

УДК 539.3 : 534.1

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ УДАРНОЙ АДИАБАТЫ КВАЗИПОПЕРЕЧНЫХ УПРУГИХ ВОЛН

Куликовский А. Г., Свешникова Е. И.

Показано, что разрывы, соответствующие точкам некоторых неэволюционных отрезков ударной адиабаты квазипоперечных ударных волн в изотропной предварительно напряженной упругой среде, представляют собой последовательность двух эволюционных ударных волн, движущихся с одинаковой скоростью. Для некоторых участков ударной адиабаты получено два таких представления. Обсуждается возможность представления неэволюционных разрывов в виде последовательности эволюционных разрывов, движущихся с одинаковой скоростью, в других задачах механики сплошной среды.

Исследование квазипоперечных ударных волн проводится ниже в рамках приближений, сделанных в [1, 2], где для ударных волн малой интенсивности было исследовано множество состояний (ударная адиабата), в которые можно попасть из заданного начального состояния скачком с соблюдением законов сохранения. На кривой, представляющей ударную адиабату, были выделены отрезки, удовлетворяющие условию неубывания энтропии и условиям эволюционности, т. е. необходимым условиям корректности линеаризованных граничных условий на разрыве [3]. В предлагаемой работе обсуждаются разрывы, соответствующие отрезкам ударной адиабаты, удовлетворяющим требованию неубывания энтропии, но не удовлетворяющим условиям эволюционности из-за превышения числа граничных условий над числом неизвестных в линеаризованной задаче о взаимодействии малых возмущений с разрывом.

Представление неэволюционных разрывов в виде последовательности эволюционных разрывов, движущихся с одной скоростью, может оказаться полезным при решении различных автомодельных задач, содержащих разрывы.

1. Постановка задачи. Изотропная упругая среда задана своей внутренней энергией $U(\varepsilon_{ij}, S)$ в виде [1, 2]

$$\Phi = \rho_0 U = \frac{1}{2} \lambda I_1^2 + \mu I_2 + \beta I_1 I_2 + \gamma I_3 + \delta I_1^3 + \xi I_2^2 + \rho_0 T_0 (S - S_0) + \text{const}$$

$$I_1 = \varepsilon_{ii}, \quad I_2 = \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad I_3 = \varepsilon_{ik} \varepsilon_{kj} \varepsilon_{ji}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial w_j}{\partial \xi_i} + \frac{\partial w_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial w_k}{\partial \xi_j} \right)$$

Здесь ε_{ij} — компоненты тензора конечных деформаций, w_i — вектор перемещения, ρ_0 — плотность в ненапряженном состоянии, S — энтропия, ξ_i — лагранжевы координаты (декартовы прямоугольные).

В плоской волне с фронтом $\xi_3 = Wt$ терпят изменение следующие компоненты градиента перемещения: $\partial w_1 / \partial \xi_3 = u$, $\partial w_2 / \partial \xi_3 = v$, $\partial w_3 / \partial \xi_3 = w$.

Существуют три пары волн, движущихся в обе стороны оси ξ_3 , которые при небольших деформациях можно разделить на квазипродольные и квазипоперечные. Здесь будут рассматриваться только квазипоперечные волны. Из законов сохранения на скачке в [1, 2] получено уравнение ударной адиабаты квазипоперечных ударных волн — множества состояний u, v, w , в которые можно скачком попасть из начального состояния

