

УДК 539.375;532.516

## КОНТАКТНО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ СМАЗКИ ДЛЯ УПРУГИХ ТЕЛ С ТРЕЩИНАМИ

Кудиш И. И.

Предлагается механическая модель процесса смазки упругих тел, ослабленных трещинами, при помощи которой можно объяснить причины усталостного выкрашивания поверхностей. Учитывается наличие краевых и подповерхностных трещин; при этом основной интерес представляет взаимодействие смазки с упругими телами в полостях краевых трещин. Получены условия, характеризующие реальное поведение смазки в полостях краевых трещин, учитывающие возрастание давления в замкнутых полостях, полностью заполненных смазкой, и возможное возникновение кавитации. Задача сводится к системе нелинейного интегродифференциального и линейных интегральных уравнений с дополнительными условиями в форме равенств и неравенств.

Методом регулярных возмущений рассматривается режим легко нагруженного упругогидродинамического контакта. При этом задача сводится к последовательности чисто гидродинамических краевых задач для нелинейного или линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и упругих задач для линейных интегральных уравнений с односторонними ограничениями.

Анализ влияния температуры и смазки на контактные напряжения при учете шероховатости тел проведен в [1—3], а развитие и влияние трещин на усталостную долговечность — в работах [4—7].

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим плоскую изотермическую задачу о медленном качении одного по другому двух бесконечных круговых цилиндров с параллельными образующими и радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , разделенных тонким слоем смазки (одним из таких цилиндров может служить бесконечная цилиндрическая полость в упругом теле). На цилиндры действует сжимающая погонная сила  $P$ . Будем считать цилиндры гладкими и выполненными из одинакового упругого материала, ослабленного трещинами. Для простоты примем, что смазка — несжимаемая ньютоновская жидкость.

Из перечисленных предположений и допущения о малости толщины слоя смазки по сравнению с его протяженностью следует [1, 3] уравнение Рейнольдса

$$(1.1) \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{dp}{dx} \right) = \frac{u_1^\circ + u_2^\circ}{2} \frac{dh}{dx}$$

описывающее поведение смазки в контакте. При выводе уравнения (1.1), кроме того, использовано предположение о том, что все полости, образованные трещинами, выходящими на поверхность тела (краевыми трещинами), заполнены смазкой. В (1.1)  $x$  — абсцисса в системе координат, связанной со срединной линией в слое смазки, ось ординат которой проходит через центры кривизн цилиндров,  $p = p(x)$  — контактное давление,  $h = h(x)$  — зазор между контактирующими телами,  $\mu = \mu(p)$  — коэффициент динамической вязкости смазки,  $u_1^\circ$  и  $u_2^\circ$  — линейные скорости точек поверхностей нижнего и верхнего тел. На фиг. 1 изображены катящиеся цилиндры и возникающее между ними давление.

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние упругих тел. Для простоты примем, что в верхнем цилиндре трещины отсутствуют, а

в нижнем имеется  $N$  прямолинейных трещин. Предположим, что: 1) на берегах трещин трение отсутствует или 2) на берегах открытых участков трещин трение отсутствует, а на сомкнутых участках берегов трещин реализуется полное сцепление. Первый тип граничных условий на берегах трещин соответствует слабому, а второй — сильному когезионному взаимодействию материала тел.

Учитывая приложенное к границам контактирующих тел давление  $p(x)$ , получим, что в указанных выше допущениях напряженно-деформированное состояние трещин в нижнем теле в квазистационарном приближении описывается системой уравнений [6, 7]

$$(1.2) \quad \int_{-l_n}^{l_n} \frac{v_n'(t) dt}{t-x_n} + \sum_{k=1}^N \int_{-l_k}^{l_k} \{v_k'(t) U_{nk}^r(t, x_n) - u_k'(t) V_{nk}^r(t, x_n)\} dt =$$

$$= \frac{4\pi}{E'} p_n(x_n) - \frac{4}{E'} \int_{x_i}^{x_e} p(\tau) D_n^r(\tau, x_n) d\tau$$

$$\int_{-l_n}^{l_n} \frac{u_n'(t) dt}{t-x_n} + \sum_{k=1}^N \int_{-l_k}^{l_k} \{-u_k'(t) V_{nk}^i(t, x_n) + v_k'(t) U_{nk}^i(t, x_n)\} dt =$$

$$= -\frac{4}{E'} \int_{x_i}^{x_e} p(\tau) D_n^i(\tau, x_n) d\tau; \quad n=1, 2, \dots, N$$

$$(1.3) \quad U_{nk}^r + iU_{nk}^i = \overline{R_{nk} + S_{nk}}, \quad V_{nk}^r + iV_{nk}^i = -\overline{i(S_{nk} - R_{nk})}$$

$$D_n^r + iD_n^i = \overline{D_n}$$

$$R_{nk}(t, x_n) = (1 - \delta_{nk}) K_{nk}(t, x_n) + \frac{e^{i\alpha_k}}{2} \left\{ \frac{1}{X_n - \overline{T}_k} + \frac{e^{-2i\alpha_n}}{X_n - T_k} + \right.$$

