

УДК 533.6.011

О СВОБОДНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ЛАМИНАРНОГО ГИПЕРЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ ЗА ПРОФИЛЕМ

Мануйлович С. В.

Рассматривается плоскопараллельное ламинарное гиперзвуковое течение на больших расстояниях за крылом бесконечного размаха. Изучаются несимметричные свободные возмущения основного течения, описываемого взрывной аналогией. Движение газа подчиняется уравнениям Навье — Стокса и задается при помощи двучленных асимптотических разложений. Построенные симметричные и антисимметричные возмущения взрывного решения имеют колебательный характер с амплитудой и частотой, затухающими вниз по потоку.

1. **Постановка задачи.** Будем изучать плоскопараллельное обтекание профиля гиперзвуковым $p_\infty = 0$ потоком совершенного газа. Коэффициенты вязкости λ и теплопроводности k положим пропорциональными удельной энтальпии, соответствующие коэффициенты пропорциональности обозначим λ_0, k_0 . Отношение κ удельных теплоемкостей C_p и C_v будем считать постоянным и удовлетворяющим неравенству $1 < \kappa < 2$. В качестве основных единиц измерения будем использовать плотность набегающего потока ρ_∞ , его скорость U_∞ и коэффициент λ_0 . Число Прандтля $Pr = C_p \lambda_0 / k_0$.

Введем обозначения $1 + v_x, v_y$ для компонент вектора скорости вдоль осей x, y декартовой системы координат, начало которой совмещено с обтекаемым профилем, а ось абсцисс совпадает с направлением набегающего потока. Давление, плотность, удельную энтальпию обозначим, соответственно, p, ρ, w . Для описания движения газа будем использовать систему уравнений Навье—Стокса в переменных Мизеса x, Ψ .

Главные члены асимптотических $x \rightarrow \infty$ разложений, описывающих ламинарное гиперзвуковое течение вязкого теплопроводного газа за телом конечных размеров, были найдены в [1]. Построенное там течение симметрично относительно линии тока $\Psi = 0$ и включает две области с существенно различными свойствами: внешний поток и ламинарный след. Решение [1] справедливо лишь в первом приближении, в действительности оно всегда возмущено в силу различных физических причин, таких, как выделение тепла или вдув массы газа с поверхности обтекаемого тела [2], действие подъемной силы [3] и т. д. (в случае невязкого изэнтропического течения возмущенное взрывное решение может описывать обтекание полутел [4]). Кроме указанных причин возмущения основного решения [1] могут быть обусловлены особенностями гиперзвукового течения в окрестности конкретного тела. Эти возмущения, называемые свободными, удовлетворяют условиям Рэнкина — Гюгонио на скачке и условиям срачивания в центре следа. Цель данной работы — построение таких возмущений.

Ввиду того что уравнения, описывающие течение во втором приближении, линейны, произвольные возмущения основного течения удобно разбивать на симметричные и антисимметричные и исследовать их по отдельности. Симметричными будем называть такие возмущения, когда

поправочные члены в разложениях для v_x , p , ρ , w четные, а для v_y , y — нечетные функции переменной Ψ ; в противоположном случае будем говорить об антисимметричных возмущениях (т. е. таких, когда поправки в разложениях первых четырех параметров нечетные, а последних двух — четные функции Ψ).

Задачу поиска свободных возмущений будем решать как обратную, т. е. зададим возмущение ударного фронта из некоторого класса функций и построим течение, а затем определим конкретный вид этого возмущения, используя условия симметрии в центре следа.