$$(4.1) \quad (u^2 + v^2 - R^2)(Uv - Vu) - 2G(u - U)(v - V) = 0$$

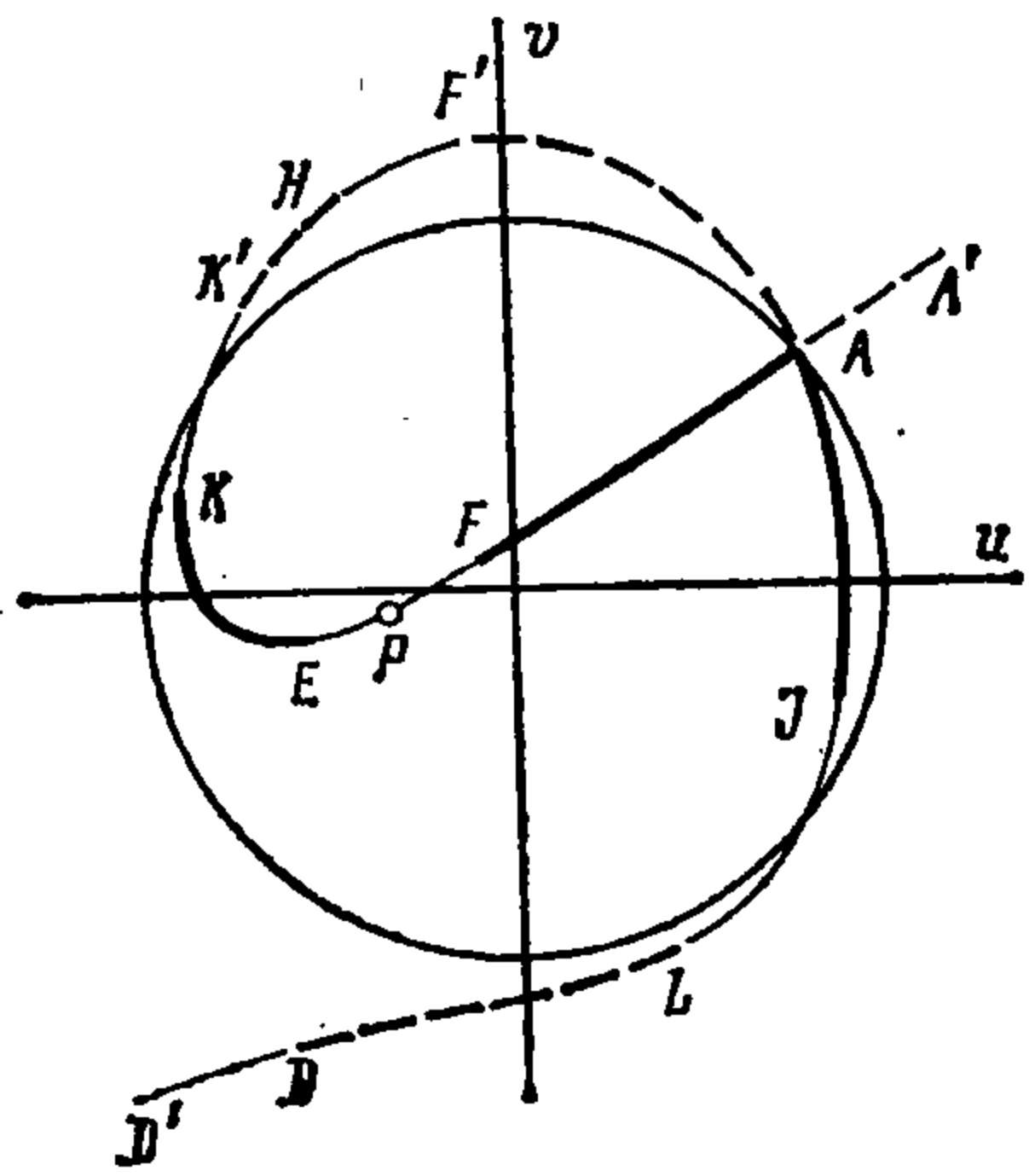
$$w = w^0 - 2b(u^2 + v^2 - R^2)$$

$$G = (\mu + \frac{3}{2}\gamma)(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11})/\kappa, \quad R^2 = U^2 + V^2$$