$$\left. + (\overline{T}_k - T_k) \left[ \frac{1 + e^{-2i\alpha_n}}{(X_n - \overline{T}_k)^2} - \frac{2e^{-2i\alpha_n}(X_n - T_k)}{(X_n - T_k)^3} \right] \right\}$$

$$S_{nk}(t, x_n) = (1 - \delta_{nk}) L_{nk}(t, x_n) + \frac{e^{-i\alpha_k}}{2} \left[ \frac{T_k - \overline{T}_k}{(X_n - \overline{T}_k)^2} + \frac{1}{X_n - T_k} - \right.$$

$$\left. - e^{-2i\alpha_n} \frac{X_n - T_k}{(X_n - T_k)^2} \right]$$

$$K_{nk}(t, x_n) = \frac{e^{i\alpha_k}}{2} \left( \frac{1}{T_k - X_n} + \frac{e^{-2i\alpha_n}}{\overline{T}_k - X_n} \right)$$

$$L_{nk}(t, x_n) = \frac{e^{-i\alpha_k}}{2} \left[ \frac{1}{\overline{T}_k - X_n} - \frac{T_k - X_n}{(\overline{T}_k - X_n)^2} e^{-2i\alpha_n} \right]$$

$$D_n(\tau, x_n) = \frac{i}{2} \left[ -\frac{1}{\tau - X_n} + \frac{1}{\tau - X_n} - \frac{e^{-2i\alpha_n}(X_n - X_n)}{(\tau - X_n)^2} \right]$$

$$(1.4) \quad X_n = x_n e^{i\alpha_n} + z_n^\circ, \quad T_k = t e^{i\alpha_k} + z_k^\circ$$

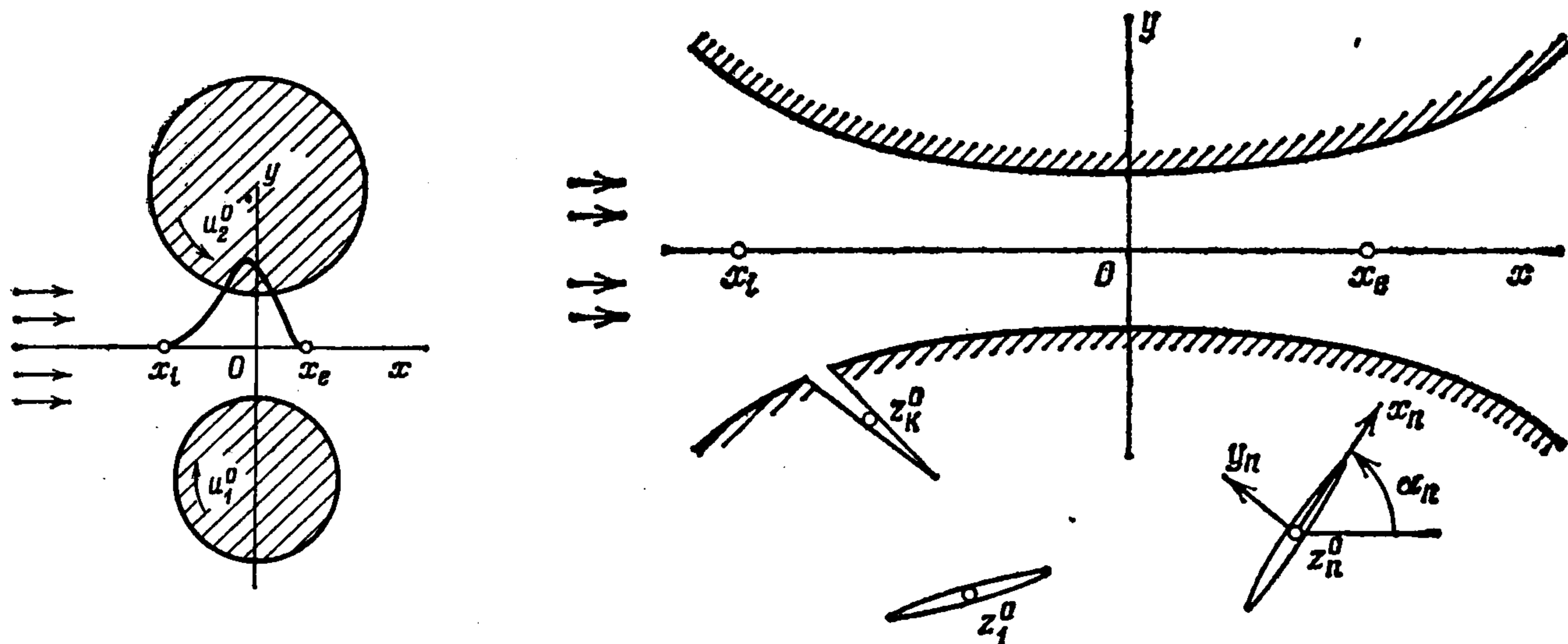
$$z_k^\circ = x_k^\circ + i \left[ y_k^\circ + \frac{1}{2} h(x_k^\circ) \right]$$

На фиг. 2 изображен общий вид расположения трещин в упругом теле и взаимного расположения основной и локальной систем координат. При этом  $x_n$  — абсцисса в локальной системе координат, связанной с  $n$ -й трещиной, а  $\alpha_n$  — угол между осями абсцисс локальной и основной систем координат,  $z_n^\circ$  — комплексные координаты начала локальной системы отсчета, связанной с  $n$ -й трещиной,  $l_n$  — полудлина  $n$ -й трещины,  $v_n$  и  $u_n$  — соответственно скачки нормального и касательного перемеще-

ний берегов  $n$ -й трещины,  $p_n$  — нормальное напряжение, приложенное к берегам  $n$ -й трещины,  $E' = E/(1 - \nu^2)$  — приведенный модуль упругости материалов тел,  $x_i$  и  $x_e$  — координаты соответственно точек входа и выхода из области контакта в основной системе координат,  $\delta_{nk}$  — символ Кронекера.