2. Внешняя область. При изучении задачи сверхзвукового обтекания клина со слабо искривленной поверхностью было показано [5], что течение формируется в процессе последовательного отражения возмущений от ударной волны и щеки клина. Как показано в [6], при обтекании затупленного клина эти возмущения затухают при $x \rightarrow \infty$, как $\text{Re}(C_z x^z)$, где C_z и z — комплексные постоянные. В связи с этим будем, подобно [7], искать возмущения внешнего течения в классе комплексных степеней, задавая форму ударной волны в виде разложения (далее все разложения записаны для полуплоскости $\Psi \geq 0$, в поправочных членах опущен знак действительной части Re)

$$(2.1) \quad y_s = Cx^{3/2} (1 + C_z x^z + \dots)$$

Постоянную z подчиним неравенству $-1 < \text{Re } z < 0$, первая часть которого обеспечивает невязкий характер течения во внешней области [8], а вторая — затухание возмущений при $x \rightarrow \infty$.

Соответствующие (2.1) внешние разложения параметров течения даются формулами

$$(2.2) \quad \begin{aligned} v_x &= v_{x0} x^{-2/3} (v_{x11} + C_z x^z v_{x12} + \dots) \\ v_y &= v_{y0} x^{-1/3} (v_{y11} + C_z x^z v_{y12} + \dots) \\ p &= p_0 x^{-2/3} (p_{11} + C_z x^z p_{12} + \dots) \\ \rho &= \rho_0 (\rho_{11} + C_z x^z \rho_{12} + \dots) \\ w &= w_0 x^{-2/3} (w_{11} + C_z x^z w_{12} + \dots) \\ y &= Cx^{3/2} (y_{11} + C_z x^z y_{12} + \dots) \end{aligned}$$

В этих разложениях величины с индексами 11 и 12 есть функции автономной переменной $\eta = \Psi x^{-2/3}/C$, а нормировочные коэффициенты определяются при помощи равенств

$$\begin{aligned} p_0 &= -v_{x0} = \frac{8C^2}{9(\kappa + 1)}, \quad v_{y0} = \frac{4C}{3(\kappa + 1)} \\ \rho_0 &= \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}, \quad w_0 = \frac{8\kappa C^2}{9(\kappa + 1)^2} \end{aligned}$$

Функции первого приближения в силу аналогии с одномерным из-энергетическим движением [9] известны из точного решения задачи о сильном взрыве [10] в переменных Лагранжа.

Подставляя (2.2) в уравнения Навье — Стокса, получим линейную систему второго приближения

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \left(\frac{3}{2}z + 1\right) y_{12} - \eta \frac{dy_{12}}{d\eta} &= \frac{2}{\kappa + 1} v_{y12} \\ w_{12} &= \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} p_{11} \frac{dy_{12}}{d\eta} + \frac{p_{12}}{\rho_{11}} \\ \left(\frac{3}{2}z - \frac{1}{2}\right) v_{y12} - \eta \frac{dv_{y12}}{d\eta} + \frac{dp_{12}}{d\eta} &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{p_{12}}{p_{11}} - \kappa \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} = 3(z+1)\eta^{3z/2}, \quad p_{12} = \rho_{11}w_{12} + \rho_{12}w_{11}$$

$$v_{x12} = \frac{1}{\kappa+1} (2v_{y12}v_{y11} + \kappa w_{12})$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (2.3) имеет второй порядок, поскольку из первых двух уравнений можно получить еще одно алгебраическое соотношение, связывающее функции второго приближения. Данные Коши для системы (2.3) следуют из линеаризованных соотношений Рэнкина — Гюгонио для ударной волны (2.1)

$$(2.4) \quad p_{12}(1) = 3\left(z + \frac{1}{\kappa+1}\right), \quad y_{12}(1) = \frac{2}{\kappa+1}$$

