

УДК 532.529

О ВЛИЯНИИ ПРОЦЕССОВ ДРОБЛЕНИЯ И СЛИЯНИЯ ПУЗЫРЕЙ НА МАССООБМЕН В ПСЕВДООЖИЖЕННОМ СЛОЕ

Бобков Н. Н., Гупало Ю. П.

В рамках механики взаимопроникающих взаимодействующих сплошных сред рассматривается плоская задача, моделирующая движение твердой и жидкой фаз и массопередачу к пузырькам в процессе их дробления и коалесценции. Предполагается, что межфазное сопротивление, как и в модели Дэвидсона [1], описывается законом Дарси при постоянной концентрации твердой фазы вне пузырей. Строятся поля скоростей фаз и поле давления жидкой фазы, определяются условия существования и форма облака замкнутой циркуляции жидкости вблизи двух пересекающихся или соприкасающихся круговых пузырей. Дается решение задачи о диффузионном притоке вещества к поверхности облака и определяется коэффициент массообмена между пузырями и непрерывной фазой псевдоожигенного слоя. Полученные результаты позволяют оценить влияние на интенсивность массообмена как процессов дробления и коалесценции пузырей, так и наличия твердой стенки вблизи пузыря, а также его деформаций.

Для большинства псевдоожигенных газами систем реализуются условия образования движущихся устойчивых полостей, практически свободных от твердых частиц и напоминающих пузыри в однородных жидкостях. Анализ механизма движения твердой и жидкой фаз вблизи таких полостей, а также их массообмена с непрерывной фазой важен в связи с практической задачей повышения эффективности работы реакторов с псевдоожигенным слоем при осуществлении разнообразных физико-химических процессов. На массообмен в реакторе могут оказывать влияние деформации пузырей при всплывании, наличие разного рода препятствий (например, поверхностей теплообмена, твердых стенок и др.) в рабочем пространстве реактора, а также процессы дробления и коалесценции пузырей ([2—3] и др.). Ранее изучалось движение и массообмен одиночного кругового (сферического) пузыря [4—5], движение пузыря с вогнутой кормовой частью [6], кругового пузыря между параллельными стенками [7].

1. Поля течения фаз вокруг полости. Рассмотрим простейшую плоскую модель движения двух соприкасающихся или пересекающихся пузырей, всплывающих с некоторой постоянной скоростью U_{cav} в однородном псевдоожигенном слое и представляющих собой полость, размеры и форма которой не изменяются во времени. Поток ожигающего агента однороден на большом удалении от полости, направлен вертикально вверх, и его скорость (в промежутках между частицами) в лабораторной системе координат равна v_0 .

Рассмотрим плоские полости, форма которых описывается двумя равными круговыми (радиуса a_b) сегментами, построенными на общем отрезке (фиг. 1). Согласно экспериментальным данным ([2], гл. IV), форму, близкую к рассматриваемой, имеют дробящиеся одиночные пузыри в псевдоожигенных системах. Кроме того, движение полости такой формы может служить простейшей моделью процесса слияния двух одиночных пузырей, а также поведения деформированного (или одиночного кругового) пузыря возле твердой стенки. Для иллюстрации на фиг. 2 представлены данные киносъемки ([2], гл. IV) процесса дробления одиночного пузыря в псевдоожигенном воздухе из стеклянных шариков размером 230 мкм.

В простейшей модели [1] псевдооживленного слоя как двойного континуума исходная система локально осредненных стационарных уравнений движения и неразрывности жидкой и твердой фаз, отождествляемых с идеальными (на линейных масштабах порядка размера пузыря) несжимаемыми жидкостями, имеет вне полости вид (см., например, [4])

$$(1.1) \quad \begin{aligned} v - w &= -k(\varepsilon) \nabla p_f, \quad d_s \rho (w \nabla) w = -\nabla (p_f + p_s) + d_s \rho g \\ \nabla v &= \nabla w = 0 \end{aligned}$$

Здесь v и w , p_f и p_s — скорости и давления жидкой (индекс f) и твердой (индекс s) фаз соответственно, ε — постоянная пористость слоя, $\rho = 1 - \varepsilon$ — объемная концентрация твердых частиц, d_s — плотность, g — ускорение силы тяжести, $k(\varepsilon)$ — коэффициент проницаемости, характеризующий фильтрационные свойства слоя.

В принятой модели движение оживающего агента предполагается безынерционным, т. е. $d_f \rightarrow 0$ (при оживлении газами в плотных слоях инерция жидкости мала по сравнению с инерцией частиц: $d_f \varepsilon \ll d_s \rho$), так что в уравнениях (1.1) опущены члены, пропорциональные d_f .

Рассмотрим граничные условия на поверхности полости и на бесконечности. В предположении безынерционности жидкой фазы граничным условием на поверхности S рассматриваемой полости является условие постоянства давления жидкости [1] (p_f отсчитывается от значения на S)

$$(1.2) \quad p_f|_S = 0$$

На бесконечном удалении от движущейся полости, где вызываемые ею возмущения течения фаз отсутствуют, задается условие постоянства градиента давления оживающего агента в виде

$$(1.3) \quad \left. \frac{\partial p_f}{\partial y} \right|_{\infty} = -J = -\frac{v_0}{k}$$