Остановимся на анализе условий, которые необходимо добавить к уравнениям (1.2)—(1.4) в зависимости от того, являются ли трещины краевыми или подповерхностными и смыкаются их берега или нет.

Рассмотрим сначала подповерхностные трещины. На открытых участках этих трещин нормальные напряжения равны нулю, а на закрытых



Фиг. 1

Фиг. 2

участках нормальные напряжения неположительны. В результате имеем систему альтернативных равенств и неравенств

$$(1.5) \quad \begin{aligned} p_n(x_n) = 0, \quad v_n(x_n) > 0, \\ p_n(x_n) \leq 0, \quad v_n(x_n) = 0, \end{aligned} \quad |l_n \sin \alpha_n| < \left| y_n^0 + \frac{1}{2} h(x_n^0) \right|$$

В случае граничных условий типа 2) к соотношениям (1.5) на закрытых участках трещин необходимо добавить условие

$$(1.6) \quad u_n(x_n) = 0, \quad v_n(x_n) = 0; \quad |l_n \sin \alpha_n| < \left| y_n^0 + \frac{1}{2} h(x_n^0) \right|$$

Остановимся на случае краевых трещин. Рассмотрим  $n$ -ю краевую трещину, вершина которой выходит на поверхность тела в точке  $x^0 = x_n^0 + l_n \cos \alpha_n \operatorname{sign} \alpha_n$ . Будем говорить, что горловина трещины открыта, если  $v_n(l_n \operatorname{sign} \alpha_n) > 0$ , и закрыта, если  $v_n(l_n \operatorname{sign} \alpha_n) = 0$ . Предположим, что в рассматриваемой трещине имеется несколько сомкнувшихся участков ее берегов. При этом в трещине существует некоторое число полостей, содержащих смазку, которые не сообщаются ни одна с другой, ни со слоем смазки, обтекающим тело. Будем считать, что смазка в полостях трещины находится в состоянии гидростатического равновесия. Требуется установить дополнительные условия на каждом из перечисленных выше участков трещины.

Из физических соображений следует, что  $v_n(x_n) \geq 0$ . Определим непересекающиеся односвязные множества точек  $\operatorname{supp} v_n^i(x_n^0)$ , для которых  $v_n(x_n) > 0$ . Нумерацию этих множеств (полостей) введем, начиная с поверхности тела. В каждом из множеств  $\operatorname{supp} v_n^i$  реализуется свое, вообще говоря, заранее неизвестное постоянное давление в смазке. Поэтому соответствующие напряжения на берегах трещины, которые возникают благодаря давлению, производимому смазкой, будем обозначать  $p_n^i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Пусть горловина трещины открыта и примыкающее к ней

множество есть  $\text{supp } v_n^1$ . При этом полость  $\text{supp } v_n^1$  сообщается со слоем смазки, обтекающим поверхность, и поэтому естественно принять, что давление в полости  $\text{supp } v_n^1$  равно давлению в горловине. Имеем

$$(1.7) \quad p_n^1 = -p(x_n^0 + l_n \cos \alpha_n \text{sign } \alpha_n), \quad v_n(l_n \text{sign } \alpha_n) > 0 \\ |l_n \text{sign } \alpha_n| = |y_n^0 + 1/2 h(x_n^0)|$$

Рассмотрим теперь полости  $\text{supp } v_n^i$ , которые не сообщаются через горловину с обтекающим поверхность слоем смазки. Очевидно, что не сообщаемые со слоем смазки полости определяются множеством индексов

$$(1.8) \quad I_n(x_n^0) = \left\{ i, \text{supp } v_n^i \cap \left\{ (x, y), y = -\frac{h(x_n^0)}{2} \right\} = \emptyset, i = 1, 2, \dots \right\}$$

Предположим, что напряжение разрыва смазочной жидкости равно нулю. Тогда напряжения в полостях трещины  $p_n^i \leq 0, i \in I_n(x_n^0)$ .