Перед тем как перейти к построению решения в области следа, выпишем асимптотические разложения функций первого и второго приближений при $\eta \rightarrow 0$

$$(2.5) \quad \begin{aligned} y_{11} &= c_1 \eta^{(\kappa-1)/\kappa} + \dots, & p_{11} &= p_{21} + \dots, & c_1 &= \frac{\kappa}{\kappa+1} p_{21}^{-1/\kappa} \\ y_{12} &= c_2 \eta^{z y} + c_y + \dots, & p_{12} &= c_3 \eta^{z y + 1} + c_p + \dots, \\ z_y &= \frac{3}{2} z + \frac{\kappa-1}{\kappa} \\ c_2 &= \frac{6(\kappa-1)(z+1)}{(\kappa+1)(3\kappa z + 2\kappa - 2)} p_{21}^{-1/\kappa}, & c_3 &= \frac{(\kappa+1)(3\kappa-2)}{2\kappa(3\kappa z + 4\kappa - 2)} c_2 \end{aligned}$$

Здесь p_{21} — постоянная, известная из точного решения задачи о сильном взрыве плоского заряда [10], а постоянные $c_y(z, \kappa)$ и $c_p(z, \kappa)$ могут быть определены путем численного интегрирования задачи (2.3), (2.4).

3. Ламинарный след. Внешние разложения перестают быть справедливыми в окрестности $\eta = 0$, поскольку градиенты параметров течения здесь настолько велики, что эффекты теплопроводности и вязкости начинают играть определяющую роль. Следуя [1], подставим асимптотические представления (2.5) в разложения (2.2) и перейдем к внутренней переменной $\zeta = \Psi x^{-1/6}/C$. В результате получим асимптотические разложения параметров течения в области сращивания $\eta \ll 1$, $\zeta \gg 1$

$$(3.1) \quad \begin{aligned} p &= p_0 x^{-2/3} (p_{21} + C_z c_3 x^{2/3} \zeta^{z y + 1} + C_z c_p x^z + \dots) \\ y &= C x^{(\kappa+3)/6\kappa} [c_1 \zeta^{(\kappa-1)/\kappa} + C_z c_2 x^{z/4} \zeta^{z y} + C_z c_y x^{z_2} + \dots] \\ z_1 &= \frac{z}{4} - \frac{2\kappa-1}{2\kappa}, & z_2 &= z + \frac{\kappa-1}{2\kappa} \end{aligned}$$

Предельные разложения (3.1) позволяют определить вид внутренних разложений, описывающих течение в области ламинарного следа

$$\begin{aligned} p &= p_0 x^{-2/3} (p_{21} + C_z x^{z/4} p_{22} + C_z x^z p_{23} + \dots) \\ y &= C x^{(\kappa+3)/6\kappa} (y_{21} + C_z x^{z/4} y_{22} + C_z x^{z_2} y_{23} + \dots) \end{aligned}$$

а также дают асимптотические условия сращивания с внешней областью (индексами 21, 22 и 23 помечены функции автомодельной переменной ζ). Подставляя внутренние разложения в систему уравнений Навье — Стокса, получим уравнения для функций третьего приближения $dp_{23}/d\zeta = dy_{23}/d\zeta = 0$, откуда с учетом условий сращивания $p_{23} = c_p + \dots$, $y_{23} = c_y + \dots$, $\zeta \rightarrow \infty$ имеем

$$(3.2) \quad p_{23} = c_p, \quad y_{23} = c_y$$

Выпишем теперь асимптотические разложения для всех параметров течения, сохраняя лишь поправочные члены порядка $x^{z/4}$ (вычисленные

ниже значения z показывают, что эти члены старше отброшенных)

$$(3.3) \quad \begin{aligned} v_x &= v_{x0} x^{(3-4\kappa)/6\kappa} (v_{x21} + C_z x^{z/4} v_{x22} + \dots) \\ v_y &= v_{y0} x^{(3-5\kappa)/6\kappa} (v_{y21} + C_z x^{z/4} v_{y22} + \dots) \\ p &= p_0 x^{-2/3} p_{21} + \dots \\ \rho &= \rho_0 x^{-1/2\kappa} (\rho_{21} + C_z x^{z/4} \rho_{22} + \dots) \\ w &= w_0 x^{(3-4\kappa)/6\kappa} (w_{21} + C_z x^{z/4} w_{22} + \dots) \\ y &= C x^{(\kappa+3)/6\kappa} (y_{21} + C_z x^{z/4} y_{22} + \dots) \end{aligned}$$

