

УДК 533.6.011

К ТЕОРИИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ГИПЕРЗВУКОВОГО ВЯЗКОГО УДАРНОГО СЛОЯ В ОКРЕСТНОСТИ ПЛОСКОСТИ СИММЕТРИИ

Гершбейн Э. А., Юницкий С. А.

Исследуется пространственное течение в гиперзвуковом вязком ударном слое в окрестности плоскости симметрии при числах Рейнольдса от умеренно малых до больших. Решение системы уравнений ударного слоя [1] ищется в виде рядов по окружной координате. При этом система уравнений для главных членов разложения оказывается незамкнутой из-за присутствия в уравнениях членов с продольной составляющей градиента давления в окружном направлении, учет которой необходим для правильного описания течения при больших числах Рейнольдса.

Предлагается процедура обрезания рядов, позволяющая замкнуть систему уравнений как для главных членов разложения, так и для всех следующих. Полученная система уравнений и граничных условий асимптотически верно описывает течение в ударном слое во всем диапазоне изменения чисел Рейнольдса, при которых справедливы уравнения гиперзвукового вязкого ударного слоя. Получено численное решение задачи в широком диапазоне чисел Рейнольдса и параметра вдува (отсоса). Приводятся характерные профили компонентов скорости и температуры поперек ударного слоя в различных сечениях плоскости симметрии, а также распределения давления и коэффициента теплообмена вдоль поверхности тела.

На той же разностной сетке получено решение уравнений пространственного пограничного слоя в окрестности плоскости симметрии на проницаемой поверхности и проведено его сравнение с результатами теории вязкого ударного слоя. Показано, что различие в коэффициенте трения в направлении, содержащем сечение поверхности тела с наибольшим радиусом кривизны [1], имеет место не только для окрестности критической точки, но и сохраняется вдоль всей плоскости симметрии. При этом качественное поведение зависимости отношения коэффициентов трения, полученных в результате решения уравнений ударного и пограничного слоев, от параметра вдува в любой точке плоскости симметрии остается таким же, как и в критической точке: с увеличением отсоса это отношение растет, с увеличением вдува убывает, так что при достаточно большом вдуве в каждой точке плоскости симметрии значения коэффициентов трения совпадают.

В работах [2—6] исследовался пространственный вязкий ударный слой в окрестности плоскости симметрии тел вращения, обтекаемых под углом атаки, и использовались различные подходы к замыканию системы уравнений. В частности, в [2, 3] величина градиента давления аппроксимировалась на основе таблиц невязкого сверхзвукового обтекания, а в [4—6] градиент давления в окружном направлении определялся из разложения давления в тригонометрический ряд Фурье по окружной координате, удерживалось два члена ряда. Решение уравнений в наветренной части плоскости симметрии затупленного тела получалось «завязанным» с решением в подветренной стороне. Численное решение было получено методом установления для малых углов атаки. Течение в пространственном вязком ударном слое, обладающее плоскостью симметрии, рассматривалось также в [7, 8].

При малых числах Рейнольдса, как следует из асимптотического анализа уравнений пространственного вязкого ударного слоя [9], члены с продольными составляющими градиента давления могут быть опущены и задача в окрестности плоскости симметрии становится для главных членов разложения замкнутой. Такой подход был развит в [10], где получено численное решение уравнений пространственного гиперзвукового вязкого ударного слоя в окрестности плоскости симметрии, а также аналитическое решение этой задачи в первом приближении интегрального метода последовательных приближений [11] для затупленных тел при разных углах атаки.

1. **Пространственный гиперзвуковой вязкий ударный слой в окрестности плоскости симметрии.** Пространственное обтекание гладкого затупленного тела будем рассматривать в системе координат, нормально связанных с обтекаемой поверхностью: x^1, x^2 выбраны на поверхности тела, x^3 — ортогонально поверхности. Уравнения пространственного гиперзвукового вязкого ударного слоя в однородном газе с модифицированными соотношениями Рэнкина—Гюгоньо на ударной волне при $x^3 = x_s^3$ и граничными условиями на поверхности тела при $x^3 = 0$ приведены в [1]. Перейдем в уравнениях (1.1)—(1.3) работы [1] к переменным Дородницына

$$\xi \equiv \xi^1 = x^1, \quad \eta \equiv \xi^2 = x^2, \quad \zeta = \frac{1}{\Delta} \int_0^{x^3} \rho \sqrt{a} dx^3, \quad \Delta = \int_0^{x_s^3} \rho \sqrt{a} dx^3$$

($a = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$, $a_{\alpha\beta}$ — компоненты первой квадратичной формы поверхности тела) и введем две функции тока φ_1 и φ_2 так, чтобы уравнение неразрывности удовлетворилось тождественно

$$u[\alpha] = u_{(\alpha)}^*(\xi, \eta) \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \zeta}, \quad u_\alpha^* = \varphi_\alpha^* \sqrt{a_{(\alpha\alpha)}}$$

$$\rho \sqrt{a} u[3] = - \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} (\Delta \varphi_{(\alpha)}^* \varphi_\alpha) - \Delta \varphi_{(\alpha)}^* \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x^\alpha}$$

$$T = T^*(\xi, \eta) \theta, \quad \partial \varphi_\alpha / \partial \zeta \equiv \varphi_\alpha' \equiv u_\alpha$$

Здесь и далее штрих означает производную по ζ ; греческие индексы принимают значения 1, 2; по паре одинаковых индексов производится суммирование, суммирование по индексам, заключенным в круглые скобки, отсутствует; P, ρ, T, μ — соответственно безразмерные давление, плотность, температура и вязкость газа, $u[i]$ — физические компоненты вектора скорости, σ, Re — числа Прандтля и Рейнольдса, γ — отношение удельных теплоемкостей, G — безразмерный удельный расход газа через поверхность тела. Остальные обозначения приведены в [1]. Функции $u_\alpha^*(\xi, \eta), T^*(\xi, \eta)$ определим ниже.