Рассмотрим  $i$ -ю полость:  $\text{supp } v_n^i, i \in I_n(x_n^0)$ . Заметим, что в процессе движения тела изменяется его напряженно-деформированное состояние, а значит, и конфигурация  $i$ -й полости  $n$ -й краевой трещины. Однако объем  $i$ -й полости не может стать меньше объема, занимаемого смазкой в этой полости. Это следует из несжимаемости смазочной жидкости. Таким образом, имеем  $V_n^i \geq V_{n0}^i$ , где  $V_{n0}^i$  — объем смазки в  $i$ -й полости, а

$$V_n^i = V_n^i(x_n^0) = \int_{\text{supp } v_n^i} v_n(x_n) dx_n$$

— объем  $i$ -й полости. Более детальное рассмотрение приводит к следующим выводам: если в  $i$ -й полости возникают каверны, т. е. объемы, свободные от смазки, то  $p_n^i = 0$ , а если смазка занимает всю полость, то  $p_n^i \leq 0$  (давлением паров смазочной жидкости в образовавшейся каверне и давлением поверхностного натяжения смазки пренебрегается). При этом возникают явления кавитации. В результате имеем систему альтернативных равенств и неравенств

$$(1.9) \quad p_n^i = 0, \quad V_n^i > V_{n0}^i, \quad i \in I_n(x_n^0); \quad |l_n \sin \alpha_n| = |y_n^0 + 1/2 h(x_n^0)| \\ p_n^i \leq 0, \quad V_n^i = V_{n0}^i,$$

Метод определения объема смазки  $V_{n0}^i$  будет описан ниже.

Заметим, что условия (1.9) для  $i$ -й полости выполняются до тех пор, пока соседние полости не начинают сообщаться с ней, т. е.

$$(1.10) \quad \text{supp } v_n^i \cap \text{supp } v_n^j = \emptyset, \quad i \neq j; \quad i, j \in \bar{I}_n(x_n^0)$$

Соотношения (1.8)—(1.10) служат теми необходимыми дополнительными условиями, исходя из которых определяется заранее неизвестное напряжение  $p_n^i$ , действующее на границы полости  $\text{supp } v_n^i, i \in I_n(x_n^0)$ .

Остановимся на способе определения объемов смазки  $V_{n0}^i$ , содержащихся в полостях  $\text{supp } v_n^i$ . Выше, при выводе соотношений (1.9), фактически предполагалось, что первоначально, т. е. при  $x_n^0 = -\infty$ , все краевые трещины открыты и заполнены смазкой. По мере движения тел трещины будут приближаться к области контакта  $[x_l, x_r]$  и при этом будет изменяться их конфигурация.

Рассмотрим поведение  $n$ -й краевой трещины в процессе ее движения. Пусть в точках  $x = x_n^0 - \varepsilon$  ( $\varepsilon \rightarrow +0$ ) расположения центра  $n$ -й открытой трещины ее берега не соприкасаются, а в точке  $x = x_n^0$  берега трещины сомкнутся так, что одновременно образуется  $k$  полостей  $\text{supp } v_n^i, i =$

$= 1, 2, \dots, k \in I_n(x_n^\circ)$ . Тогда объемы этих полостей  $V_n^i(x_n^\circ)$  совпадают с объемами заключенной в них смазки  $V_{n0}^i$ , т. е.

$$(1.11) \quad V_{n0}^i = \int_{\text{supp } v_n^i} v_n(x_n) dx_n, \quad p_n^i = -\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} p(x_n^\circ - \varepsilon + l_n \cos \alpha_n \text{ sign } \alpha_n)$$

$$i = 1, 2, \dots, k \in I_n(x_n^\circ); I_n(x_n^\circ - \varepsilon) = \emptyset, \varepsilon \rightarrow +0$$

Дополнительное] условие на  $p_n^i$  получено из предположения о непрерывном изменении давления в смазочной жидкости.

Далее, при одновременном слиянии  $k$  полостей  $\text{supp } v_n^i$ ,  $i = i_0 + 1, \dots, i_0 + k \in I_n(x_n^\circ - \varepsilon)$  в одну, полость  $\text{supp } v_n^j$ ,  $j \in I_n(x_n^\circ)$  при  $\varepsilon \rightarrow +0$ , получим

$$(1.12) \quad V_{n0}^j = \sum_{i=i_0+1}^{i_0+k} V_{n0}^i, \quad j \in I_n(x_n^\circ);$$

$$\text{supp } v_n^l(x_n^\circ - \varepsilon) \cap \text{supp } v_n^m(x_n^\circ - \varepsilon) = \emptyset$$

$$l \neq m, \quad l, m \in I_n(x_n^\circ - \varepsilon), \quad \varepsilon > 0;$$

$$\text{supp } v_n^j(x_n^\circ) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \bigcup_{i=i_0+1}^{i_0+k} \text{supp } v_n^i(x_n^\circ - \varepsilon)$$

Более сложен случай, когда в некоторой точке расположения центра  $n$ -й краевой трещины  $x = x_n^\circ$  из полости  $\text{supp } v_n^j$  одновременно образуются  $k$  полостей  $\text{supp } v_n^i$ ,  $i = i_0 + 1, \dots, i_0 + k \in I_n(x_n^\circ)$ . Если в исходной полости] при любом малом  $\varepsilon > 0$  не было каверн ( $V_n^j = V_{n0}^j$ ), то по непрерывности их не будет и в образовавшихся полостях. Аналогично, из соображений непрерывности найдем дополнительные условия для  $p_n^i$ . Поэтому получим

$$(1.13) \quad V_{n0}^i = \int_{\text{supp } v_n^i} v_n(x_n) dx_n, \quad p_n^i = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} p_n^j(x_n^\circ - \varepsilon)$$

$$i = i_0 + 1, \dots, i_0 + k \in I_n(x_n^\circ);$$

$$\bigcup_{i=i_0+1}^{i_0+k} \text{supp } v_n^i(x_n^\circ) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \text{supp } v_n^j(x_n^\circ - \varepsilon)$$

$$V_n^j(x_n^\circ - \varepsilon) = V_{n0}^j, \quad j \in I_n(x_n^\circ - \varepsilon), \quad \varepsilon > 0$$