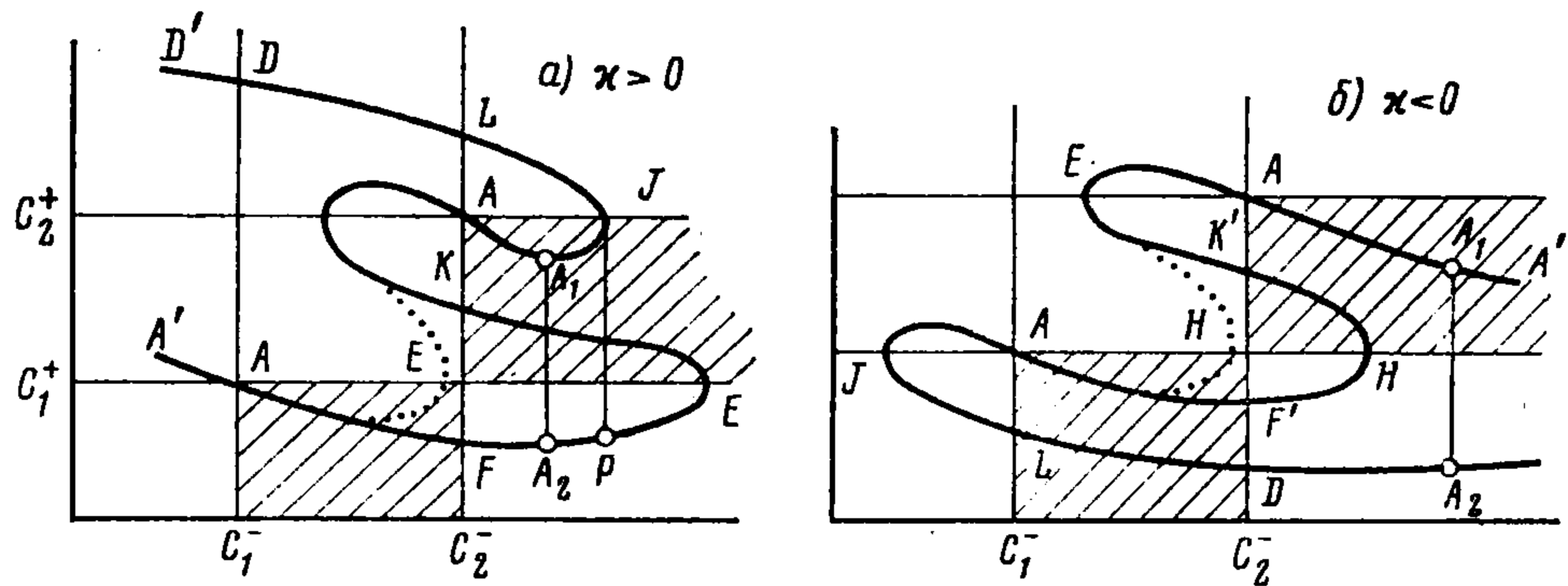
$$\kappa = \mu + (\mu + \beta + \frac{3}{2}\gamma)^2 / (\lambda + \mu) - 2\xi$$

$$2b = \lambda + 2\mu + \beta + \frac{3}{2}\gamma$$

Эта кривая на плоскости uv имеет вид, изображенный на фиг. 1. Если отнести все величины в (1.1) к \sqrt{G} , то параметр G выпадает из уравнения ударной адиабаты. Это означает, что ее размеры пропорциональны \sqrt{G} , а форма и расположение относительно осей зависят от U/\sqrt{G} , V/\sqrt{G} .



Фиг. 1



Фиг. 2

Условие неубывания энтропии и условия эволюционности [3] имеют вид [1, 2]

$$(1.2) \quad 8\rho_0 T_0 (S - S_0) = -\kappa [(u - U)^2 + (v - V)^2] (u^2 + v^2 - R^2) \geq 0$$

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \text{а) } c_2^- \leq W \leq c_2^+, c_1^+ \leq W \\ \text{б) } c_1^- \leq W \leq c_1^+, 0 \leq W \leq c_2^- \end{aligned}$$

Здесь c_i^+ и c_i^- — характеристические скорости за и перед скачком соответственно, причем нумерация выбрана так, что $c_2 > c_1$. Аналитические выражения для характеристических скоростей приведены в [1, 2].

Для сред с $\kappa > 0$ условие (1.2) удовлетворено внутри окружности $u^2 + v^2 = R^2$, на которой энтропия постоянна, $S = S_0 = \text{const}$. Для сред с $\kappa < 0$ — вне этой окружности. Условия эволюционности (1.3) оказываются для слабых квазиперечных ударных волн в упругом теле более сильными и выделяют еще более узкие области. На ударной адиабате на фиг. 1 они изображены для сред с $\kappa > 0$ сплошными жирными линиями и для сред с $\kappa < 0$ — штриховыми линиями.

На фиг. 2 для $\kappa > 0$ и $\kappa < 0$, приведены диаграммы, изображающие соотношения между скоростью ударной волны W и характеристическими скоростями $c_{1,2}^-$ и $c_{1,2}^+$, которые отложены соответственно по горизонтальной и вертикальной осям [4]. Ударная адиабата изображена кривой, а проекция каждой точки ее на каждую из осей считается равной скорости разрыва W , соответствующего этой точке. Диаграмма имеет чисто качественный характер и служит для наглядности сравнения скорости W с характеристическими скоростями $c_{1,2}^\pm$. Однако по горизонтальной оси скорости W , c_1^- и c_2^- могут быть отложены в реальных масштабах, что в дальнейшем будет и предполагаться. Начальная точка A на фиг. 1 является точкой самопересечения, т. е. в ней имеются две скорости слабых скачков. Поэтому на диаграммах фиг. 2 начальное состояние A представлено двумя точками. Соответствующие точки на фиг. 1 и 2 обозначены одинаковыми буквами.