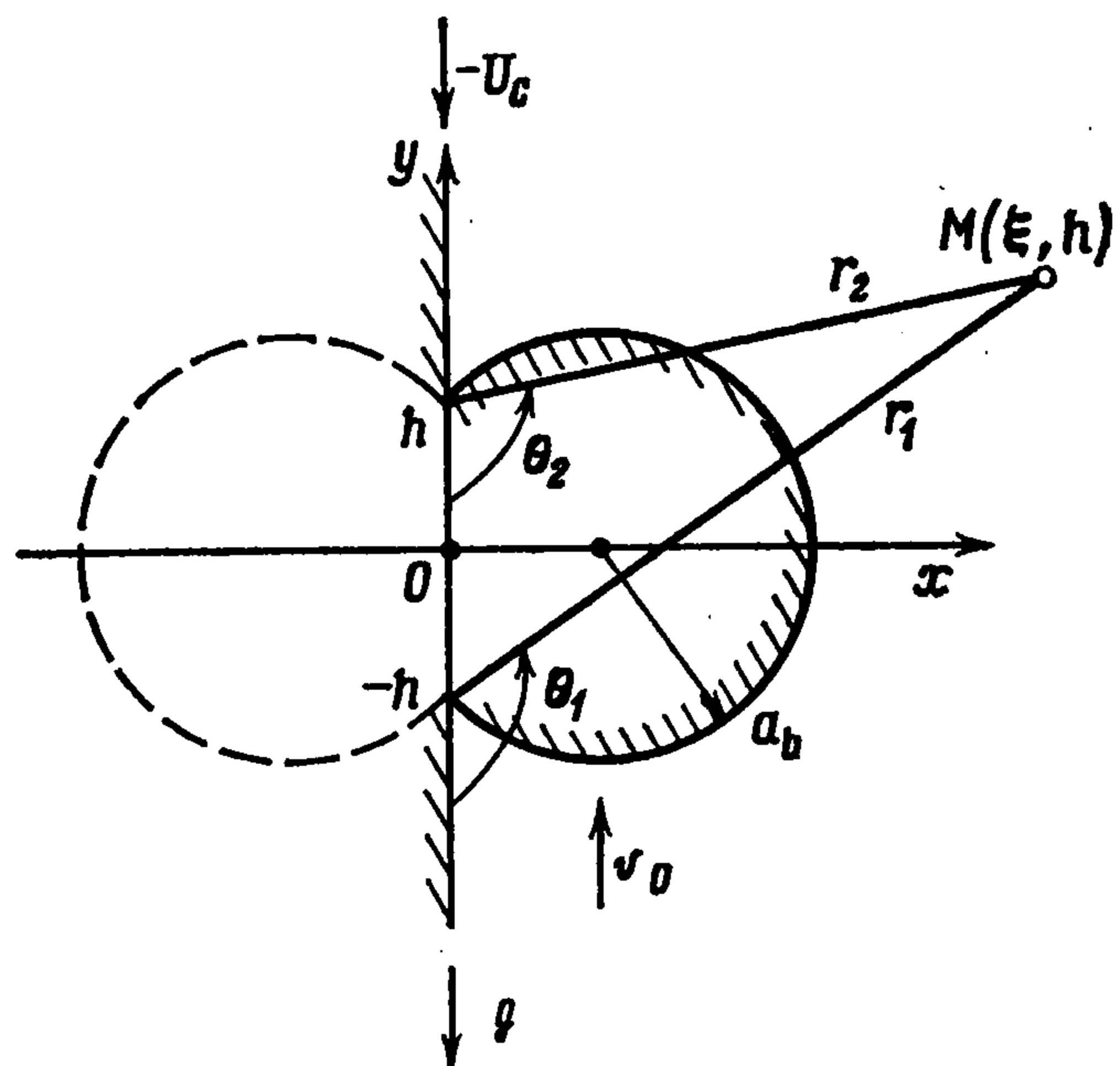
Здесь y — вертикальная координата (фиг. 1), J — постоянная, равная весу единицы объема непрерывной фазы кипящего слоя.

Из второго и четвертого уравнений (1.1) в силу потенциальности поля внешних массовых сил следует возможность построения потенциального поля течения твердой фазы как течения идеальной несжимаемой жидкости с давлением $p_f + p_s$ при $\text{rot } w = 0$.

После применения операции дивергенции к обеим частям первого уравнения (1.1) и использования уравнений неразрывности фаз отыскание распределения давления оживающего агента вне полости сводится с учетом условия (1.1) к решению задачи Дирихле для уравнения Лапласа

$$(1.4) \quad \Delta p_f = 0$$

Гармоническая функция p_f должна при этом удовлетворять условию на бесконечности (1.3). При помощи полученного таким образом распре-



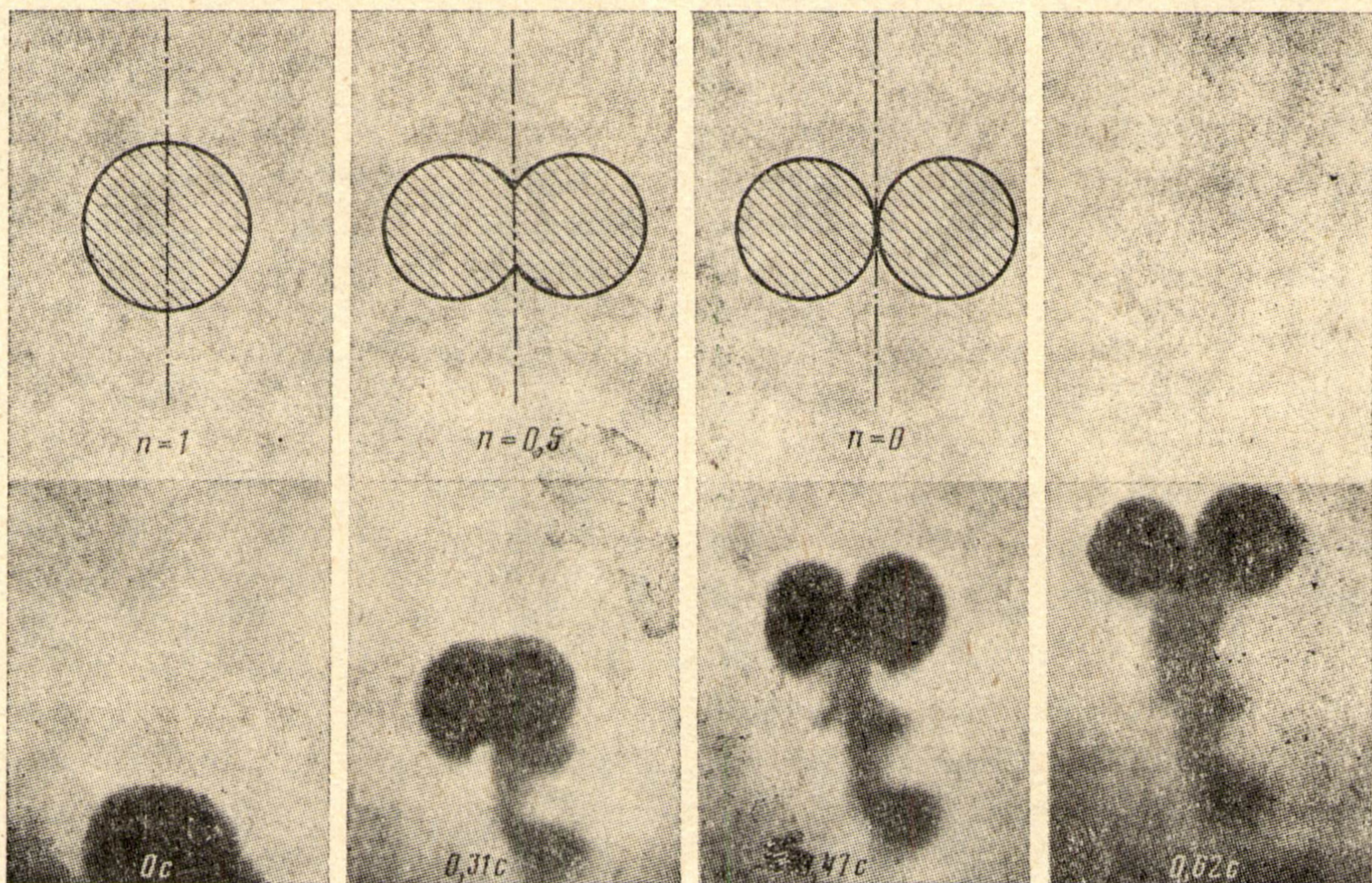
Фиг. 1

ления давления в газе и построенного поля течения твердой фазы на основании первого уравнения (1.1) находится поле скоростей ожижающего агента.