Функции первого приближения, впервые изученные в [1], могут быть выражены в терминах специальных функций [3]. Функции второго приближения удовлетворяют линейной системе

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \left(\frac{3}{8} z + \frac{\kappa+3}{4\kappa} \right) y_{22} - \frac{\zeta}{4} \frac{dy_{22}}{d\zeta} &= \frac{2}{\kappa+1} v_{y22} \\ w_{22} &= \frac{\kappa+1}{\kappa-1} p_{21} \frac{dy_{22}}{d\zeta}, \quad \rho_{21} w_{22} + \rho_{22} w_{21} = 0 \\ \frac{K}{\text{Pr}} \frac{d^2 w_{22}}{d\zeta^2} + \zeta \frac{dw_{22}}{d\zeta} + \left(\frac{1}{\kappa} - \frac{3}{2} z \right) w_{22} &= 0, \quad K = \frac{16\kappa p_{21}}{3(\kappa^2-1)} \\ K \frac{d^2 v_{x22}}{d\zeta^2} + \zeta \frac{dv_{x22}}{d\zeta} + \left(\frac{4\kappa-3}{\kappa} - \frac{3}{2} z \right) v_{x22} &= \frac{4(\kappa-1)}{\kappa} w_{22} \end{aligned}$$

Решение системы (3.4) должно удовлетворять условиям симметрии при $\zeta = 0$, а также условиям срачивания при $\zeta \rightarrow \infty$. Отметим, что последние два уравнения заменой переменного $\xi = -\text{Pr} \zeta^2 / 2K$ приводятся к каноническому виду вырожденного гипергеометрического уравнения [11].

4. Симметричные возмущения. Перейдем к изучению свободных возмущений плоскопараллельного гиперзвукового течения. До сих пор постоянные C_z и z считались произвольными. Условия симметрии позволяют вычислить постоянную z , в то время как амплитуда C_z возмущений в асимптотической $x \rightarrow \infty$ постановке задачи не может быть определена.

Рассмотрим сначала задачу о гиперзвуковом обтекании симметричного профиля под нулевым углом атаки. В этом случае картина течения будет симметричной относительно оси профиля, и поэтому возмущения, описывающие отличие течения за конкретным профилем при $x \rightarrow \infty$ от решения [1], будут также симметричными. Из определения симметричных возмущений непосредственно следуют условия, которым должны удовлетворять функции второго и третьего приближений в области следа

$$(4.1) \quad \frac{dv_{x22}}{d\zeta}(0) = v_{y22}(0) = \frac{d\rho_{22}}{d\zeta}(0) = \frac{dw_{22}}{d\zeta}(0) = y_{22}(0) = y_{23}(0) = 0$$

Из последних равенств (4.1) и (3.2) получаем уравнение для определения комплексной постоянной z