Разрывы, удовлетворяющие условиям (1.3)а — быстрые ударные волны — соответствуют точкам ударной адиабаты, попавшим в верхний заштрихованный прямоугольник, а разрывы, удовлетворяющие условиям (1.3)б — медленные ударные волны — точкам ударной адиабаты в нижнем заштрихованном прямоугольнике. Если разрыв приводит в точку на эволюционном отрезке, примыкающем к точке A , то такой скачок будем называть разрывом первого типа, а в противном случае — разрывом второго типа. В зависимости от значений U/\sqrt{G} и V/\sqrt{G} некоторые разрывы второго типа могут отсутствовать [2]. Эти случаи изображены на фиг. 2 пунктиром. Для дальнейшего отметим, что скорость разрыва имеет максимумы при $\kappa > 0$ в точках E и J , а при $\kappa < 0$ — в точке H [2].

Укажем еще одно свойство состояний, связанных ударной адиабатой. Из точек, расположенных на ударной адиабате на участках DL , $АН$, $АА'$ в средах с $\kappa > 0$ и на участках $АJ$, $АE$ для $\kappa < 0$, можно, как из начальных, скачком попасть в состояние, изображенное точкой $A(U, V)$. При этом, очевидно, будут выполнены законы сохранения и условие неубывания энтропии. Выполнение условий эволюционности легко проверяется с использованием диаграммы фиг. 2.

2. Комбинация двух разрывов. Случай $\kappa > 0$. Покажем, что неэволюционная часть FE ударной адиабаты, лежащая в правом нижнем прямоугольнике (условия ее существования даны в [2]), соответствует разрывам, которые могут быть представлены как последовательность двух эволюционных ударных волн — быстрой и медленной, движущихся одна за другой с одной и той же скоростью. При этом для всех точек дуги FE существует комбинация, содержащая быструю волну второго типа и, кроме того, для всех точек дуги FE , в которых $W \leq \min\{W_E, W_J\}$, существует комбинация с быстрой волной первого типа.

Очевидно, что на разрыве, состоящем из двух последовательных ударных волн, движущихся с одной скоростью, выполнены все законы сохранения с теми же значениями потоков массы, импульса и энергии через единицу площади поверхности разрыва, что и на первой ударной волне. Поэтому состояние за таким составным разрывом лежит на ударной адиабате, отнесенной к начальному состоянию перед первой ударной волной.

Рассмотрим две ударные волны — быструю, распространяющуюся со скоростью W_1 , и медленную, движущуюся со скоростью W_2 по состоянию за первой волной. Величины, относящиеся к состоянию за первой ударной волной, будем снабжать индексом 1 и к состоянию после второй волны — индексом 2. Этим состояниям на плоскости uv соответствуют точки A_1, A_2 , причем, если $W_1 = W_2$, то, согласно сказанному выше, наряду с точкой A_1 и точка A_2 лежит на первой, исходной ударной адиабате, проведенной через точку A как начальную.

Если быстрая волна будет волной первого типа и

$$(2.1) \quad W_1 \leq \min\{W_E, W_J\}$$

(здесь W_E, W_J — скорости в точках J и E первой ударной адиабаты), то всегда найдется медленная ударная волна, движущаяся по состоянию за первой волной с той же скоростью $W_2 = W_1$.

Чтобы показать это, предположим сначала, что быстрая волна имеет достаточно малую интенсивность. Ее скорость, согласно (1.3)а и фиг. 2, а, будет удовлетворять строгим неравенствам $c_1^{(1)} < W < c_2^{(1)}$. Состояние за этой волной будет мало отличаться от начального. Тогда скорость медленной волны W_2 , идущей по состоянию A_1 за первой ударной волной, может принимать любые значения между характеристическими скоростями $c_1^{(1)}$ и $c_2^{(1)}$ перед этой волной. Это вытекает из того, что при малом изменении начального состояния ударная адиабата изменится мало и на фиг. 2, а точка пересечения ее с прямой $W = c_2^-$ не исчезнет. Точка, изображающая медленную ударную волну, для которой $W_2 = W_1$, будет при малой интенсивности первой волны лежать строго внутри прямоугольника на фиг. 2, а, соответствующего медленным волнам. Так как W достигает максимума в точке E , то для разрыва, изображенного точкой внутри указанного прямоугольника, на той же ударной адиабате, на которой эта точка лежит, найдутся точки, соответствующие медленным ударным волнам со скоростями меньше и больше выбранной.