В дальнейшем при анализе удобно воспользоваться системой ортогональных безразмерных коаксиальных координат $\xi = \theta_1 - \theta_2$, $\eta = \ln(r_2/r_1)$, изображенной на фиг. 1. Для построения поля скоростей жидкой фазы запишем первое уравнение (1.1) в безразмерном виде в системе криволинейных координат (ξ, η)

$$(1.5) \quad v_\xi = w_\xi - \frac{\delta}{\sqrt{g_{\xi\xi}}} \frac{\partial p_f}{\partial \xi}, \quad v_\eta = w_\eta - \frac{\delta}{\sqrt{g_{\eta\eta}}} \frac{\partial p_f}{\partial \eta}$$

Здесь $g_{\xi\xi}$ и $g_{\eta\eta}$ — компоненты метрического тензора, а в качестве характерных значений выбраны: скоростей — величина скорости стационар-



Фиг. 2

ного всплывания полости U_{cav} , линейного размера — a_b , давления — Ja_b , и введено обозначение $\delta = v_0/U_{\text{cav}} = kJ/U_{\text{cav}}$.

Воспользуемся далее соленоидальностью вектора w и введем безразмерную функцию тока твердой фазы ψ_s , так что

$$(1.6) \quad w_\xi = \sqrt{\frac{g_{\xi\xi}}{g}} \frac{\partial \psi_s}{\partial \eta} = \frac{1}{\sqrt{g_{\eta\eta}}} \frac{\partial \psi_s}{\partial \eta}$$

$$w_\eta = -\sqrt{\frac{g_{\eta\eta}}{g}} \frac{\partial \psi_s}{\partial \xi} = -\frac{1}{\sqrt{g_{\xi\xi}}} \frac{\partial \psi_s}{\partial \xi}, \quad g = g_{\xi\xi} g_{\eta\eta}$$

Пусть теперь $p_f^*(\xi, \eta)$ — функция, гармонически сопряженная с $p_f(\xi, \eta)$. Тогда в силу условий Коши — Римана имеем

$$(1.7) \quad \frac{1}{\sqrt{g_{\xi\xi}}} \frac{\partial p_f}{\partial \xi} = -\frac{1}{\sqrt{g_{\eta\eta}}} \frac{\partial p_f^*}{\partial \eta}, \quad \frac{1}{\sqrt{g_{\eta\eta}}} \frac{\partial p_f}{\partial \eta} = \frac{1}{\sqrt{g_{\xi\xi}}} \frac{\partial p_f^*}{\partial \xi}$$

Подставляя соотношения (1.6) и (1.7) в (1.5), получим для компонент скорости жидкой фазы выражения

$$v_\xi = \frac{1}{\sqrt{g_{\eta\eta}}} \frac{\partial}{\partial \eta} (\psi_s + \delta p_f^*), \quad v_\eta = -\frac{1}{\sqrt{g_{\xi\xi}}} \frac{\partial}{\partial \xi} (\psi_s + \delta p_f^*)$$

из которых следует, что искомое поле скоростей ожижающего агента описывается функцией тока $\psi_f = \psi_s + \delta p_f^*$. Функция ψ_s в последнем равенстве однозначно определяется комплексным потенциалом течения твердой фазы, который задается соотношением [8]

$$(1.8) \quad W_s(\zeta) = \frac{2i\gamma}{n} \operatorname{ctg} \frac{\zeta}{n}$$

$$\zeta = \xi + i\eta, \quad z = x + iy = \gamma \operatorname{ctg} \frac{\zeta}{n}, \quad \gamma = \sin \frac{\pi n}{2} = \frac{h}{a_b}$$

(x и y — декартовы прямоугольные координаты (фиг. 1)). Параметр n характеризует при этом различные формы рассматриваемых полостей: значение $n = 0$ соответствует полости в виде двух касающихся кругов равного радиуса, при $n = 1$ полость имеет форму одиночного круга, а при $n = 2$ ее граница вырождается в отрезок оси симметрии длиной $2h$. Для иллюстрации на фиг. 1 приведен случай $n \in (0, 1)$. Если же $n \in (1, 2)$, то полость имеет форму чечевицы.

Отделяя в (1.8) мнимую часть, находим, что течение твердой фазы описывается функцией тока

$$(1.9) \quad \psi_s = \frac{2\gamma}{n} \sin \frac{2\xi}{n} \left(\operatorname{ch} \frac{2\eta}{n} - \cos \frac{2\xi}{n} \right)^{-1}$$

которая соответствует обтеканию однородным на бесконечности потоком идеальной несжимаемой жидкости твердой вертикальной стенки $\xi = 0$ с выступом в виде части окружности $\xi = \pi n/2$ или симметричной относительно прямой $\xi = 0$ фигуры, составленной двумя круговыми сегментами. Для получения поля скоростей ожижающего агента остается найти распределение давления p_f вне всплывающей полости, построив решение уравнения (1.4) с граничным условием (1.2) и условием на бесконечности (1.3).

Из теории фильтрации известно, что задачи такого рода эквивалентны нахождению комплексного потенциала некоторого плоского течения. Поэтому для вычисления p_f и p_f^* поступим следующим образом. Пусть каким-либо способом найдена аналитическая функция W , такая, что

$$(1.10) \quad (\operatorname{Im} W)|_s = 0, \quad \frac{dW}{dz} \Big|_{z=\infty} = \frac{\partial (\operatorname{Im} W)}{\partial y} \Big|_{z=\infty} = -1$$

Обращаясь к уравнению (1.4) и условиям (1.2) и (1.5), записанным в безразмерном виде, заключаем в силу единственности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа, что $p_f = \operatorname{Im} W$, $p_f^* = \operatorname{Re} W$. Очевидно, определенная условиями (1.10) аналитическая функция W представляет собой аналог комплексного потенциала обтекания тела заданной формы однородным на бесконечности потоком идеальной жидкости, антипараллельным оси x декартовой прямоугольной системы координат.

Для построения функции W применим метод конформного отображения на единичный круг [8, 9]. Наиболее просто этот метод реализуется в случае $n = 0$, когда в плоскости z отображаемая область имеет форму двух соприкасающихся в начале координат кругов единичного радиуса. Указанная конфигурация отображаемой области соответствует при этом полости, образованной двумя одинаковыми круговыми пузырями, слившимися в одной точке, или одиночному пузырю возле вертикальной стенки.

Последовательность отображений внутренности области в плоскости z на внутренность единичного круга в плоскости σ в рассматриваемом случае $n = 0$ представлена на фиг. 3.

