

УДК 532.5 : 534.1

О ВОЛНАХ В ОДНОРОДНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ, ИНДУЦИРОВАННЫХ ВИХРЕМ

Миндлин И. М.

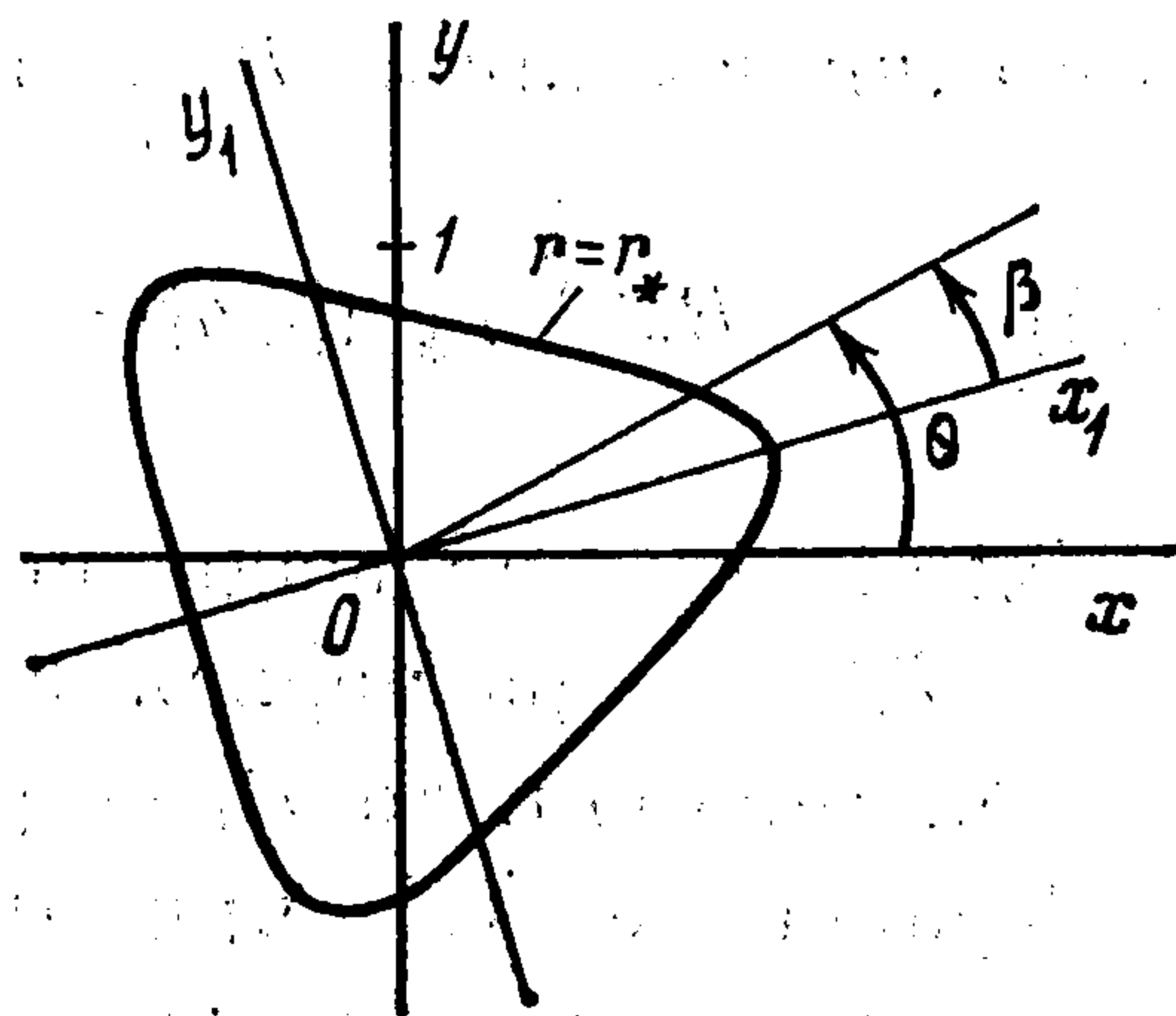
Доказывается существование волн в однородной несжимаемой неограниченной жидкости, индуцированных вихрем, граница которого представляет собой вращающуюся жидкую цилиндрическую поверхность, сохраняющую форму. Для вихрей, ограниченных цилиндром, мало отличающимся от кругового, и индуцированных вихрем волн, найдены нелинейное дисперсионное соотношение, форма вихря, функция тока; выяснен характер и особенности колебаний поля скоростей.