В новых переменных уравнения пространственного гиперзвукового вязкого ударного слоя можно записать в виде

$$(1.1) \quad (lu_\gamma)' + (B_\alpha \varphi_\alpha) u_\gamma' = \frac{\varepsilon}{\rho} E^{\gamma\alpha} \frac{\partial P}{\partial \xi^\alpha} + C_{\alpha\beta}^\gamma u_\alpha u_\beta +$$

$$+ D_\xi(\varphi_1, \varphi_\gamma) + D_\eta(\varphi_2, \varphi_\gamma), \quad \gamma = 1, 2$$

$$\left(\frac{l}{\sigma} \theta'\right)' + \left(B_\alpha \varphi_\alpha + \varphi_{(\alpha)}^* \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \xi^\alpha}\right) \theta' = \frac{\varepsilon}{\rho} E^{\alpha\alpha} u_{(\alpha)} \frac{\partial P}{\partial \xi^\alpha} +$$

$$+ l C_{\alpha\beta}^3 u_\alpha' u_\beta' + \varphi_{(\alpha)}^* u_\alpha \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi^\alpha} + F_\alpha \theta\right)$$

$$P' = P_{\alpha\beta}^3 u_\alpha u_\beta, \quad P = \rho T^* \theta, \quad \mu = (T^* \theta)^\omega$$

Здесь

$$D_\xi(a, b) \equiv \varphi_1^* \left(\frac{\partial a}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 b}{\partial \xi \partial \zeta} - \frac{\partial a}{\partial \xi} \frac{\partial^2 b}{\partial \zeta^2} \right)$$

$$D_\eta(a, b) \equiv \varphi_2^* \left(\frac{\partial a}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 b}{\partial \eta \partial \zeta} - \frac{\partial a}{\partial \eta} \frac{\partial^2 b}{\partial \zeta^2} \right)$$

$$l = \frac{\mu \rho a}{K \Delta^2}, \quad K = \varepsilon Re, \quad \varepsilon = \frac{\gamma - 1}{2\gamma}, \quad Re = \frac{\rho_\infty V_\infty R}{\mu_0}$$

$$\mu_0 = \mu(T_0), \quad T_0 = \frac{V_\infty^2}{2c_p}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}, \quad \sigma = \frac{\mu c_p}{\lambda}$$

Коэффициенты уравнений

$$(1.2) \quad C_{(\alpha\alpha)}^\alpha = \varphi_\alpha^* \frac{\partial \ln u_\alpha^*}{\partial \xi^\alpha} + A_{(\alpha\alpha)}^\alpha u_{(\alpha)}^*$$

$$C_{12}^\gamma = C_{21}^\gamma = \frac{1}{2} \varphi_{(\alpha)}^* \frac{\partial \ln u_\gamma^*}{\partial \xi^\alpha} + A_{12}^\gamma u_\alpha^*$$

$$C_{(\alpha\alpha)}^\gamma = A_{(\alpha\alpha)}^\gamma \frac{(u_\alpha^*)^2}{u_{(\gamma)}^*}, \quad \alpha \neq \gamma; \quad B_\alpha = \frac{\partial \varphi_{(\alpha)}^*}{\partial \xi^\alpha} + \varphi_{(\alpha)}^* \frac{\partial \ln \Delta}{\partial \xi^\alpha}$$

$$E^{\gamma\alpha} = \frac{a^{\gamma\alpha} \sqrt{a_{(\gamma\gamma)}}}{u_{(\gamma)}^*}, \quad E^{3\alpha} = -\frac{2\varphi_\alpha^*}{T^*}, \quad F_\alpha = \frac{\partial \ln T^*}{\partial \xi^\alpha}$$

$$P_{\alpha\beta^3} = A_{\alpha\beta^3} u_{(\alpha)}^* u_{(\beta)}^* \Delta / \sqrt{a}$$

$$C_{\alpha\beta^3} = -2a_{\alpha\beta} \varphi_{(\alpha)}^* \varphi_{(\beta)}^* / T^*$$

Граничные условия в переменных Дородницына принимают вид: на ударной волне при $\zeta = 1$

$$(1.3) \quad B_\alpha \varphi_\alpha + \varphi_{(\alpha)}^* \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \xi^\alpha} = \Phi^{-1}, \quad P = v_\infty^2$$

$$l\Phi u_\gamma' + u_\gamma - u_s(\gamma) = 0, \quad \gamma = 1, 2$$

$$l\Phi \sigma^{-1} \theta' + \theta - C_{\alpha\beta^3} u_\alpha (l\Phi u_\beta' + 1/2 u_\beta) = (T^*)^{-1}$$

$$\Phi^{-1} = -\frac{\sqrt{a} v_\infty}{\Delta}, \quad u_s(\gamma) \equiv \frac{u[\gamma]_\infty}{u_{(\gamma)}^*}, \quad v_\infty \equiv u[3]_\infty$$

($u[i]_\infty$ — физические составляющие скорости в набегающем потоке, записанные на поверхности тела);

на поверхности тела при $\zeta = 0$

$$(1.4) \quad B_\alpha \varphi_\alpha + \varphi_{(\alpha)}^* \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \xi^\alpha} = -\frac{G \sqrt{a}}{\Delta}$$

$$u_\gamma = 0, \quad \gamma = 1, 2; \quad \theta = \theta_w(\xi, \eta)$$

В первых трех уравнениях (1.1) опущены члены, пропорциональные $\partial P / \partial \zeta$, в силу того, что в пристеночной части ударного слоя они малы по сравнению с оставленными членами $\partial P / \partial \xi^\alpha$ [9—13].

Как следует из асимптотического анализа задачи [9], система (1.1) — (1.4) является равномерно пригодной при описании течения в гиперзвуковом вязком ударном слое в широком диапазоне чисел Рейнольдса и параметра вдува.