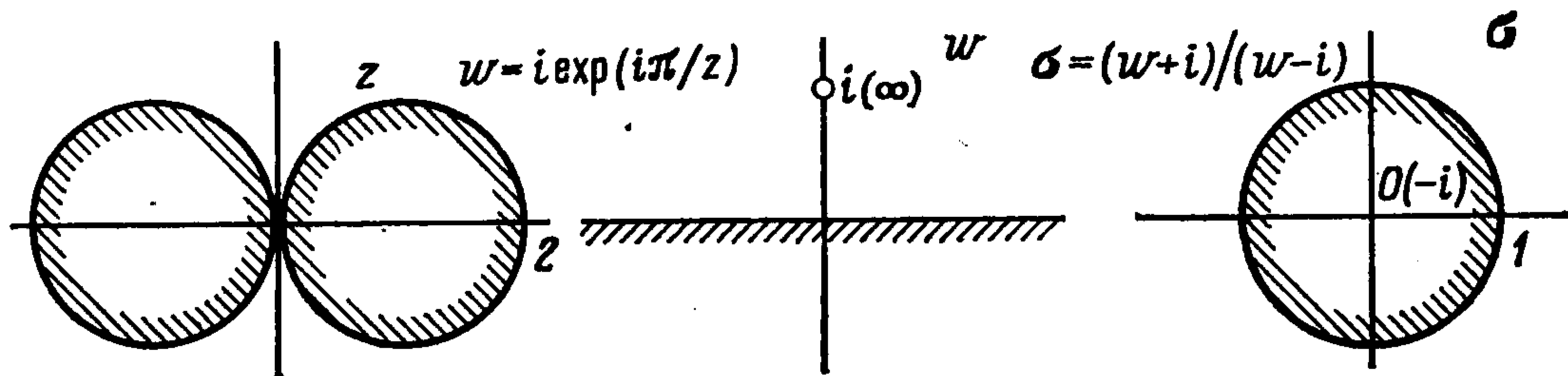
Отображающая функция такова:

$$(1.11) \quad \sigma(z) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2z}, \quad \sigma(\infty) = \infty, \quad \left| \frac{d\sigma}{dz} \right| \Big|_{z=\infty} = \frac{2}{\pi}$$

Аналог комплексного потенциала течения в плоскости σ имеет простой вид $W(\sigma) = -(\sigma + \sigma^{-1})$, откуда окончательно получаем с учетом условий нормировки в (1.11)

$$(1.12) \quad W(z) = -\frac{\pi}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2z} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{2z} \right)$$

Для обобщения последнего соотношения на случай $n \neq 0$ запишем выражение для комплексного потенциала течения твердой фазы вокруг



Фиг. 3

полости рассматриваемого типа. Из (1.8) в предельном случае $n \rightarrow 0$ имеем

$$(1.13) \quad W_s(\zeta) = i\pi \operatorname{ctg} \frac{\pi}{z}$$

Основываясь на сопоставлении соотношений (1.13) и (1.12) и исходя из общего выражения (1.8) для комплексного потенциала $W_s(\zeta)$, сконструируем искомую функцию $W(\zeta)$ при $n \neq 0$ в виде

$$(1.14) \quad W(\zeta) = -\frac{\gamma}{n} \left(\operatorname{ctg} \frac{\zeta}{2n} + \operatorname{tg} \frac{\zeta}{2n} \right), \quad z = \gamma \operatorname{ctg} \frac{\zeta}{2}, \quad 0 < n < 2$$

Проверим, удовлетворяет ли построенная функция условиям (1.10). Из (1.14), дифференцируя, находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\operatorname{Im} W)}{\partial y} + i \frac{\partial(\operatorname{Im} W)}{\partial x} &= \frac{dW}{dz} = \frac{dW}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} = \\ &= \frac{1}{n^2} \left[\left(\sin \frac{\zeta}{2} / \cos \frac{\zeta}{2n} \right)^2 - \left(\sin \frac{\zeta}{2} / \sin \frac{\zeta}{2n} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Устремляя теперь $\xi \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$ (т. е. $\zeta \rightarrow 0$), что соответствует удалению от полости ($z \rightarrow \infty$), получим

$$\frac{dW/dz}{\substack{\xi \rightarrow 0 \\ z \rightarrow \infty}} \rightarrow -1, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\partial(\operatorname{Im} W)/\partial y}{\substack{\xi \rightarrow 0 \\ z \rightarrow \infty}} \rightarrow -1$$

Кроме того, $(\operatorname{Im} W)|_S = 0$, в чем можно непосредственно убедиться из (1.14).

Отделяя действительную и мнимую части в равенстве (1.14), находим распределение давления и функцию тока ожижающего агента в виде

$$(1.15) \quad p_f = \operatorname{Im} W(\zeta) = \frac{4\gamma}{n} \operatorname{sh} \frac{\eta}{n} \cos \frac{\xi}{n} \left(\operatorname{ch} \frac{2\eta}{n} - \cos \frac{2\xi}{n} \right)^{-1}$$

$$(1.16) \quad \begin{aligned} \psi_f &= \psi_s + \delta \operatorname{Re} W(\zeta) = \\ &= -\frac{4\gamma}{n} \sin \frac{\xi}{n} \left(\delta \operatorname{ch} \frac{\eta}{n} - \cos \frac{\xi}{n} \right) \left(\operatorname{ch} \frac{2\eta}{n} - \cos \frac{2\xi}{n} \right)^{-1} \end{aligned}$$

2. Область замкнутой циркуляции и режимы течения жидкой фазы. Из соотношения (1.16) следует, что в случае, когда скорость стационарного всплывания полости U_{cav} превосходит скорость псевдоожижения v_0 , т. е. $\delta = v_0/U_{\text{cav}} < 1$, около полости существует область замкнутой циркуляции ожижающего агента (облако). Граница облака описывается

уравнением

$$(2.1) \quad \delta \operatorname{ch} \frac{\eta}{n} - \cos \frac{\xi}{n} = 0$$

При $\delta > 1$ уравнение (2.1) не имеет действительных решений. В этом случае замкнутых линий тока жидкой фазы в окрестности полости не образуется, т. е. режим течения газа проточный. Эволюция границы облака в зависимости от величины δ представлена на фиг. 4 в случае $n = 0$.

В дальнейшем рассматривается случай циркуляционного режима течения жидкой фазы ($U_{\text{cav}} > v_0$), когда вокруг всплывающей полости существует облако. Захваченный облаком газ интенсивно циркулирует внутри него, так что естественно допустить полное перемешивание жидкой фазы и постоянство концентрации реагента в облаке.

3. Массообмен полости с непрерывной фазой. Рассмотрим случай, когда число Пекле, определенное по характерному размеру области замкнутой циркуляции l , скорости $U_{\text{cav}} - v_0$ движения полости относительно однородного потока жидкой фазы и эффективному коэффициенту диффузии D , велико по сравнению с единицей: $Pe = l(U_{\text{cav}} - v_0)/D \gg 1$. В этом случае сопротивление массопереносу

к полости сосредоточено вблизи границы облака в области диффузионного пограничного слоя ([10] и др.). Задача о массообмене полости с непрерывной фазой кипящего слоя сводится, таким образом, к расчету диффузионного потока к границе облака [5].

