко, Б. Л. Абрамяна и А. В. Белоконя за обсуждение работы. Процедуру вычисления интегралов авторам любезно предоставил Г. П. Стрельников.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Галинъш А. К. Расчет пластин и оболочек по уточненным теориям. — В кн.: Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1967, № 5, с. 66—92; 1970, № 6—7, с. 23—64.
2. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев: Наук. думка, 1978. 264 с.
3. Воронич И. И. Некоторые результаты и проблемы асимптотической теории пластин и оболочек. — В кн.: Матер. 1-й Всес. школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1975, с. 51—150.

4. *Суслова Н. Н.* Методы решения пространственной задачи теории упругости для тела в форме параллелепипеда. — В кн.: Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. Т. 13. М.: ВИНТИ, 1980, с. 187—296.
5. *Аксентян О. К., Ворovich И. И.* Напряженное состояние плиты малой толщины. — ПММ, 1963, т. 27, вып. 6, с. 1057—1074.
6. *Ворovich И. И., Малкина О. С.* Напряженное состояние толстой плиты. — ПММ, 1967, т. 31, вып. 2, с. 230—241.
7. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. — ПММ, 1962, т. 26, вып. 4, с. 668—686.
8. *Friedrichs K. O., Dressler R. F.* A boundary — layer theory for elastic plates. — *Commun. Pure and Appl. Math.*, 1961, v. 14, No. 1, p. 1—33.
9. *Векуа И. Н.* Об одном методе расчета призматических оболочек. — Тр. Тбил. матем. ин-та, 1955, т. 21, с. 191—259.
10. *Понятовский В. В.* К теории пластин средней толщины. — ПММ, 1962, т. 26, вып. 2, с. 335—341.
11. *Прусаков А. П.* О построении теории изгиба пластин средней толщины энергo-асимптотическим методом. — Прикл. механика, 1975, т. 11, вып. 10, с. 44—51.
12. *Инденбом В. Л., Даниловская В. И.* Новый класс точных решений бигармонической задачи для полуполосы. — Докл. АН СССР, 1968, т. 180, № 6, с. 1319—1322.
13. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 798 с.
14. *Александров В. М.* Асимптотические методы в контактных задачах теории упругости. — ПММ, 1968, т. 32, вып. 4, с. 672—683.
15. *Ворovich И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
16. *Ворovich И. И., Ковальчук В. Е.* О базисных свойствах одной системы однородных решений. — ПММ, 1967, т. 31, вып. 5, с. 861—869.
17. *Ковальчук В. Е.* О поведении решения первой основной задачи теории упругости для длинной прямоугольной плиты. — ПММ, 1969, т. 33, вып. 3, с. 511—518.
18. *Garriba S., Quartapelle L., Reina G.* Algorithm 36. SNIFF: Efficient Self — Turning Algorithm for Numerical Integration. — *Computing*, 1978, v. 20, No. 4, p. 363—375.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию  
21.II.1983