Если теперь непрерывно изменять (увеличивать) W_1 , то всегда можно подобрать медленную ударную волну со скоростью W_2 , равной W , до тех пор пока точка, изображающая медленную волну, не выйдет на границу прямоугольника, содержащего об-

ласть эволюционности медленных волн. Если при этом выполняется равенство $W = c_2^{(1)}$ (правая граница прямоугольника), то быстрая ударная волна должна соответствовать точке J ; если же выполняется равенство $W = c_2^{(2)}$ (верхняя граница прямоугольника), то результат последовательности двух скачков дает точку E , так как только в этой точке исходной ударной адиабаты имеет место равенство $W = c_1^+$. До тех пор пока выполняется неравенство (2.1), всегда можно найти медленную ударную волну, идущую вслед за быстрой, и такую, что $W_2 = W_1$.

Если неравенство (2.1) выполняется для всей дуги FE , а это возможно при $W_J > W_E$, то комбинация эволюционных волн — быстрой первого типа и медленной — существует для каждой точки этого отрезка. Если $W_J < W_E$, то неравенству (2.1) удовлетворяют только точки дуги FP , где точка P определена равенством $W_P = W_J$. В этом случае точки отрезка FP дают разрывы, представляемые в виде последовательности ударных волн: быстрой первого типа и медленной.

На адиабате ударной волны, выходящей из точки J , имеется точка Q , отличная от P , для которой $W_Q = c_2^- = W_P$, причем $W_P = W_J$. Очевидно, точка Q принадлежит начальной адиабате и лежит, как видно из фиг. 2, *a* на отрезке EK . Когда $W_J = W_E$, точки E, P, Q сливаются и ударные адиабаты первой и второй волн касаются (фиг. 1) одна другой в этой точке. Все ударные адиабаты, начинающиеся в точках отрезка AJ , пересекают начальную адиабату два раза — на участках FE и EK .

Когда $W_J > W_E$, на отрезке AJ найдется точка M , такая, что $W_M = W_E$. Ударная адиабата, выходящая из точки M , касается начальной ударной адиабаты в точке E . Все ударные адиабаты, начинающиеся из точек отрезка AM , пересекают начальную адиабату два раза по разные стороны от точки E , а все ударные адиабаты, начинающиеся из точек MJ , не пересекают исходной ударной адиабаты.

Рассмотрим теперь последовательность быстрой волны второго типа и медленной волны. Начнем с быстрой, соответствующей точке, достаточно близкой к точке E . Тогда разность $W_1 - c_1^{(1)} > 0$ и может быть взята достаточно малой. Для состояния за первой волной (как и для любого другого состояния) можно указать достаточно слабую медленную ударную волну, скорость которой W_2 на заданную малую величину превосходит характеристическую скорость $c_1^{(1)}$ перед ней, так что будет выполнено равенство $W_2 = W_1$. Точка, изображающая эту слабую медленную ударную волну, будет находиться внутри прямоугольника медленных волн. Подобно предыдущему, при изменении (уменьшении) W_1 можно всегда подобрать медленную ударную волну с W_2 , равной W_1 , до тех пор, пока точка, изображающая эту медленную ударную волну, остается внутри прямоугольника, содержащего медленные волны. Нетрудно проверить, что выход за границу этого прямоугольника происходит только тогда, когда точка, представляющая быструю волну, совпадает с точкой E . Таким образом, неэволюционный разрыв, соответствующий любой из точек дуги FE , может быть представлен в виде последовательности быстрой ударной волны второго типа и медленной ударной волны, движущейся за ней с той же скоростью.

3. Случай $\kappa < 0$. Аналогично предыдущему все точки дуги $F'H$ могут быть представлены как последовательность двух эволюционных волн двумя способами. Одна комбинация состоит из быстрой волны первого типа и медленной волны первого типа. Другая комбинация состоит из быстрой волны второго типа и медленной волны первого типа. Все доказательства

в точности [повторяют рассуждения п. 2 для случая, когда $W_J > W_E$ (фиг. 2, б).