Рассмотрим течение в пространственном вязком ударном слое на гладком затупленном теле, обладающее плоскостью симметрии. Пусть поверхность тела задана в декартовой системе координат уравнением $y^3 = f(y^1, y^2)$. Выберем следующую параметризацию поверхности: $y^1 = \xi$, $y^2 = \eta$, $y^3 = f(\xi, \eta)$. Пусть $\xi = 0$ — плоскость симметрии течения. Положим $u_\alpha^*(\xi, \eta) = u[\alpha]_\infty$, $T^*(\xi, \eta) = (u[3]_\infty)^2$. Предполагая радиус поперечной кривизны тела конечным, получим в окрестности плоскости симметрии

$$u_1^* \sim \xi, \quad u_2^* \sim 1 + O(\xi^2), \quad T^* \sim 1 + O(\xi^2)$$

Будем искать решение системы (1.1) — (1.4) в окрестности плоскости симметрии в виде

$$(1.5) \quad F(\xi, \eta, \zeta) = F_0(\eta, \zeta) + F_2(\eta, \zeta)\xi^2 + F_4(\eta, \zeta)\xi^4 + \dots$$

$$P(\xi, \eta, \zeta) = P_0(\eta, \zeta) + P_2(\eta, \zeta)\xi^2 + P_4(\eta, \zeta)\xi^4 + \dots$$

где F — любая из функций $u_\gamma, \theta, l, \rho$; P — давление. Разложим с учетом выбранной параметризации и выбора u_α^*, T^* коэффициенты (1.2) в ряды по ξ и введем обозначения

$$(1.6) \quad \begin{aligned} C_{\alpha\beta}^l &\equiv (C_{\alpha\beta}^k)_2, \quad l = k + 3, \quad k = 1, 2, 3 \\ P_{\alpha\beta}^4 &\equiv (P_{\alpha\beta}^3)_2, \quad F_3 \equiv F_{10}, \quad \varphi_3^* \equiv \varphi_{10}^* \\ \varphi_4^* &\equiv (\varphi_2^*)_2 / (\varphi_2^*)_0, \quad B \equiv B_{\alpha 2} \varphi_\alpha + B_\alpha \varphi_{\alpha 2} \end{aligned}$$

Тогда, подставляя разложения (1.5) в систему (1.1) — (1.4), получаем с учетом обозначений (1.6) (нулевой индекс опускаем) уравнения для главных (1.7) и для вторых (1.8) членов разложения

$$(1.7) \quad \begin{aligned} (lu_1')' + (B_\alpha \varphi_\alpha) u_1' &= \frac{\varepsilon}{\rho} \left(2E^{11} P_2 + E^{12} \frac{\partial P}{\partial \eta} \right) + \\ &+ C_{\alpha\beta}^1 u_\alpha u_\beta + D_\eta(\varphi_2, \varphi_1) \\ (lu_2')' + (B_\alpha \varphi_\alpha) u_2' &= \frac{\varepsilon}{\rho} E^{22} \frac{\partial P}{\partial \eta} + C_{22}^2 (u_2)^2 + D_\eta(\varphi_2, \varphi_2) \\ \left(\frac{l}{\sigma} \theta' \right)' + \left(B_\alpha \varphi_\alpha + \varphi_2^* \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} \right) \theta' &= \frac{\varepsilon}{\rho} E^{32} u_2 \frac{\partial P}{\partial \eta} + \\ &+ l C_{22}^3 (u_2')^2 + u_2 D_T \theta \\ P' &= P_{22}^3 (u_2)^2, \quad P = \rho T^* \theta, \quad \mu = (T^* \theta)^\omega \end{aligned}$$

$$(1.8) \quad \begin{aligned} (lu_{\gamma 2}' + l_2 u_\gamma')' + (B_\alpha \varphi_\alpha) u_{\gamma 2}' + B u_\gamma' &= \varepsilon R^\gamma + \\ &+ 2C_{\alpha\beta}^\gamma u_\alpha u_{\beta 2} + C_{\alpha\beta}^k u_\alpha u_\beta + 2D_\zeta(\varphi_{\gamma 2}, \varphi_\gamma) + \\ &+ D_\eta(\varphi_2, \varphi_{\gamma 2}) + D_\eta(\varphi_{22}, \varphi_\gamma) + \varphi_4^* D_\eta(\varphi_2, \varphi_\gamma) \\ \gamma &= 1, 2; \quad k = \gamma + 3 \\ \left(\frac{l}{\sigma} \theta_2' + \frac{l_2}{\sigma} \theta' \right)' + \left(B_\alpha \varphi_\alpha + \varphi_2^* \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} \right) \theta_2' + \\ &+ \left[B + 2\varphi_3^* \varphi_{12} + \varphi_2^* \left(\frac{\partial \varphi_{22}}{\partial \eta} + \varphi_4^* \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} \right) \right] \theta' = \varepsilon R^3 + \\ &+ l C_{\alpha\beta}^6 u_\alpha' u_\beta' + C_{22}^3 u_2' (l_2 u_2' + 2l u_{22}') + \\ &+ 2\varphi_3^* u_1 \theta_2 + (\varphi_3^* F_3 u_1 + \varphi_{22}^* u_2) \theta + \\ &+ (u_{22} + \varphi_4^* u_2) D_T \theta + u_2 D_T \theta_2 \\ P_2' &= P_{\alpha\beta}^4 u_\alpha u_\beta + 2P_{22}^3 u_2 u_{22} \\ \frac{P_2}{P} &= \frac{\rho_2}{\rho} + \frac{\theta_2}{\theta} + \frac{T_2^*}{T^*} \end{aligned}$$

Функция R^1 имеет вид

$$\begin{aligned} R^1 &= \frac{1}{\rho} \left[\left(E_2^{12} - \frac{\rho_2}{\rho} E^{12} \right) \frac{\partial P}{\partial \eta} + E^{12} \frac{\partial P_2}{\partial \eta} + \right. \\ &\left. + 2 \left(E_2^{11} - \frac{\rho_2}{\rho} E^{11} \right) P_2 + 4E^{11} P_4 \right] \end{aligned}$$

Функции R^2 и R^3 могут быть записаны в аналогичном виде; члены, пропорциональные P_4 , в них отсутствуют.