Задача сводится к доказательству существования ответвляющегося решения нелинейного интегрального уравнения, эффективному отысканию решения и бифуркационного значения параметра. Предлагается итерационный метод, который позволяет на каждом шаге получить совместно приближение ответвляющегося решения и приближение бифуркационного значения параметра. Доказывается сходимость метода в некотором диапазоне параметров.

На возможность существования вращающихся цилиндрических вихрей, сохраняющих отличную от круга форму поперечного сечения, указал Лэмб [1], получивший линеаризованное дисперсионное соотношение (3.2). Такие вихри назовем, следуя [2], «вортонами». Дим и Забуски [2] провели численный эксперимент, результаты которого, по их мнению, указывают на существование вортонов; при этом обнаружено, что частота вращения этих вихрей ниже значения, которое следует из (3.2).

Вортоны и индуцированные ими волны вызывают интерес (см. предисловия к [2]), поскольку результаты численного эксперимента интерпретируются как проявления «солитоноподобного» поведения волны в двумерной среде.

1. Постановка задачи. Рассмотрим течение идеальной однородной несжимаемой неограниченной жидкости, параллельное плоскости xoy (фиг. 1). Примем обозначения: ox, oy — неподвижные оси, ox_1, oy_1 — оси, вращающиеся с постоянной угловой скоростью Ω , r, θ — полярные координаты в плоскости xoy , r, β — полярные координаты в плоскости x_1oy_1 , t — время, $q(r, \theta, t)$ — абсолютная скорость жидкости (относительно неподвижных осей), $q_r, q_\theta \equiv q_\beta$ — радиальная и тангенциальная составляющие абсолютной скорости; $\zeta = \text{rot } \mathbf{q} = \zeta \mathbf{i}_z$, \mathbf{i}_z — орт, нормальный к плоскости xoy (и к плоскости x_1oy_1). При $t = 0$ оси ox и ox_1 совпадают.



Фиг. 1

Пусть в жидком объеме, ограниченном цилиндром $r = R_*(\theta, t)$ ($r < R_*$ — внутренность цилиндра), $\zeta = 1$, а вне его $\zeta = 0$. Жидкий объем с отличной от нуля завихренностью именуется вихрем.

При сделанных предположениях существует функция тока Ψ , которая связана с завихренностью $\zeta = 1$ соотношением

$$(1.1) \quad \Psi = \frac{1}{4\pi} \iint \ln [r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos(\theta_1 - \theta)] r_1 dr_1 d\theta_1$$

Интегрирование производится по поперечному сечению вихря. Будем рассматривать вихрь, граница которого вращается с постоянной угловой скоростью Ω , сохраняя форму, так, что $R_*(\theta, t) = r_*(\beta)$. Формулами $r = \rho r_*(\beta)$, $\beta = \theta - \Omega t$ введем переменные ρ и β вместо r и θ . В новых переменных граница вихря описывается уравнением $\rho = 1$, а его внутренность — неравенствами $0 \leq \rho < 1$, $0 \leq \beta < 2\pi$.

Соотношение (1.1) переписывается в виде

$$(1.2) \quad \Psi(\rho, \beta) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\rho_1 < 1} K(\rho, \rho_1, \beta, \beta_1) \rho_1 r_*^2(\beta_1) d\rho_1 d\beta_1$$

$$K = \ln W$$

$$W = \rho^2 r_*^2(\beta) + \rho_1^2 r_*^2(\beta_1) - 2\rho\rho_1 r_*(\beta) r_*(\beta_1) \cos(\beta_1 - \beta)$$

Функция $\Psi(\rho, \beta)$ определяет поток через цилиндрическую поверхность, неподвижную относительно абсолютных осей xoy . Введем функцию тока F , которая определяет поток через цилиндрическую поверхность, неподвижную относительно вращающихся осей x_1oy_1 . Если $P(r, \theta)$ — точка плоскости xoy (т. е. P — неподвижна относительно осей xoy) и $Q(r, \beta)$ — точка плоскости x_1oy_1 , совпадающая в данный момент t с точкой P (т. е. $\beta = \theta - \Omega t$), то значения двух функций тока в соответствующих точках связаны соотношением

$$F(Q) = \Psi(P) - \frac{1}{2}\Omega r^2$$

Граница вихря неподвижна относительно осей x_1oy_1 , и завихренность жидкой частицы сохраняется. Отсюда следует, что на границе вихря $F = \text{const}$, т. е.

$$(1.3) \quad \Psi(1; \beta) - \frac{1}{2}\Omega r_*^2(\beta) = c_0 = \text{const}$$

Соотношение (1.3) представляет собой нелинейное интегральное уравнение для функции $r_*(\beta)$. В работе [2] для $r_*(\beta)$ было составлено и использовано интегро-дифференциальное уравнение. Можно проверить, что после интегрирования вдоль границы оно приводит к (1.3).