Все точки дуги DD' соответствуют разрывам, представимым в виде последовательности быстрой волны первого типа и медленной волны второго типа. Рассуждения, приводящие к такому заключению, можно проводить увеличивая интенсивность быстрой ударной волны. При нулевой интенсивности быстрой ударной волны медленная волна приводит в точку D . Затем точка, изображающая медленную ударную волну, уходит внутрь прямоугольника и при дальнейшем увеличении интенсивности быстрой волны не выходит за границы этого прямоугольника, что доказывает представимость разрывов, соответствующих всем точкам отрезка DD' , в виде указанной последовательности эволюционных ударных волн.

4. Составные разрывы. Поскольку возможность представления неэволюционных разрывов в виде последовательности эволюционных может иметь значение не только для теории упругости, обсудим этот вопрос с общей точки зрения.

Условия эволюционности разрыва, разделяющего области непрерывных решений гиперболической системы уравнений, заключаются в том [3], что число независимых граничных условий должно быть равно числу уходящих от разрыва характеристик разных семейств плюс единица. Это позволяет при решении линеаризованной задачи определить амплитуды уходящих от разрыва по характеристикам волн малых возмущений и возмущение скорости разрыва.

Если имеется конфигурация из двух эволюционных разрывов, движущихся с одинаковыми скоростями, то число граничных условий на обоих разрывах должно быть равно числу всех уходящих от обоих разрывов характеристик плюс два. Если скорости разрывов не совпадают с характеристическими скоростями, то число характеристик, уходящих от обоих разрывов в область между ними, равно порядку системы, т. е. числу независимых переменных, характеризующих состояние между разрывами. Если из соотношений на разрывах исключить (хотя бы мысленно) все величины, характеризующие состояние между разрывами, то число оставшихся соотношений, связывающих величины с внешних сторон от системы разрывов и скорости разрывов W_1 и W_2 , будет равно числу уходящих во вне характеристик плюс два. Этих соотношений, очевидно, как раз столько сколько нужно для нахождения возмущений вне системы разрывов и возмущений их скоростей.

Как уже отмечалось, если положить $W_1 = W_2$, то последовательность таких двух разрывов можно рассматривать как один разрыв с выполнением всех законов сохранения на нем. Этот разрыв, очевидно, неэволюционен, так как, согласно сказанному выше, число граничных условий на нем на два превосходит число уходящих от него характеристик. Кроме того, при фактическом взаимодействии с малыми возмущениями скорости W_1 и W_2 могут получить разные приращения, скачок расщепится и возмущения перестанут быть малыми. Если же в соотношениях на разрыве считать W_1 и W_2 тождественно равными (т. е. считать, что и приращения этих величин равны), то решение задачи о взаимодействии разрыва с произвольными малыми возмущениями не будет существовать.

Путем рассуждений, подобных приведенным выше, можно убедиться, что если имеется m эволюционных разрывов движущихся с одной и той же скоростью $W_1 = W_2 = \dots = W_m$, то число независимых соотноше-

ний на таком разрыве, из которых исключены (или не входили с самого начала) величины, характеризующие состояния между разрывами, должно на m превосходить число уходящих от такого комбинированного разрыва характеристик.

Поэтому можно сформулировать следующую рекомендацию. Если имеется разрыв, на котором известных соотношений (следующих, например, из законов сохранения) слишком много для эволюционности его как одного разрыва, то следует попытаться найти несколько эволюционных разрывов, которые при совпадении их скоростей обратятся в интересующий нас разрыв.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. Об ударных волнах, распространяющихся по напряженному состоянию в изотропных нелинейно-упругих средах.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 3, с. 523—534.
2. Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. Исследование ударной адиабаты квазипоперечных ударных волн в предварительно напряженной упругой среде.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 5, с. 831—840.
3. Lax P. D. Hyperbolic Systems of Conservation Laws. II.— *Communs Pure and Appl. Math.*, 1957, v. 10, No. 4, p. 537—566.
4. Ахиезер А. И., Любарский Г. Я., Половин Р. В. Об устойчивости ударных волн в магнитной гидродинамике.— *Ж. эксперим. и теор. физ.*, 1958, т. 35, вып. 3, с. 731—737.

Москва

Поступила в редакцию
16.VIII.1983