Дифференциальные операторы D_ζ, D_T действуют так:

$$\begin{aligned} D_\zeta(a, b) &\equiv \varphi_3^* \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta} \frac{\partial a}{\partial \zeta} - \varphi_{12} \frac{\partial^2 b}{\partial \zeta^2} \right) \\ D_T a &\equiv \varphi_2^* \left(\frac{\partial a}{\partial \eta} + F_2 \cdot a \right) \end{aligned}$$

Граничные условия для системы уравнений (1.7), (1.8)

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \zeta = 0: \quad B_\alpha \varphi_\alpha + \varphi_2^* \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} &= - \frac{G \sqrt{a}}{\Delta} \\ u_\gamma &= 0, \quad \gamma = 1, 2; \quad \theta = \theta_w(\eta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1.10) \quad & \zeta = 1: \quad B_\alpha \varphi_\alpha + \varphi_2^* \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} = \Phi^{-1}, \quad P = v_\infty^2 \\
& l\Phi u_\gamma' + u_\gamma - u_\gamma(\gamma) = 0 \\
& l\Phi \sigma^{-1} \theta' + \theta - C_{22}^3 u_2 (l\Phi u_2' + 1/2 u_2) = (T^*)^{-1} \\
& \zeta = 0: \quad u_{\gamma 2} = 0, \quad \gamma = 1, 2; \quad \theta_2 = \theta_{w_2}(\eta) \\
& B + 2\varphi_3^* \varphi_{12} + \varphi_2^* \left(\frac{\partial \varphi_{22}}{\partial \eta} + \varphi_4^* \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} \right) = - \frac{(G\sqrt{a})_2}{\Delta} + \frac{(G\sqrt{a}) \Delta_2}{\Delta^2} \\
& \zeta = 1: \\
& B + 2\varphi_3^* \varphi_{12} + \varphi_2^* \left(\frac{\partial \varphi_{22}}{\partial \eta} + \varphi_4^* \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} \right) = - \frac{\Phi_2}{\Phi^2} \\
& l\Phi u_{\gamma 2}' + u_{\gamma 2} + (l\Phi_2 + l_2 \Phi) u_\gamma' - u_{\gamma 2}(\gamma) = 0 \\
& l\Phi \sigma^{-1} \theta_2' + \theta_2 + (l\Phi_2 + l_2 \Phi)(\sigma^{-1} \theta' - C_{22}^3 u_2 u_2') - \\
& - l\Phi C_{22}^3 (u_2 u_{22}' + u_{22} u_2') - C_{\alpha\beta}^6 u_\alpha (l\Phi u_\beta' + 1/2 u_\beta) - \\
& - C_{22}^3 u_2 u_{22} = - T_2^* / (T^*)^2; \quad P_2 = 2v_\infty v_{2\infty}
\end{aligned}$$

(условия (1.9) — для главных, (1.10) — для вторых членов разложения).

Подчеркнем, что в принятых обозначениях компонента скорости u_2 направлена вдоль плоскости симметрии, а u_1 фактически является градиентом скорости в окружном направлении ξ (в плоскости симметрии физическая составляющая скорости в этом направлении тождественно равна нулю).

По виду (1.7), (1.8) можно заключить, что система уравнений пространственного гиперзвукового вязкого ударного слоя в окрестности плоскости симметрии не замкнута как для главных, так и для всех следующих членов разложения (1.5). Действительно, система (1.7) содержит величину P_2 , составляющую градиента давления в окружном направлении, которая определяется из решения системы (1.8), куда входит P_4 , и т. д. Таким образом, система уравнений (1.7) оказывается связанной через P_2 с системой (1.8), которая в свою очередь связана с системами уравнений для всех следующих членов разложения через P_4 .

Можно показать, что в окрестности критической точки задача для главных членов разложения и для последующих замкнута [1], так как зависимость P_2 от коэффициентов разложения F_2 исчезает.

При малых числах Рейнольдса, когда члены с продольными составляющими градиента давления могут быть опущены, задача в окрестности плоскости симметрии замкнута как для главных, так и для всех следующих членов разложения (1.5). Уравнения, соответствующие этому случаю, получаются, если в правых частях систем (1.7), (1.8) формально положить $\varepsilon \equiv 0$.

Предлагается процедура обрезания рядов, заключающаяся в следующем. Система уравнений с граничными условиями (1.7) — (1.10) становится замкнутой, если в ней опустить член, содержащий P_4 . При таком подходе, члены разложения (1.5) F_0 , P_0 и P_2 определяются в окрестности плоскости симметрии асимптотически правильно в силу гиперзвукового характера течения $\varepsilon \rightarrow 0$ во всем диапазоне изменения чисел Рейнольдса от умеренно малых до больших. Действительно, при $\varepsilon \rightarrow 0$ и малых числах Рейнольдса продольные составляющие градиента давления из уравнений (1.7), (1.8) выпадают. При больших числах Рейнольдса эффекты молекулярного переноса проявляются в пограничном слое, давление поперек которого постоянно. Давление в ударном слое, в том числе и на поверхности тела, определяется из уравнений Эйлера, в которых отсут-

ствуют члены с продольными составляющими градиента давления, а поперечная составляющая уравнивается центробежными силами.

Отметим, что полученное таким образом решение для вторых членов разложения F_2 справедливо в ударном слое везде, за исключением пристеночной области, так как для его определения в этой области становится существенным учет P_4 .

Следующее обрезание производится аналогично: в системе уравнений для F_2, F_4, P_4 опускается член P_6 , при этом асимптотически верно находятся F_2, P_4 .

Отметим также, что в задачах теории пограничного слоя давление считается известной величиной. В этом случае P_2 находится из решения внешней невязкой задачи и задача о течении в пограничном слое в окрестности плоскости симметрии замкнута для главных членов разложения (1.5). Поэтому вопроса о замыкании системы уравнений пространственного пограничного слоя в окрестности плоскости симметрии [14] не возникает.