Рассмотрим теперь случай, когда в исходной полости имеется каверна, т. е.  $V_n^j > V_{n0}^j$ . Предположим, что при наличии каверны слой смазки адсорбируются на границах полостей в объемах, пропорциональных объемам полостей. Приняв во внимание вышесказанное, получим

$$(1.14) \quad V_{n0}^i = v \int_{\text{supp } v_n^i} v_n dx_n, \quad p_n^i = 0; \quad i_0 + 1, \dots, i_0 + k \in I_n(x_n^\circ);$$

$$\bigcup_{i=i_0+1}^{i_0+k} \text{supp } v_n^i(x_n^\circ) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \text{supp } v_n^j(x_n^\circ - \varepsilon); \quad V_n^j(x_n^\circ - \varepsilon) > V_{n0}^j$$

$$j \in I_n(x_n^\circ - \varepsilon), \quad \varepsilon > 0; \quad v = V_{n0}^j / \int_{\text{supp } v_n^j} v_n dx_n$$

Таким образом сформулированы все необходимые условия в полостях краевых трещин, содержащих смазку.

Рассматривая участки краевых трещин с сомкнувшимися берегами, потребуем выполнения соотношений (они вытекают из того, что к рассматриваемым участкам берегов трещин не приложено внешних усилий)

$$(1.15) \quad p_n(x_n) \leq 0, \quad v_n(x_n) = 0, \quad |l_n \sin \alpha_n| = |y_n^\circ + 1/2 h(x_n^\circ)|$$

Кроме того, в случае граничных условий типа 2) необходимо потребовать выполнение равенств

$$(1.16) \quad u_n(x_n)_i = 0, \quad v_n(x_n) = 0, \quad |l_n \sin \alpha_n| = |y_n^0 + 1/2 h(x_n^0)|$$

Выпишем уравнение для зазора между контактирующими поверхностями. Исходя из выражений для перемещений границ полуплоскостей при наличии и в отсутствие в них трещин найдем [1, 7]

$$(1.17) \quad h(x) = c_* + \frac{4}{\pi E'} \int_{x_i}^{x_e} p(t) \ln \frac{1}{|x-t|} dt + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \int_{-l_k}^{l_k} \{-v_k'(t) W_k^r(t, x) + u_k'(t) W_k^i(t, x)\} dt + \frac{x^2}{R'} \left( \frac{1}{R'} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right)$$

$$(1.18) \quad W_k^r = \operatorname{Re} W_k, \quad W_k^i = \operatorname{Im} W_k, \quad W_k(t, x) = i e^{-i\alpha_k} \frac{\bar{T}_k - T_k}{\bar{T}_k - x}$$

где  $c_*$  — произвольная постоянная, а  $W_k^r$ ,  $W_k^i$  и  $W_k$  — ядра,  $R'$  — приведенный радиус контактирующих тел.

Значение постоянной  $c_*$  выберем так, чтобы в точке выхода из области контакта выполнялось равенство  $h(x_e) = h_e$ , где  $h_e$  — заранее неизвестная толщина слоя смазки в точке  $x = x_e$ .

Для замыкания уравнений задачи к ним необходимо добавить условия на контактное давление в точках входа и выхода, а также условие статики [1]

$$(1.19) \quad p(x_i) = p(x_e) = \frac{dp}{dx}(x_e) = 0, \quad \int_{x_i}^{x_e} p(x) dx = P$$

Заметим, что выше принята классическая постановка контактно-гидродинамической задачи, при которой координата входа  $x_i$  считается заданной.

Таким образом, при заданных постоянных  $u_1^0, u_2^0, R', E', P, x_i, \{\alpha_k, x_k^0, y_k^0, l_k\}, k = 1, 2, \dots, N$  и функции  $\mu(p)$  из решения задачи следует определить постоянные  $x_e, h_e$  и функции  $p(x), h(x), \{v_k(x_k), u_k(x_k), p_k(x_k)\}, k = 1, 2, \dots, N$ .

После решения задачи по известным коэффициентам интенсивности  $k_{ni}^{\pm} (n = 1, 2, \dots, N \text{ и } i = 1, 2)$  могут быть найдены углы  $\theta_n^{\pm}$  первоначального распространения трещин [5—7].