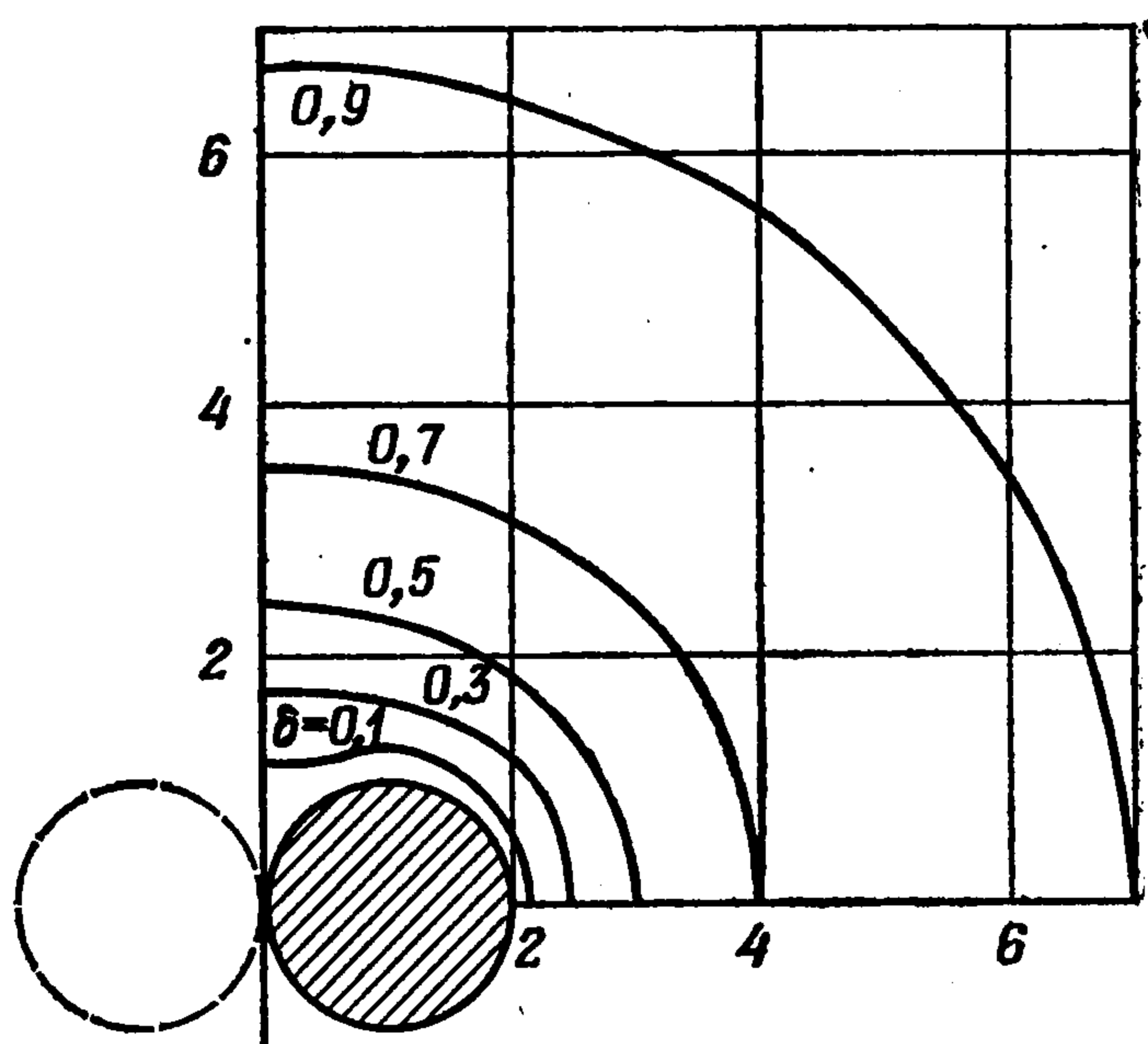
Установившееся поле концентрации реагирующего вещества во внешнем по отношению к облаку пространстве описывается уравнением стационарной конвективной диффузии. Запишем его вместе с граничными условиями, отражающими невозмущенность концентрации вдали от полости и полное поглощение растворенного вещества на границе облака, в стандартном безразмерном виде

$$(3.1) \quad \frac{1}{\sqrt{g_{vv}}} v_v \frac{\partial c}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{g_{\kappa\kappa}}} v_\kappa \frac{\partial c}{\partial \kappa} = \frac{Pe^{-1}}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{vv}} \frac{\partial c}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial \kappa} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{\kappa\kappa}} \frac{\partial c}{\partial \kappa} \right) \right]$$

$$c|_{v \rightarrow \infty} \rightarrow 1, \quad c|_{s_c} = 0$$

Здесь v и κ — нормальная и касательная координаты, связанные с поверхностью S_c , ограничивающей облако, уравнение которой в системе (v, κ) имеет вид $v = v_0$; g_{vv} , $g_{\kappa\kappa}$ — компоненты метрического тензора, $g = g_{vv}g_{\kappa\kappa}$. Концентрация c отсчитывается от ее значения в области замкнутой циркуляции и отнесена к величине концентрации вдали от полости.

Отметим, что условием квазистационарности процесса диффузии в области диффузионного пограничного слоя является условие $T \gg t_D$, где T — характерное время пребывания пузыря в слое: $T = L/U_{\text{cav}}$ (L — линейный размер реактора), а t_D — ха-



Фиг. 4

ракторное диффузионное время (время установления диффузионного пограничного слоя): $t_D = \delta_D^2/D = l^2 D^{-1} \text{Re}^{-1}$ (δ_D — толщина диффузионного погранслоя, $\delta_D \sim \sim l \text{Re}^{-1/2}$).

Для приближенного решения уравнения (3.1) применяется метод сращиваемых асимптотических разложений. Метод основан на выделении в пространстве течения областей, в которых после сравнения порядков отдельных членов уравнения может быть достигнуто его упрощение. Решения упрощенного уравнения (3.1), полученные в каждой из выделенных областей, сращиваются далее на их границах.

Введем, следуя этому методу, в области диффузионного погранслоя растянутую нормальную координату Y по формуле

$$(3.2) \quad Y = \text{Re}^{1/2} (v - v_0), \quad Y = O(1)$$

В переменных (Y, κ) область диффузионного погранслоя будет описываться соотношениями

$$(3.3) \quad v - v_0 \leq \text{Re}^{-1/2} Y, \quad \kappa^- \leq \kappa \leq \kappa^+ - O(\text{Re}^{-1/2})$$

где координаты κ^- и κ^+ соответствуют передней и задней критическим точкам. В области задней критической точки, где $v - v_0 \leq \text{Re}^{-1/2} Y$, $\kappa^+ - O(\text{Re}^{-1/2}) \leq \kappa \leq \kappa^+$, приближение диффузионного погранслоя оказывается непригодным [10]. Однако вклад этой области в полный поток вещества к поверхности $v = v_0$ мал по сравнению с вкладом, даваемым областью диффузионного пограничного слоя [10], и не учитывается при рассмотрении.