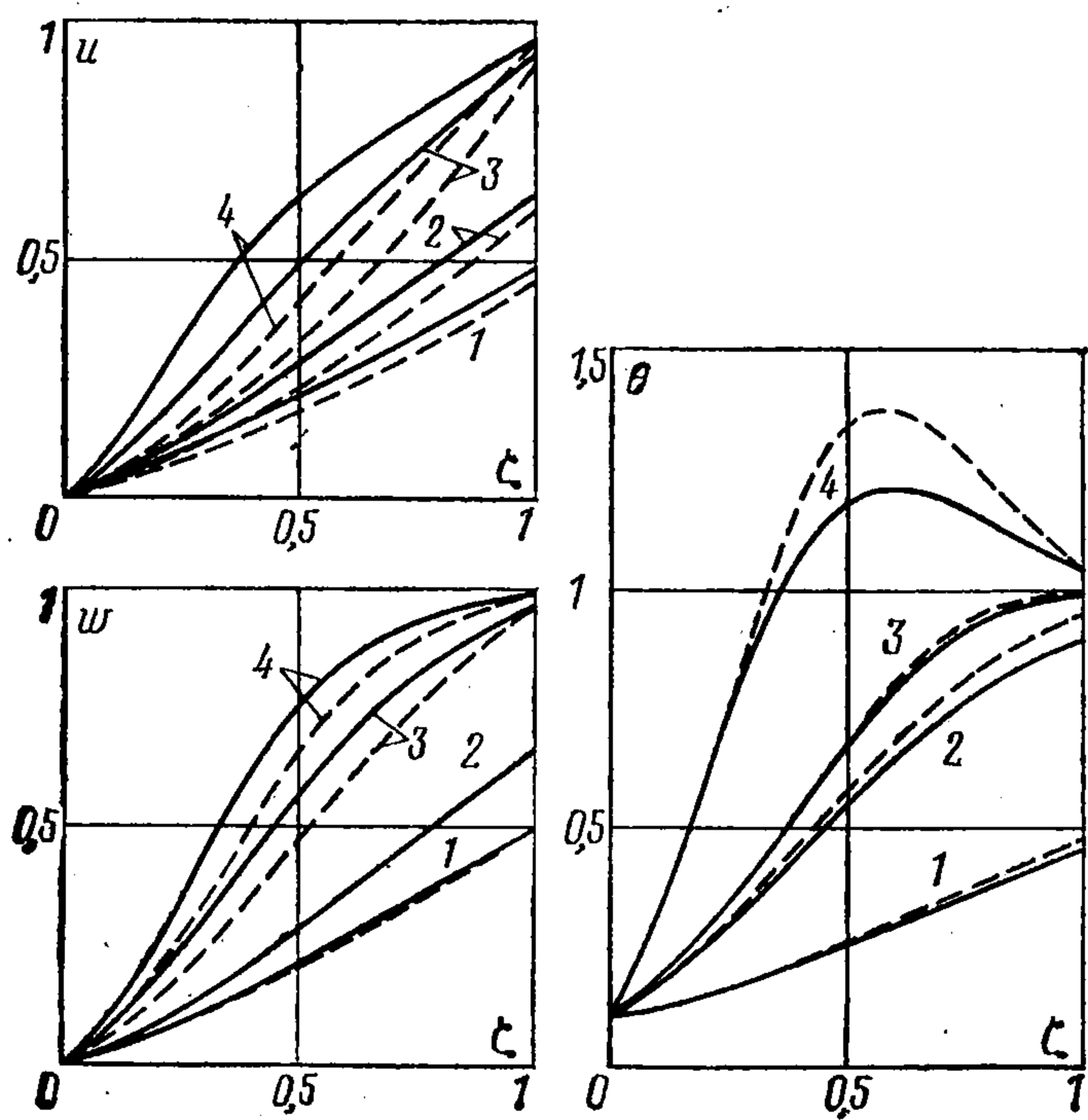
2. Численное решение уравнений пространственного вязкого ударного слоя в окрестности плоскости симметрии на проницаемой поверхности. При численном решении задачи (1.7) — (1.10) в ней опускались члены R^j как внепорядковые. Использовалась неявная разностная схема [15] с точностью аппроксимации $O(\Delta\zeta^4, \Delta\eta^2)$. Уравнения решались поочередно, в порядке написания; уравнения первого порядка для P_2 и $\eta^{-1}\partial P/\partial\eta$ интегрировались от поверхности ударной волны до тела с применением формулы Симпсона. Итерации по функциям $\Delta(\eta), \Delta_2(\eta)$ проводились одновременно с итерациями системы конечно-разностных уравнений, необходимыми в силу ее нелинейности. Каждое новое значение величин Δ, Δ_2 определялось с использованием демпфирующего множителя, равного обычно $1/2$. Демпфирование по профилям не проводилось.

В качестве примера приведем результаты расчета обтекания под нулевым углом атаки эллиптического параболоида, уравнение поверхности которого в декартовой системе координат имеет вид $2y^3 = (y^1)^2 + k(y^2)^2$, где $k = R_1/R_2$; R_1, R_2 — радиусы главных кривизн поверхности в вершине параболоида. Определяющие параметры задачи варьировались в пределах: $0,1 \leq k \leq 1, 1 \leq Re \leq 10^6, 0,5 \leq \omega \leq 1, -0,125 \leq G\sqrt{a} \leq 0,125, \varepsilon = 0,1, \sigma = 0,71, \theta_w(\eta) = 0,1, G\sqrt{a} = \text{const}$.