Из анализа предложенной выше постановки задачи следует, что усталостное разрушение материала тел может происходить по двум причинам: 1) из-за развития подповерхностных трещин и выхода их на поверхность и 2) из-за взаимодействия смазки с краевыми трещинами, приводящего к выкрашиванию материала тел. Концепция развития подповерхностных трещин и последующего усталостного разрушения получила развитие во многих теоретических и прикладных исследованиях (см. работы [4, 5]). Относительно влияния смазки на разрушение материалов тел в литературе принято представление о расклинивающем действии смазки, проникающей в краевые трещины. В терминах описанной выше постановки задачи расклинивающее действие смазки возникает в том случае, когда в полости, полностью заполненной смазкой ( $V_n^i = V_{n0}^i$ ) и примыкающей к заглубленной вершине краевой трещины, создается высокое давление  $-p_n^i$ . Это избыточное давление приводит к развитию трещины и последующему разрушению материала. В ряде случаев данный процесс может приводить к известному механизму разрушения отслаиванием. Однако, возможен и иной — кавитационный механизм разрушения контактирующих тел. Действительно, если в полостях краевых трещин, содержащих смазку, имеются каверны, то, как известно [8], при их схлопывании в окрестности каверн в смазке возникают значительные напряжения. Эти напряжения также приводят к разрушению соседних с кавернами поверхностей

твердых тел [8]. В силу сказанного кавитация в ряде случаев также может играть существенную роль в разрушении смазанных поверхностей.

Ранее [9] была предпринята попытка постановки и решения плоской контактно-гидродинамической задачи теории смазки для случая, когда в одном из контактирующих тел имеется краевая трещина. Однако в [9] не были сформулированы дополнительные условия типа (1.7)—(1.16) на поведение смазки в полостях краевых трещин и исследование проводилось фактически в предположении отсутствия этих полостей. Очевидно, что это допущение не всегда соответствует действительности и может существенно исказить картину явления.

Таким образом, выше дана постановка плоской контактно-гидродинамической задачи теории смазки при учете механических эффектов, имеющих место в краевых трещинах смазанного упругого тела. Учтена возможность частичного налегания берегов трещин. Задача свелась к нелинейной краевой задаче с односторонними ограничениями.

**2. Легко нагруженный контакт.** Рассмотрим наиболее простой для исследования случай легко нагруженного контакта. Будем считать смазанный контакт легко нагруженным, если влияние деформируемости упругих цилиндров на толщину смазочной пленки и давление в контакте мало. Данная задача исследуется методом регулярных асимптотических разложений [2, 3, 10]. Ниже будет показано, что в случае легко нагруженного контакта задачи для главных членов асимптотик  $p(x)$ ,  $h(x)$ ,  $x_e$ ,  $h_e$  и главных членов асимптотик  $\{v_k(x_k), u_k(x_k), p_k(x_k)\}$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$  расщепляются и могут быть решены последовательно. Кроме того, будут получены и исследованы уравнения для следующих членов асимптотик:  $p(x)$ ,  $h(x)$ ,  $x_e$  и  $h_e$ .

В безразмерных переменных [3]

$$\begin{aligned} \{x', \tau', a, c, x_k^{\circ}, y_k^{\circ}\} &= \{x, \tau, x_i, x_e, x_k^{\circ}, y_k^{\circ}\} \frac{\theta}{R'}, \quad \{p', p_n', p_n^i\} = \\ &= \{p, p_n, p_n^i\} \frac{\pi R'}{2\theta P}, \quad h' = \frac{h}{h_e}, \quad \mu' = \frac{\mu}{\mu_0}; \quad \theta^2 = \frac{P}{3\pi\mu_0(u_1^{\circ} + u_2^{\circ})} \\ \{x_k', t'\} &= \frac{\{x_k, t\}}{l_k}, \quad \{v_k', u_k'\} = \frac{\{v_k, u_k\}}{v_0}; \\ k &= 1, 2, \dots, N; \quad v_0 = \frac{8P}{\pi E'} \end{aligned}$$

( $\theta$  — безразмерная постоянная) уравнения и неравенства рассматриваемой задачи запишутся в виде (штрихи опущены)

$$(2.1) \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{dp}{dx} \right) = \frac{1}{\gamma^2} \frac{dh}{dx}; \quad p(a) = p(c) = \frac{dp}{dx}(c) = 0, \quad \int_a^c p(x) dx = \frac{\pi}{2}$$

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \gamma(h-1) &= x^2 - c^2 + \frac{2}{\pi V} \int_a^c p(t) \ln \frac{c-t}{|x-t|} dt + \\ &+ \frac{1}{\pi V} \sum_{k=1}^N \int_{-1}^1 \{-v_k'(t) [W_k^r(t, x) - W_k^r(t, c)] + \\ &+ u_k'(t) [W_k^i(t, x) - W_k^i(t, c)]\} dt \end{aligned}$$

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\delta_n} \int_{-1}^1 \frac{v_n'(t) dt}{t-x_n} + \sum_{k=1}^N \int_{-1}^1 \{v_k'(t) U_{nk}^r(t, x_n) - u_k'(t) V_{nk}^r(t, x_n)\} dt = \\ = \pi p_n(x_n) - \int_a^c p(\tau) D_n^r(\tau, x_n) d\tau \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\delta_n} \int_{-1}^1 \frac{u_n'(t) dt}{t - x_n} + \sum_{k=1}^N \int_{-1}^1 \{-u_k'(t) V_{nk}^i(t, x_n) + v_k'(t) U_{nk}^i(t, x_n)\} dt =$$

$$= - \int_a^c p(\tau) D_n^i(\tau, x_n) d\tau; \quad n = 1, 2, \dots, N$$

(2.4) Если  $\delta_n |\sin \alpha_n| < \left| y_n^\circ + \frac{\gamma}{2\theta} h(x_n^\circ) \right|$ , то

$$\begin{cases} p_n(x_n) = 0 & \text{при } v_n(x_n) > 0 \\ p_n(x_n) \leq 0 & \text{при } v_n(x_n) = 0 \end{cases}$$