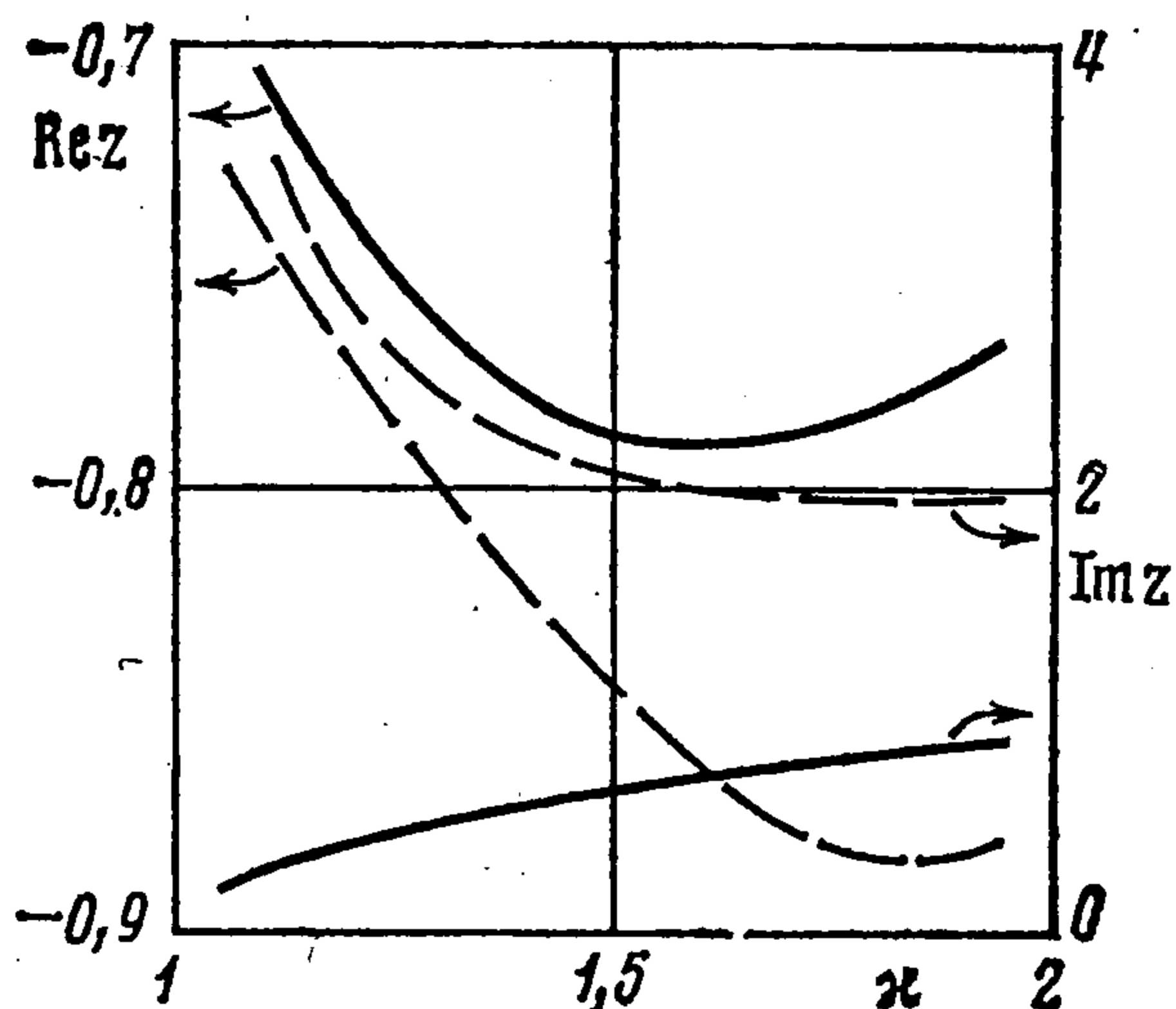
$$(4.2) \quad c_y(z, \kappa) = 0$$

Уравнение (4.2) уже встречалось ранее [12] при изучении свободных возмущений одномерного неустановившегося движения газа, вытесняемого поршнем. Там были рассмотрены предельные случаи $\kappa \rightarrow 1 + 0$, $\kappa \rightarrow \infty$, а также случай одноатомного газа $\kappa = 5/3$, однако для последнего значения κ была вычислена лишь одна пара комплексно-сопряженных корней, которые авторы [12] считали корнями наименьшего модуля.

Ниже приведены результаты более подробного исследования уравнения (4.2). Для расчета корней этого уравнения была составлена программа численного интегрирования системы (2.3) с данными Коши (2.4). Совместно с решением задачи (2.3), (2.4) производилось интегрирование той же задачи, продифференцированной по z . Хотя численное интегрирование в силу разных причин не могло быть произведено до слиш-

ком малых значений η , тем не менее учет следующих трех членов в асимптотических $\eta \rightarrow 0$ разложениях (2.5) для p_{12} и y_{12} позволил вычислить постоянные c_y , c_p , dc_y/dz и dc_p/dz с достаточной точностью.