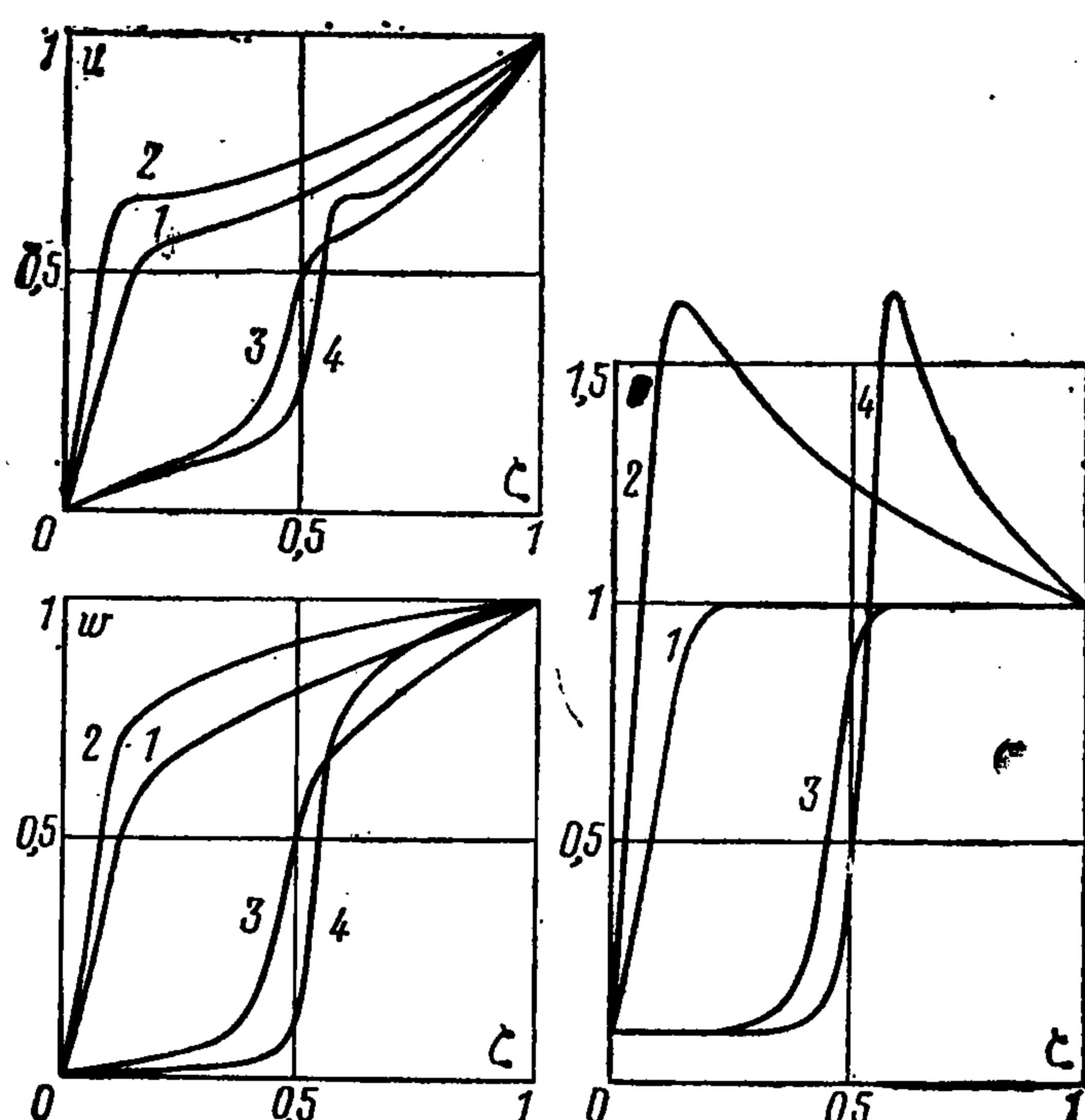
Некоторые результаты расчетов приведены на фиг. 1—4. На фиг. 1 сплошными линиями даны характерные профили касательных составляющих скорости $u \equiv u_1, w \equiv u_2$ и температуры θ поперек ударного слоя при $\eta = 0$ (линии 1, 3) и $\eta = 3$ (линии 2, 4) для двух значений числа Рейнольдса: $Re = 5$ (линии 1, 2), $Re = 100$ (линии 3, 4) и для $G = 0, k = 0,4, \omega = 0,5$. Распределения вдоль поверхности тела давления P_w , градиента давления P_{2w} и коэффициента теплообмена, отнесенного к своему значению в критической точке, q_r приведены сплошными линиями на фиг. 2 для тех же значений параметров (линии 1 — $Re = 5$, линии 2 — $Re = 100$, штрихпунктирные линии — распределение давления на теле по формуле Ньютона).
Здесь

$$q(\eta) = \frac{\lambda}{\rho_\infty V_\infty^3} \frac{\partial T}{\partial x^3} \Big|_{x^3=0} = T^* \frac{l\Delta}{2\sigma\sqrt{a}} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0}, \quad q_r = q(\eta)/q(0)$$

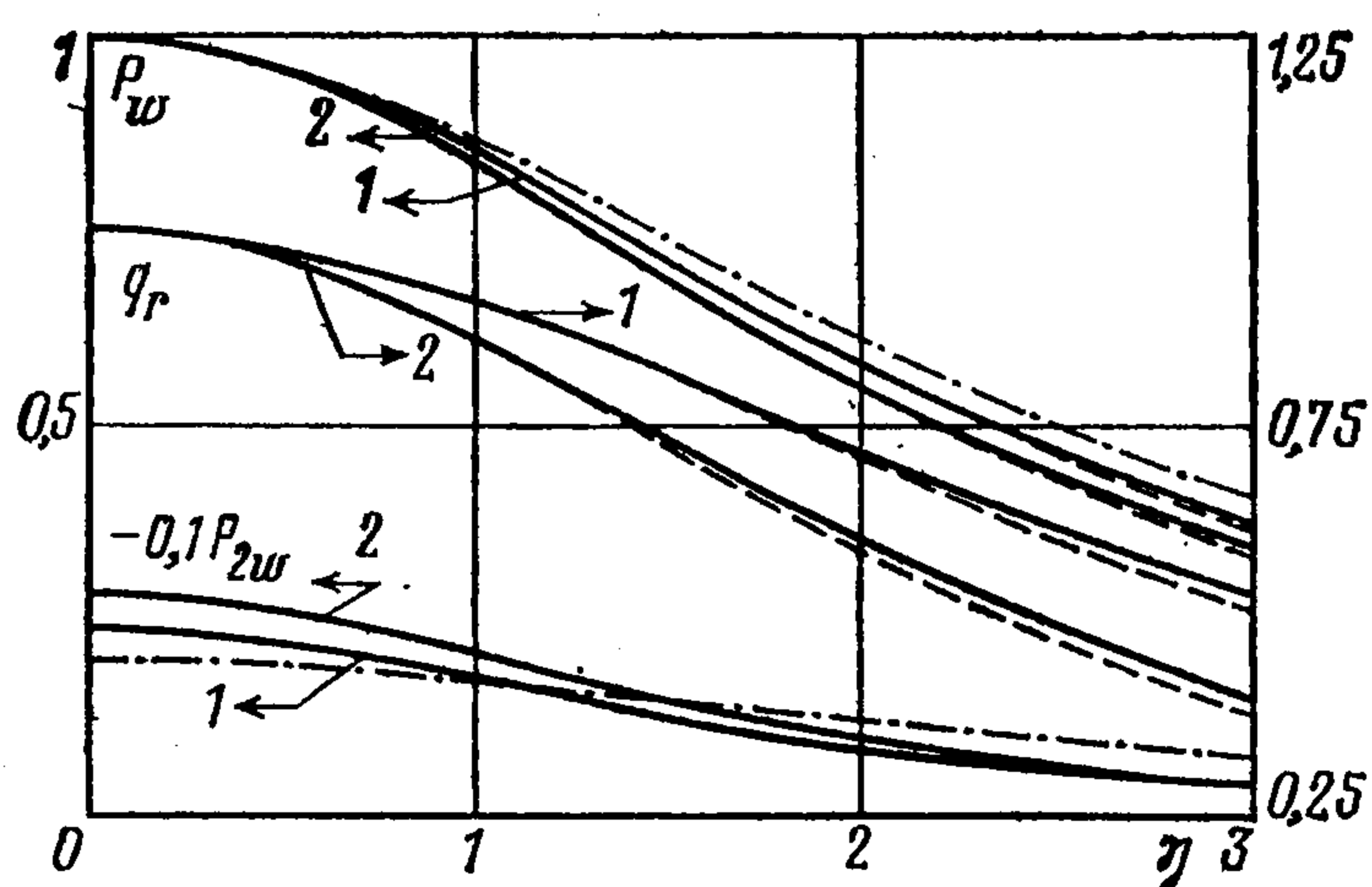
Отметим, что при числах Рейнольдса, больших 100, распределения P_w и P_{2w} практически не зависят от дальнейшего увеличения числа Рейнольдса и совпадают с линиями 2. При $Re \simeq 1 \div 5$ эти распределения близки к определяемым формулой Ньютона. Для определения влияния продольных составляющих градиента давления на параметры течения была решена система (1.7), (1.9) для главных членов разложения, в которой продольные градиенты давления были опущены [10] (штриховые линии на фиг. 1, 2). Расчеты показывают, что при $5 \leq Re \leq 100$ влияние отброшенных членов с градиентами давления на распределения вдоль тела давления и относительных тепловых по-