Оценка по порядку величины членов уравнения (3.1) в области (3.3) основана на разложении функции тока оживающего агента в ряд по степеням $v - v_0$ вблизи границы облака. Это разложение имеет вид

$$(3.4) \quad \psi_f = (v - v_0) f(\kappa) + O[(v - v_0)^2], \quad f(\kappa) = \left. \frac{\partial \psi_f(v, \kappa)}{\partial v} \right|_{v=v_0} = \\ = - \left(\sqrt{g_{vv}} v_\kappa \right) |_{v=v_0}$$

При помощи выражений (3.3) и (3.4) уравнение (3.1) после отбрасывания в нем членов более высокого порядка малости по параметру $\text{Re}^{-1/2}$ может быть сведено¹ к уравнению теплопроводности

$$(3.5) \quad \partial c / \partial \tau = \partial^2 c / \partial z^2$$

Здесь Z — переменная Мизеса: $Z = Y f(\kappa)$, а новая переменная τ связана с координатой κ соотношением

$$(3.6) \quad \tau(\kappa, \kappa^-) = \left| \int_{\kappa^-}^{\kappa} v_\kappa^{\circ}(\lambda) \sqrt{g_{\kappa\kappa}(\lambda)} d\lambda \right|$$

где верхний индекс «0» означает, что соответствующая величина взята на поверхности $v = v_0$.

Граничные условия для уравнения (3.5) таковы:

$$(3.7) \quad Z \rightarrow \infty, c \rightarrow 1; \quad Z = 0, c = 0; \quad Z \neq 0, \tau = 0, c = 1$$

(первое и третье из них следуют из условий сращивания с невозмущенным полем концентрации во внешней области, второе вытекает из второго условия (3.1)).

¹ См.: Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С. Массообмен капли пузыря с ламинарным потоком жидкости при больших числах Пекле. — Препринт Ин-та прикл. механики АН СССР. М., № 120. 60 с.

Решение задачи (3.5), (3.7) дает распределение концентрации в области диффузионного пограничного слоя и имеет вид [11]

$$(3.8) \quad c(Z, \tau) = \operatorname{erf} \left(\frac{Z}{2\sqrt{\tau}} \right)$$

Дифференцируя выражение (3.8) по нормали к поверхности облака, получим безразмерный локальный диффузионный поток на эту поверхность

$$j(x) = \frac{1}{\sqrt{g_{vv}^{\circ}(x)}} \left(\frac{\partial c}{\partial v} \right)^{\circ} = \frac{\operatorname{Pe}^{1/2} |v_x^{\circ}(x)|}{\sqrt{\pi\tau(x, x^+)}}$$

Полный поток вещества на границу области замкнутой циркуляции в двумерной задаче равен тогда

$$(3.9) \quad I = \int_{S_c} j(x) dx = 2 \int_{x^+}^{x^-} \frac{\operatorname{Pe}^{1/2} v_x^{\circ}(\lambda)}{\sqrt{\pi\tau(\lambda)}} \sqrt{g_{xx}^{\circ}(\lambda)} d\lambda = \\ = \frac{4 \operatorname{Pe}^{1/2}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\tau(x^-, x^+)}$$

Здесь S_c — поверхность облака, задаваемая уравнением (2.1). Введем на ней метрику естественным образом, т. е. положим $g_{xx}^{\circ} = 1$. Координата x есть при этом просто длина дуги границы облака. Вычисляя значение $\tau(x^-, x^+)$ в (3.9), перейдем к введенным выше коаксиальным координатам (ξ, η) , учитывая, что

$$(3.10) \quad dx^2 = g_{\xi\xi}^{\circ} d\xi^2(\eta) + g_{\eta\eta}^{\circ} d\eta^2 = g_{\eta\eta}^{\circ} \left[1 + \frac{g_{\xi\xi}^{\circ}}{g_{\eta\eta}^{\circ}} \left(\frac{d\xi}{d\eta} \right)^2 \right] d\eta^2$$

Уравнение границы облака в координатах (ξ, η) получается в виде $\xi = \xi(\eta)$ непосредственно из формулы (2.1).

При помощи (3.10) преобразуем выражение (3.6) для переменной τ к виду

$$(3.11) \quad \tau(\eta, \eta^-) = \left| \int_{\eta^-}^{\eta} v_x^{\circ}(\eta') \left(\frac{dx}{d\eta'} \right)^{\circ} d\eta' \right| = \\ = \int_{\eta^-}^{\eta} v_x^{\circ}(\eta') \sqrt{g_{\eta\eta}^{\circ}(\eta')} \left[1 + \left(\frac{d\xi}{d\eta'} \right)^2 \right]^{1/2} d\eta', \quad \eta = -n \operatorname{arch} \delta^{-1}$$

так как $g_{\xi\xi}^{\circ} = g_{\eta\eta}^{\circ}$ в коаксиальных координатах.

Функцию тока оживающего агента, найденную в п. 1, приведем к безразмерному виду, введя в качестве характерной скорости величину $U_{\text{сав}} = v_0$, а длины — характерный размер облака l . Из соотношения (1.16) получаем

$$\psi_f = - \frac{a_b}{1-\gamma} \frac{4\gamma}{2 \ln} \sin \frac{\xi}{n} \left(\gamma \operatorname{ch} \frac{\eta}{n} - \cos \frac{\xi}{n} \right) \left(\operatorname{ch} \frac{2\eta}{n} - \cos \frac{2\xi}{n} \right)^{-1}$$

Отсюда с учетом того, что $g_{\xi\xi}^{\circ} = g_{\eta\eta}^{\circ} = a_b^2 \gamma^2 / (\operatorname{ch} \eta - \cos \xi)^2 l^2$, $v_x^{\circ} = (v_{\xi}^{\circ 2} + v_{\eta}^{\circ 2})^{1/2}$, и аналогичных равенствам (1.6) выражений для жидкой фазы приходим к окончательной формуле для интегрального потока

$$(3.12) \quad I = \frac{8 \operatorname{Pe}^{1/2}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\gamma}{n} \right)^{1/2} \left(\frac{1+\delta}{1-\delta} \right)^{1/4} \left(\frac{a_b}{l} \right)^{1/2}$$

Определяемое по (3.12) среднее число Шервуда равно (β — коэффициент массообмена)

$$(3.13) \quad \text{Sh} = \frac{\beta}{D} = \frac{I}{2\pi} = \frac{4\text{Re}^{1/2}}{\pi^{3/2}} \left(\frac{\gamma}{n}\right)^{1/2} \left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\right)^{1/4} \left(\frac{a_b}{l}\right)^{1/2} = \\ = 4 \left(\frac{1}{n} \sin \frac{\pi n}{2}\right)^{1/2} \frac{(1-\delta^2)^{1/4}}{\pi^{3/2}} \left(\frac{a_b U_{\text{cav}}}{D}\right)^{1/2}$$

Рассмотрим ряд частных случаев, соответствующих определенным формам всплывающей полости.