Если  $\delta_n |\sin \alpha_n| = \left| y_n^\circ + \frac{\gamma}{2\theta} h(x_n^\circ) \right|$ , то

$$p_n(x_n) = -p(x_n^\circ + \delta_n \cos \alpha_n \operatorname{sign} \alpha_n)$$

$$x_n \in \operatorname{supp} v_n^1(x_n^\circ) \text{ при } v_n(\operatorname{sign} \alpha_n) > 0$$

$$\begin{cases} p_n(x_n) = 0 & \text{при } V_n^i(x_n^\circ) > V_{n0}^i, \quad x_n \in \operatorname{supp} v_n^i(x_n^\circ), \\ p_n(x_n) = p_n^i \leq 0 & \text{при } V_n^i(x_n^\circ) = V_{n0}^i, \quad i \in I_n(x_n^\circ) \end{cases}$$

$$p_n(x_n) \leq 0 \text{ при } v_n(x_n) = 0; \quad n = 1, 2, \dots, N$$

(нумерация областей  $\operatorname{supp} v_n^i(x_n^\circ)$  начинается с горловины трещины).

Для случая, когда на берегах трещин выполняются граничные условия типа 2), к соотношениям (2.4) необходимо добавить условия

$$(2.5) \quad u_n(x_n) = 0 \text{ при } v_n(x_n) = 0; \quad n = 1, 2, \dots, N$$

В равенствах (2.2) и (2.3) ядра  $W_k^r, W_k^i, U_{nk}^r, V_{nk}^r, U_{nk}^i, V_{nk}^i, D_n^r, D_n^i$  имеют вид (1.3), а величины  $X_n, T_k$  и  $z_k^\circ$  принимают вид

$$(2.6) \quad X_n = \delta_n x_n e^{i\alpha_n} + z_n^\circ, \quad T_k = \delta_k t e^{i\alpha_k} + z_k^\circ,$$

$$z_k^\circ = x_k^\circ + i \left[ y_k^\circ + \frac{\gamma}{2\theta} h(x_k^\circ) \right]$$

В соотношениях (2.4) принято

$$(2.7) \quad V_n^i(x_n^\circ) = \int_{\operatorname{supp} v_n^i(x_n^\circ)} v_n(x_n) dx_n, \quad i \in I_n(x_n^\circ)$$

$$(2.8) \quad \gamma = \frac{h_e \theta^2}{R'}, \quad V = \frac{3\pi^2}{4P^2} \mu_0 (u_1^\circ + u_2^\circ) E' R', \quad \delta_n = \frac{l_n \theta}{R'}$$

а постоянные  $V_{n0}^i$  определяются исходя из равенств (1.11)–(1.14).

Режиму легкого нагружения отвечают большие значения параметра  $V$  [3]. Поэтому будем считать  $V \gg 1$  и решение задачи (2.1)–(2.7), (1.3), (1.11)–(1.14) будем искать в виде асимптотических рядов по целым неотрицательным степеням  $V^{-1}$ . Произведя замену независимой переменной

$$x = \frac{c+a}{2} + \frac{c-a}{2} y$$

примем

$$(2.9) \quad \{p, p_n, p_n^i, h, v_n, u_n, \gamma, c\} = \sum_{k=0}^{\infty} \{p^k, p_{nk}, p_{nk}^i, h_k, v_{nk}, u_{nk}, \gamma_k, c_k\} V^{-k}$$

Рассмотрим простейший случай  $\mu = 1$ . Тогда, подставив (2.9) в равенства и неравенства задачи и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $V$ , получим серию задач для последовательных членов асимптотик решения. При этом для  $p^0, h_0, \gamma_0$  и  $c_0$  получим [3]

$$(2.10) \quad p^0(x_0) = \frac{q(x_0) - q(a)}{8b^3}, \quad x_0 = \frac{c_0 + a}{2} + \frac{c_0 - a}{2} y, \quad b^2 = \gamma_0 - c_0^2$$

$$q(x) = \frac{b^2 - 3c_0^2}{b^2} \left[ \operatorname{arctg} \frac{x}{b} + \frac{bx}{b^2 + x^2} \right] - \frac{2b\gamma_0 x}{(b^2 + x^2)^2}$$

Постоянные  $\gamma_0$  и  $c_0$  определяются из решения системы уравнений

$$(2.11) \quad q(c_0) - q(a) = 0$$

$$\frac{b^2 - 3c_0^2}{b^2} \left[ \frac{c_0}{b} \left( \operatorname{arctg} \frac{c_0}{b} - \operatorname{arctg} \frac{a}{b} \right) - \frac{a(c_0 - a)}{a^2 + b^2} \right] +$$

$$+ \frac{a^2 - c_0^2}{a^2 + b^2} + \frac{2a\gamma_0(c_0 - a)}{(a^2 + b^2)^2} - 4\pi b^2 = 0$$