Расчет корней уравнения (4.2) методом Ньютона показал, что в исследуемых пределах изменения постоянной z уравнение (4.2) имеет только попарно комплексно-сопряженные корни. Для $\kappa = 1,4$ первые пять корней (4.2) таковы: $-0,779 + i0,582$; $-0,835 + i2,651$; $-0,857 + i4,626$; $-0,863 + i6,594$; $-0,865 + i8,560$. Вычисление корней соотношения (4.2) при $\kappa = 5/3$ показало, что корень $z = -0,907 + i2,467$ [12] — второй по малости модуля, а наименьший модуль имеет корень $z = -0,790 + i0,743$. Зависимость действительной и мнимой части этого корня от κ отмечена на фигуре сплошной линией.



Для завершения построения симметричного решения приведем выражения для функций второго приближения, удовлетворяющих условиям сращивания разложений (2.2) и (3.3), а также условиям симметрии (4.1)

$$(4.3) \quad w_{22} = c_{ws} M\left(\frac{1-z_y}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\text{Pr}}{2K} \zeta^2\right), \quad y_{22} = c_{ys} \zeta M\left(\frac{1-z_y}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{\text{Pr}}{2K} \zeta^2\right)$$

$$c_{ys} = \frac{c_{2y} \Gamma(z_y/2)}{\Gamma(1/2)} \left(\frac{\text{Pr}}{2K}\right)^{(1-z_y)/2}, \quad c_{ws} = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} p_{21} c_{ys}$$

В этих равенствах использована функция Куммера $M(a, b, \xi)$ [11], являющаяся решением вырожденного гипергеометрического уравнения. Решение уравнения для v_{x22} , удовлетворяющее сформулированным краевым условиям, может быть получено методом вариации постоянных аналогично [3]. Функции v_{y22} , ρ_{22} вычисляются из (4.3) с помощью алгебраических соотношений.

5. Антисимметричные возмущения. Рассмотрим теперь задачу гиперзвукового обтекания несимметричного профиля. В этом случае течение при $x \rightarrow \infty$ будет описываться некоторой совокупностью симметричных и антисимметричных возмущений решения [1]. Функции второго и третьего приближений, соответствующие антисимметричным возмущениям, в центре следа удовлетворяют условиям

$$(5.1) \quad v_{x22}(0) = \frac{dv_{y22}}{d\zeta}(0) = \rho_{22}(0) = w_{22}(0) = \frac{dy_{22}}{d\zeta}(0) = p_{23}(0) = 0$$

Последнее равенство (5.1) и первая формула (3.2) дают уравнение для определения постоянных z , соответствующих антисимметричным возмущениям

$$(5.2) \quad c_p(z, \kappa) = 0$$

Первые пять комплексных корней уравнения (5.2) имеют вид: $-0,823 + i2,211$; $-0,855 + i4,188$; $-0,862 + i6,157$; $-0,865 + i8,123$; $-0,866 + i10,088$ ($\kappa = 1,4$). Зависимость от κ действительной и мнимой частей корня наименьшего модуля отмечена на фигуре штриховой линией.

Уравнение (5.2) в рассматриваемом интервале значений z имеет также два действительных корня. Первый из них $z = -1/3$ описывает такие гиперзвуковые течения, когда на обтекаемый профиль действует подъемная сила F_y . Эти течения подробно исследованы в [3], где показано, что постоянная C_z в этом случае пропорциональна подъем-

ной силе и может быть определена, если известна величина K_y . Второй действительный корень (5.2) $z = -2/3$ описывает антисимметричные возмущения, которые порождает в основном решении [1] замена переменной $\Psi \rightarrow \Psi + \Delta\Psi$ ($\Delta\Psi$ — постоянная). Действительно, производя эту замену и разлагая параметры течения в ряд Тейлора до линейных членов по $\Delta\Psi$, получим поправочные члены порядка $x^{-2/3}$.