Одиночный круговой пузырь радиуса a_b . В этом случае выражение для среднего числа Шервуда следует из (3.13) при $n = 1$ и $a_b/l = ((1 - \delta)/(1 + \delta))^{1/2}$ (граница облака представляет собой окружность радиуса $((1 + \delta)/(1 - \delta)) a_b$)

$$(3.14) \quad \text{Sh} = \frac{4}{\pi^{3/2}} \text{Re}^{1/2} = \frac{4(1-\delta^2)}{\pi^{3/2}} \left(\frac{a_b U_{\text{cav}}}{D}\right)^{1/2}$$

что совпадает с результатом, полученным ранее [5].

Два равных соприкасающихся круговых пузыря радиуса a_b . Переходя в (3.13) и (2.13) к пределу $n \rightarrow 0$, получаем для среднего числа Шервуда выражение

$$(3.15) \quad \text{Sh} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} (1-\delta^2)^{1/4} \left(\frac{a_b U_{\text{cav}}}{D}\right)^{1/2}$$

Одиночный круговой пузырь радиуса a_b , всплывающий вдоль твердой вертикальной стенки. Для среднего числа Шервуда результат (3.15) уменьшается вдвое.

Напомним, что соотношения (3.12)–(3.15) были получены в предположении $\text{Re} = l(U_{\text{cav}} - v_0)/D \gg 1$. Для медленно всплывающих полостей при $U_{\text{cav}} \rightarrow v_0$ указанные формулы справедливы при условии $1 - \delta \gg \gg Dn/(2h/U_{\text{cav}})$ (в качестве характерного размера облака взята его полуширина $l = h/\text{tg}(1/2n \cdot \arccos \delta)$).

Соотношения (3.13) — (3.15) дают возможность судить об изменении полного потока вещества на поверхность облака в зависимости от деформации первоначально круговой полости. Предположим, как это часто делается в инженерных расчетах [1–3], что скорость всплывания полости зависит лишь от ее объема (площади) и не зависит от формы, так что $U_{\text{cav}} = U_{\text{cav}}(\Sigma)$. Переписывая формулы (3.13) и (3.14) в терминах площадей Σ соответствующих фигур, получаем

$$(3.16) \quad \text{Sh} = \left(\frac{2^{7/2} U_{\text{cav}}}{\pi^3 D n} \sin \frac{\pi n}{2}\right)^{1/2} \left(\pi - \frac{\pi n}{2} + \frac{\sin \pi n}{2}\right)^{-1/4} (1-\delta^2)^{1/4} \Sigma^{1/4}$$

$$(3.17) \quad \text{Sh} = \left(\frac{16 U_{\text{cav}}}{\pi^{7/2} D}\right)^{1/2} (1-\delta^2)^{1/4} \Sigma^{1/4}$$

Предположим также, что при деформации объем полости не изменяется ($\Sigma = \text{const}$). Деля (3.16) на (3.17), приходим к следующему выражению для отношения полных потоков вещества к облаку при деформации круговой полости

$$(3.18) \quad F(n) = 2^{-1/4} \left(n^{-1} \sin \frac{\pi n}{2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{n}{2} + \frac{\sin \pi n}{2\pi}\right)^{-1/4}$$

Из анализа зависимости (3.18), представленной на фиг. 5, следует, что деформации полости приводят, вообще говоря, к увеличению интенсивности массообмена с непрерывной фазой. Практически во всем диапазоне изменения параметра n , за исключением окрестности значения $n = 2$, прирост потока вещества к облаку мал. Так, если в результате деформации из одиночного кругового пузыря образуется двойной ($n = 0$, см. фиг. 2), этот прирост равен примерно 5%.

Более точный учет изменения диффузионного потока вещества к поверхности облака при деформации пузыря может быть проведен, если известна зависимость коэффициента сопротивления и миделева сечения всплывающей полости от ее формы.

Записывая в обычной форме баланс динамического напора в набегающем на деформированный пузырь потоке и действующей на него движущей выталкивающей силы, приходим к следующему соотношению для скорости всплывания двумерной полости:

$$(3.19) \quad U_{\text{cav}} = Kl_{\text{mid}}^{-1/2}, \quad K = (2g\Sigma/c_x)^{1/2}$$

Здесь c_x — коэффициент лобового сопротивления, а l_{mid} — длина миделева сечения полости.

Формула (3.19) в отличие от принятого выше допущения $U_{\text{cav}} = U_{\text{cav}}(\Sigma)$ позволяет учесть изменение скорости всплывания полости в зависимости от ее формы.

Отношение интегральных потоков на поверхность облака после и до деформации соответственно при помощи формул (3.16), (3.17) и (3.19) представим в виде

$$(3.20) \quad F_1(n, c_x, v_0) = \left[\sqrt{2} \left(1 - \frac{n}{2} + \frac{\sin \pi n}{2\pi} \right)^{1/2} \times \right. \\ \left. \times \left(1 + \cos \frac{\pi n}{2} \right)^{-1} \right]^{1/4} F(n) \frac{1 - v_0^2/U_{\text{cav}}^2}{1 - v_0^2/U_b^2}$$

Здесь выражение в квадратных скобках представляет собой отношение диаметра пузыря и длины миделева сечения полости после деформации, функция $F(n)$ определяется соотношением (3.18), а U_b — скорость всплывания пузыря.

При деформациях рассматриваемого вида с сохранением объема полости для длины ее миделева сечения справедливо выражение

$$l_{\text{mid}} = \sqrt{2} \left(1 + \cos \frac{\pi n}{2} \right) \left(1 - \frac{n}{2} + \frac{\sin \pi n}{2\pi} \right)^{-1/2} a_b$$

где a_b — радиус пузыря до деформации. В отсутствие деформации ($n = 1$) $l_{\text{mid}} = 2a_b$, при образовании двойного пузыря ($n = 0$) $l_{\text{mid}} = 2\sqrt{2}a_b$, а при вытягивании пузыря вдоль по потоку ($n \rightarrow 2$) $l_{\text{mid}} \rightarrow 0$.