Интегрирование уравнений для следующих членов асимптотик  $p^1$ ,  $h_1$ ,  $\gamma_1$  и  $c_1$  дает

$$(2.12) \quad p^1(x_0) = \frac{1}{b^3} \left\{ \frac{3\gamma_1}{b^2} \varepsilon_\gamma(x_0) + \frac{c_1}{c_0 - a} \varepsilon_c(x_0) + \frac{\gamma_0}{b^2} \varepsilon(x_0) \right\}$$

где постоянные  $\gamma_1$  и  $c_1$  определяются решением линейной системы уравнений

$$(2.13) \quad 3\varepsilon_\gamma(c_0) \gamma_1 + \frac{b^2}{c_0 - a} \varepsilon_c(c_0) c_1 = -\gamma_0 \varepsilon(c_0)$$

$$3 \int_a^{c_0} \varepsilon_\gamma(x) dx \cdot \gamma_1 + \frac{b^2}{c_0 - a} \left[ \int_a^{c_0} \varepsilon_c(x) dx + \frac{\pi b^3}{c_0 - a} \right] c_1 = -\gamma_0 \int_a^{c_0} \varepsilon(x) dx$$

Выражения для функций  $\varepsilon_\gamma(x)$  и  $\varepsilon_c(x)$  из (2.12) и (2.13) в точности совпадают с приведенными в [3], а функция  $\varepsilon(x)$  имеет вид

$$(2.14) \quad \varepsilon(x) = b^5 \int_a^x \frac{Q(t)}{H^3(t)} \left[ \frac{3\gamma_0}{H(t)} - 2 \right] dt, \quad H(t) = \gamma_0 (h_0(t) - 1) = b^2 + t^2$$

$$Q(x) = \frac{2}{\pi} \int_a^{c_0} p^0(t) \ln \frac{c_0 - t}{|x - t|} dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \int_{-1}^1 \{ -v'_{k0}(t) [W_{k0}^r(t, x) - W_{k0}^r(t, c_0)] +$$

$$+ u'_{k0}(t) [W_{k0}^i(t, x) - W_{k0}^i(t, c_0)] \} dt$$

При этом соотношения для определения главных членов асимптотик  $p_{n0}$ ,  $p_{n0}^i$ ,  $v_{n0}$  и  $u_{n0}$ , входящих в (2.14), в силу их линейности совпадают с (2.3) — (2.7), (1.3), (1.11) — (1.14), если у всех неизвестных величин дописать нижний индекс нуль. Заметим, что в правые части указанных соотношений входят уже определенные из (2.10) (2.11) и второго равенства (2.14) величины  $p^0(x)$ ,  $h_0(x)$ ,  $\gamma_0$  и  $c_0$ .

Таким образом, в случае легко нагруженного контакта исходную задачу для тел с трещинами удастся свести к последовательности чисто гидродинамических и чисто упругих задач. При  $\mu = 1$  исходная задача свелась к решению системы (2.11), решению задачи о напряженно-деформированном состоянии упругой полуплоскости с трещинами (2.3) — (2.7), (1.3), (1.11) — (1.14) при  $p = p^0$ ,  $h = h_0$ ,  $\gamma = \gamma_0$  и  $c = c_0$  и последующему решению системы уравнений (2.13).

Подчеркнем, что главные члены асимптотик  $p^0(x)$ ,  $h_0(x)$ ,  $\gamma_0$  и  $c_0$  не зависят от наличия в телах трещин, а следующие члены асимптотик, например  $p^1(x)$ ,  $h_1(x)$ ,  $\gamma_1$  и  $c_1$ , зависят от взаимного расположения трещин между собой и по отношению к области контакта  $[a, c_0]$ . Поэтому в принятой квазистатической постановке будем иметь, в частности,  $\gamma_1 = \gamma_1(x_1^0)$  и  $c_1 = c_1(x_1^0)$ .

Очевидно, что при наличии в телах только подповерхностных трещин можно сделать качественный вывод об увеличении толщины слоя смазки

$h_e$  по сравнению со случаем отсутствия трещин. В тоже время судить о поведении толщины слоя смазки  $h_e$  при наличии в телах краевых трещин вряд ли возможно.

Автор благодарен В. М. Александрову за обсуждение работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Куднир Д. С. Контактная гидродинамика смазки деталей машин. М.: Машиностроение, 1976. 304 с.
2. Kudish I. I. On solution of some contact and elastohydrodynamic problems.— In: Tribological Processes in Contact Areas of Lubricated Solid Bodies. 3-rd Intern. Tribology Congr. EUROTRIB 81. V. 2. W-wa: Wyd-wo komunikacji i Lacz—nosci, 1981, p. 251—271.
3. Кудиш И. И. Некоторые задачи упругогидродинамической теории смазки легко нагруженного контакта.— Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 3, с. 81—95.
4. Lundberg G., Palmgren A. Dynamic Capacity of rolling Bearings.— Acta Polytech. Ser. Mech. Engng, 1947, No. 7. 50 p.
5. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
6. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинках и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 443 с.
7. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 323с.
8. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
9. Ромалис Н. Б. Решение задач о выкрашивании поверхностей контактирующих тел в условиях гидродинамического трения.— Смешанные задачи механики деформируемого тела. II Всес. науч. конференция: Тез. докл. Днепропетров. гос. ун-т., 1981, с. 79—80.
10. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310с.

Москва

Поступила в редакцию  
15.XII.1982