Аналогичные возмущения, но уже симметричные, можно получить произведя в основном решении [1] замены $x \rightarrow x + \Delta x$ или $C \rightarrow C + \Delta C$, $\Delta C \ll 1$. Первой замене соответствуют возмущения с показателем степени $z = -1$, второй — с $z = 0$. Оба последние значения z удовлетворяют уравнению (4.2), но не попадают в интервал допустимых значений z (они являются граничными точками этого интервала). Во всех рассмотренных случаях $z = -1, -2/3, 0$ функции второго приближения выражаются через функции первого приближения и их производные.

Выпишем теперь выражения для функций второго приближения, удовлетворяющих условиям срачивания с внешней областью и условиям симметрии (5.1)

$$(5.3) \quad \begin{aligned} w_{22} &= c_{wa} \zeta M \left(1 - \frac{z_y}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{\text{Pr}}{2K} \zeta^2 \right) \\ u_{22} &= c_{ya} M \left(-\frac{z_y}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\text{Pr}}{2K} \zeta^2 \right) \\ c_{ya} &= c_2 \frac{\Gamma(1/2 + z_y/2)}{\Gamma(1/2)} \left(\frac{\text{Pr}}{2K} \right)^{-z_y/2}, \quad c_{wa} = \frac{\text{Pr} z_y \rho_{21} (\kappa + 1)}{K (\kappa - 1)^{1/2}} c_{ya} \end{aligned}$$

Функции v_{y22} и ρ_{22} определяются из (5.3) с помощью конечных соотношений, а решение уравнения для v_{x22} может быть построено методом вариации постоянных.

В заключение заметим, что область следа играет пассивную роль в формировании свободных возмущений, поскольку постоянные z определяются фактически из решения задачи (2.3), (2.4), описывающего течение во внешней области.

Автор благодарит О. С. Рыжова и Е. Д. Терентьева за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сычев В. В. О течении в ламинарном гиперзвуковом следе за телом. — In: Fluid Dynamics Transactions, v. 3. W-wa: PWN, 1966, p. 639—648.
2. Мануйлович С. В., Терентьев Е. Д. О влиянии теплоотдачи и вдува на структуру ламинарного гиперзвукового течения за телом. — ПММ, 1983, т. 47, вып. 4, с. 631—638.
3. Рыжов О. С., Терентьев Е. Д. О гиперзвуковом обтекании несущего профиля. — ПММ, 1974, т. 38, вып. 1, с. 92—104.
4. Рыжов О. С., Терентьев Е. Д. К теории высокоэнтропийного слоя в гиперзвуковых течениях. — Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1971, т. 11, вып. 2, с. 462—480.
5. Черный Г. Г. Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.
6. Мануйлович С. В., Терентьев Е. Д. Об асимптотическом решении задачи обтекания затупленного клина сверхзвуковым потоком совершенного газа. — Уч. зап. ЦАГИ, 1980, т. 11, № 6, с. 46—57.
7. Ellinwood J. W. Asymptotic hypersonic-flow theory for blunted slender cones and wedges. — J. Math. and Phys., 1967, v. 46, No. 3, p. 281—298.
8. Терентьев Е. Д. Структура ударных волн в гиперзвуковых течениях. — ПММ, 1974, т. 38, вып. 2, с. 254—263.
9. Tsien H. S. Similarity laws of hypersonic flows. — J. Math. and Phys., 1946, v. 25, No. 3, p. 247—251.
10. Седов Л. И. Методы подобия и размерностей в механике. М.: Наука, 1967. 428 с.
11. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. Ред. М. Абрамовиц и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
12. Stewartson K., Thompson B. W. Eigenvalues for the blast wave. — Phys. Fluids, 1970, v. 13, No. 2, p. 227—236.