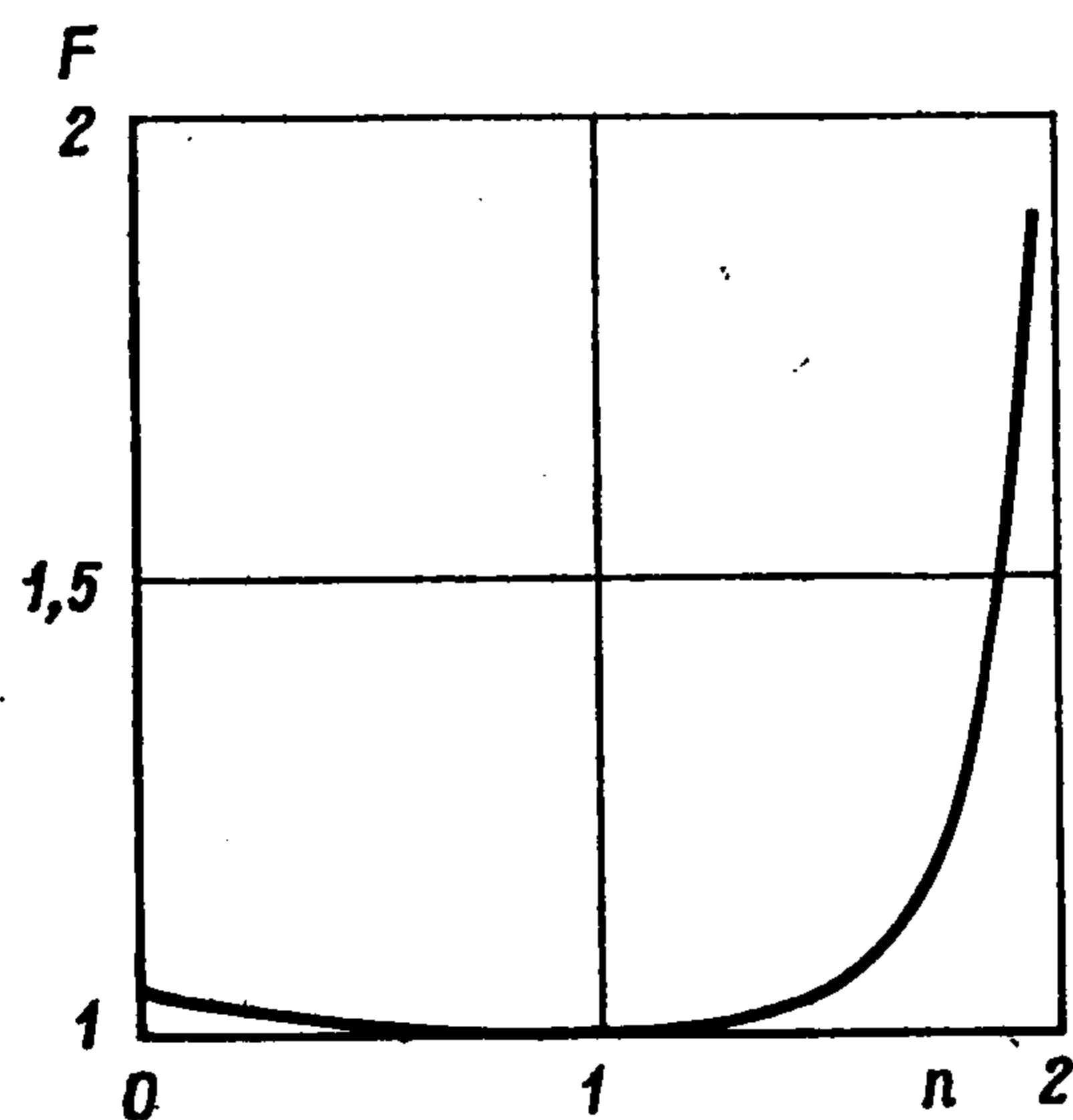
Из соотношения (3.20) следует, в частности, что деформации пузыря вдоль по потоку ($1 < n < 2$, $l_{\text{mid}} < 2a_b$, $U_{\text{cav}} > U_b$) приводят к большей интенсификации массообмена по сравнению с результатом (3.18), полученным без учета изменения формы пузыря, так как рост интегрального потока вещества к облаку связан не только с увеличением его поверхности, но и с возрастанием скорости всплывания полости. Напротив, при деформациях поперек потока ($0 < n < 1$, $l_{\text{mid}} > 2a_b$, $U_{\text{cav}} < U_b$) увеличение поверхности облака компенсируется падением скорости всплывания пузыря, так что в результате приток вещества к облаку может уменьшиться.

Полученные результаты позволяют оценить изменение коэффициента массообмена при таких процессах, как слияние двух и более одиночных круговых пузырей, дробление одиночного кругового пузыря, движение пузыря вдоль твердой вертикальной стенки.

Так, в первом случае из (3.17) следует, что при слиянии большого числа m одинаковых круговых пузырей, первоначально находившихся на бесконечном удалении друг от друга, интенсивность массообмена уменьшается в соответствии с формулой

$$m \text{Sh}/\text{Sh}_0 = m^{5/8} (1 - \delta^2)^{1/4} (1 - \delta^2 m^{-1/2})^{-1/4} \sim m^{5/8} > 1$$

при больших m . Число Шервуда Sh соответствует здесь одиночному круговому пузырю, по скорости всплывания которого определяется величина δ , а величина Sh_0 характеризует массообмен с непрерывной фазой пузыря, получившегося в результате коалесценции.



Фиг. 5

Наоборот, при дроблении массообмен интенсифицируется:

$$Sh_d/(m Sh) \sim m^{-1/2} < 1, m \gg 1$$

что объясняется ростом (после дробления) поверхности контакта «суммарного облака» с непрерывной фазой. Очевидно, что массообмен будет еще более интенсивным, если в результате дробления образуются настолько мелкие пузыри, что они будут проточными ($\delta > 1$).

Из соотношений (3.14) и (3.15) следует также, что приток вещества к поверхности облака для кругового пузыря, движущегося вдоль твердой стенки, вследствие ее экранирующего влияния падает почти на 40% по сравнению со случаем пузыря равного размера, всплывающего с той же скоростью в неограниченной среде (отношение интегральных потоков равно $\sqrt{\pi/8} \cong 0,627$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Дэвидсон И. Ф., Харрисон Д. Псевдооживление твердых частиц. М.: Химия, 1965. 184 с.
2. Псевдооживление./Под ред. И. Ф. Дэвидсона и Д. Харрисона. М.: Химия, 1974. 725 с.
3. Гельперин Н. И., Айнштейн В. Г., Кваша В. Б. Основы техники псевдооживления. М.: Химия, 1967. 664 с.
4. Бородуля В. А., Гупало Ю. П. Математические модели химических реакторов с кипящим слоем. Минск: Наука и техника, 1976. 207 с.
5. Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С., Сергеев Ю. А. О массообмене между пузырями и непрерывной фазой в псевдооживленном слое.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 4, с. 42—49.
6. Murray J. D. On the mathematics of fluidization. Pt II. Steady motion of fully developed bubbles.— J. Fluid Mech., 1965, v. 22, pt 1, p. 57—80.
7. Collins R. An extension of Davidson's theory of bubbles in fluidized beds.— Chem. Engng Sci., 1965, v. 20, No. 8, p. 747—755.
8. Милн-Томсон Л. Теоретическая гидромеханика. М.: Мир, 1964. 655 с.
9. Лаурентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1977. 407 с.
10. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
11. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.

Москва

Поступила в редакцию
1.XI.1983