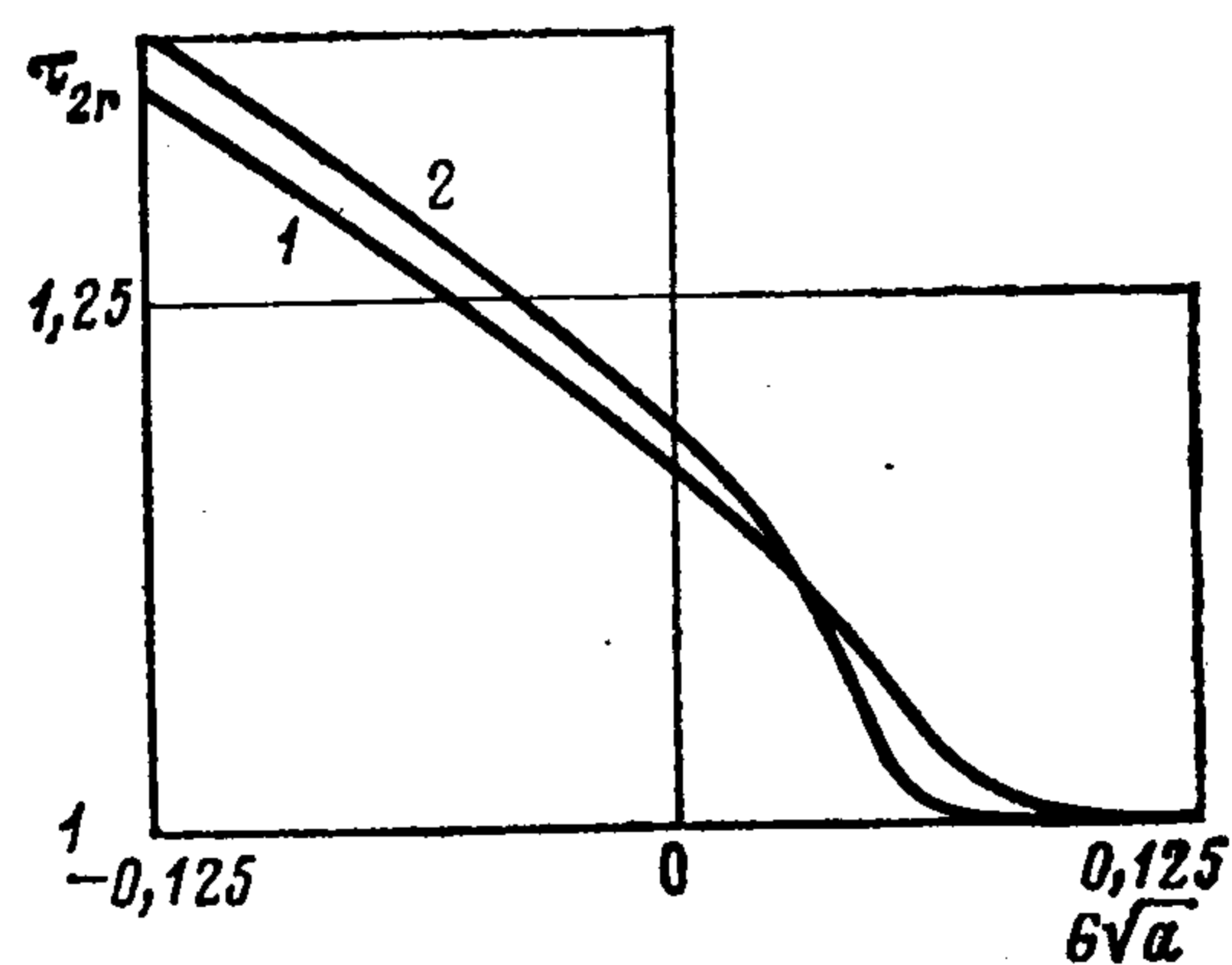
Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2



Фиг. 4

токов q_r невелико. Так, для условий, приведенных на фиг. 2, максимальное различие в величинах q_r , полученных в разных постановках задачи, составляет всего 5% в точке $\eta = 3$, $Re = 100$. Различие в абсолютных значениях коэффициента q достигает в этом случае $\sim 30\%$. Распределения коэффициентов трения ведут себя аналогичным образом.

На фиг. 3 приведены профили u , w и θ в двух сечениях $\eta = 0$ (линии 1, 3) и $\eta = 3$ (линии 2, 4), рассчитанные для $Re = 5 \cdot 10^3$, $k = 0,4$, $\omega = 0,5$ и двух значений удельного расхода газа через поверхность $G\sqrt{a} = 0$ (линии 1, 2) и $G\sqrt{a} = 0,125$ (линии 3, 4). Из графиков видно, что при вдуве $G\sqrt{a} = 0,125$ вязкий пограничный слой полностью отошел от поверхности тела вдоль всей плоскости симметрии и превратился в слой смешения, а вблизи тела образовался невязкий слой вдуваемых газов. Максимум в профилях θ при $\eta = 3$ объясняется тем, что вблизи поверхности тела располагаются линии тока, прошедшие через сильно нагретую часть ударного слоя в окрестности точки торможения.

Для сравнения результатов, полученных в рамках теории вязкого ударного слоя и пограничного слоя, система уравнений пространственного пограничного слоя в окрестности плоскости симметрии при наличии вдува или отсоса была решена численно тем же конечно-разностным методом [15] и на тех же разностных сетках, что и система (1.7)–(1.10). Уравнения пространственного пограничного слоя в окрестности плоскости симметрии [14] в переменных Дородницына имеют вид (1.7), если четвертое уравнение записать в виде $P' = 0$. Граничные условия на внешней границе пограничного слоя задаются обычные; при численном решении значения давления и продольных составляющих градиента давления брались из решения уравнений вязкого ударного слоя при больших числах Рейнольдса ($Re = 10^6$) для непроницаемой поверхности тела ($G = 0$).

На фиг. 4 приведено отношение коэффициентов трения в направлении η на поверхности тела τ_{2r} , полученных в результате решения уравнений ударного и пограничного слоев ($k = 0,4$, $Re = 5 \cdot 10^3$, $\omega = 0,5$; линия 1 — $\eta = 0$, линия 2 — $\eta = 3$), для разных значений параметра вдува (отсоса) $G\sqrt{a}$. Для окрестности критической точки

было показано [1], что различие в коэффициенте трения τ_2 в направлении, совпадающем с плоскостью, содержащей сечение поверхности тела с наибольшим радиусом кривизны, может быть значительным даже при больших числах Рейнольдса. Аналогичный результат получен здесь и для всей плоскости симметрии. При этом качественное поведение зависимости τ_{2r} от параметра вдува в каждой точке плоскости симметрии остается таким же, как и в критической точке: с увеличением отсоса τ_{2r} увеличивается, с увеличением вдува — уменьшается, так что при достаточно большом значении параметра вдува величина τ_{2r} мало отличается от единицы (т. е. коэффициент трения, полученный из численного решения уравнений пограничного слоя, становится равным коэффициенту трения, полученному из численного решения уравнений ударного слоя при больших числах Рейнольдса). Сравнение коэффициентов трения в направлении ξ показывает, что отличие отношения τ_{1r} от единицы увеличивается с увеличением η и достигает при $\eta = 3$ ($k = 0,4$, $Re = 5 \cdot 10^3$, $G = 0$) $\sim 7\%$ по сравнению с 2% при $\eta = 0$, что свидетельствует об усилении влияния вихревого взаимодействия с увеличением η .

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершбейн Э. А., Юницкий С. А. Исследование гиперзвукового пространственного вязкого ударного слоя в окрестности критической точки при наличии вдува или отсоса.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 5, с. 817—828.
2. Eaton R. R., Kaestner P. C. Viscous shock layer flow in the windward plane of cones at angle of attack.— AIAA Paper, 1973, No. 134. 10p.
3. Eaton R. R., Larson D. E. Laminar and turbulent viscous shock layer flow in the symmetry planes of bodies at angle of attack.— AIAA Paper, 1974, No. 599. 11p.
4. Kumar A., Graves R. A., Jr. Numerical solution of the viscous hypersonic flow past blunted cones at angle of attack.— AIAA Paper, 1977, No. 172. 9p.
5. Kumar A., Graves R. A., Jr. Viscous hypersonic flow past blunted cones at small angles of attack.— AIAA Journal, 1977, v. 15, No. 8, p. 1061—1062.
6. Kumar A. Low Reynolds number flow past a blunt axisymmetric body at angle of attack.— AIAA Journal, 1977, v. 15, No. 8, p. 1212—1214.
7. Карякин В. Е., Попов Ф. Д. Расчет пространственного обтекания затупленных тел сверхзвуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1977, т. 17, № 6, с. 1545—1555.
8. Головачев Ю. П., Карякин В. Е. Пространственное неравновесное обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком вязкого газа.— Численные методы механики сплошной среды: Сб. статей. Новосибирск: Изд-е ВЦ СО АН СССР, 1980, т. 11, № 6, с. 46—58.
9. Гершбейн Э. А. Асимптотическое исследование задачи пространственного гиперзвукового обтекания вязким газом затупленных тел с пористой поверхностью.— В кн.: Гиперзвуковые пространственные течения при наличии физико-химических превращений. М.: Изд-во МГУ, 1981, с. 29—51.
10. Гершбейн Э. А., Щелин В. С., Юницкий С. А. Численные и приближенные аналитические решения уравнений гиперзвукового пространственного вязкого ударного слоя при умеренно малых числах Рейнольдса.— В кн.: Гиперзвуковые пространственные течения при наличии физико-химических превращений. М.: Изд-во МГУ, 1981, с. 72—92.
11. Гершбейн Э. А. К теории пространственного обтекания затупленных тел гиперзвуковым потоком вязкого газа при наличии вдува.— В кн.: Некоторые вопросы механики сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1978, с. 144—156.
12. Гершбейн Э. А. Теория гиперзвукового вязкого ударного слоя при больших числах Рейнольдса и сильном вдуве инородных газов.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 6, с. 1015—1024.
13. Турский Г. А. К теории гиперзвукового обтекания плоских и осесимметричных затупленных тел вязким химически реагирующим многокомпонентным потоком газа при наличии вдува.— Науч. тр. Ин-та механ. МГУ, 1975, № 39, с. 5—38.
14. Брыкина И. Г., Гершбейн Э. А., Пейгин С. В. Ламинарный пространственный пограничный слой на пористой поверхности в окрестности плоскости симметрии.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1980, № 5, с. 37—48.
15. Петухов И. В. Численный расчет двумерных течений в пограничном слое.— В кн.: Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. М.: Наука, 1964, с. 304—325.