Равенства (1.2), (1.3) записаны в безразмерных переменных. Размерные единицы длины R_0 и времени T_0 выбраны из условий

$$(1.4) \quad R_0^2 \int_0^{2\pi} r_*^2(\beta) d\beta = 2S, \quad \zeta = 1$$

Здесь S — площадь поперечного сечения цилиндрического вихря $\zeta_* = T_0^{-1}\zeta$ — размерная завихренность. Если вихрь ограничен круговым цилиндром, то R_0 — радиус цилиндра и $r_* = 1$.

Уравнение (1.3) при любом Ω имеет решение $r_* = 1$. Рассмотрим другие («нетривиальные») решения, у которых $r_* \neq \text{const}$; они отвечают бифуркационным значениям параметра Ω .

2. Об одном интегральном операторе и некоторых интегралах. При построении нетривиального решения задачи используются свойства линейного интегрального оператора¹

$$(2.1) \quad T(f(\beta)) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \ln[\rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1 \cos(\beta_1 - \beta)] f(\beta_1) d\beta_1$$

¹ Миндлин И. М. О вихрях в неограниченной идеальной жидкости. Горький, 1982.—38 с. Деп. в ВИНТИ, 24.06.1982; № 3269-82.

Его собственные значения $\lambda_k(\rho, \rho_1)$ определяются формулами

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \rho_1 < \rho, \quad \lambda_0 &= \ln \rho, \quad \lambda_k = -\frac{1}{2k} \frac{\rho_1^k}{\rho^k} \\ \rho_1 > \rho, \quad \lambda_0 &= \ln \rho_1, \quad \lambda_k = -\frac{1}{2k} \frac{\rho^k}{\rho_1^k} \quad (k = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Собственному значению $\lambda_k(\rho, \rho_1)$ отвечает пара собственных функций: $\cos k\beta$ и $\sin k\beta$ и, следовательно, их линейные комбинации. Справедливо равенство

$$(2.3) \quad T(c_1 \cos k\beta + c_2 \sin k\beta) = \lambda_k(c_1 \cos k\beta + c_2 \sin k\beta)$$

Собственному значению λ_0 отвечает собственная функция $f_0 = 1$.

Ниже используется оператор

$$(2.4) \quad T_1(f(\beta)) = T(f(\beta))|_{\rho=\rho_1=1} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \ln[2 - 2 \cos(\beta_1 - \beta)] f(\beta_1) d\beta_1$$

и формулы для интегралов

$$T_{kn} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos k\alpha}{(\rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1 \cos \alpha)^n} d\alpha \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

В частности

$$(2.5) \quad \rho_1 < \rho, \quad T_{k1} = F_1(\rho, \rho_1) = \frac{2\pi}{\rho^2 - \rho_1^2} \frac{\rho_1^k}{\rho^k}$$

$$T_{k2} = F_2(\rho, \rho_1) = \frac{2\pi}{(\rho^2 - \rho_1^2)^2} \left[k + \frac{\rho^2 + \rho_1^2}{\rho^2 - \rho_1^2} \right] \frac{\rho_1^k}{\rho^k}$$

$$T_{k3} = F_3(\rho, \rho_1) =$$

$$= \frac{\pi}{(\rho^2 - \rho_1^2)^3} \left[k^2 + 3k \frac{\rho^2 + \rho_1^2}{\rho^2 - \rho_1^2} + 2 \frac{\rho^4 + 4\rho^2\rho_1^2 + \rho_1^4}{(\rho^2 - \rho_1^2)^2} \right] \frac{\rho_1^k}{\rho^k}$$

$$\rho_1 > \rho, \quad T_{k1} = F_1(\rho_1, \rho), \quad T_{k2} = F_2(\rho_1, \rho), \quad T_{k3} = F_3(\rho_1, \rho)$$

Вывод формул (2.5) громоздок и здесь не приводится; формулы (2.2) получаются, если $T(\cos k\beta)$ сначала интегрировать по частям, а потом применить (2.5).

3. Существование решения. Вопрос о существовании решения задачи (1.2), (1.3) является основным, поскольку эвристически не очевидно существование некруговой цилиндрической жидкой поверхности, вращающейся как поверхность твердая.

Доказательство существования отвечающего решения интегрального уравнения обычно проводится в два этапа [3]: а) в уравнение вводится свободный параметр и итерационным методом с применением теоремы о неподвижной точке сжимающего отображения доказывается существование семейства решений, зависящих от параметра; б) доказывается существование решения уравнения разветвления, содержащего параметр в качестве неизвестного; чтобы построить уравнение разветвления, нужно предварительно эффективно получить семейство решений интегрального уравнения. Эта процедура может быть применена и в задаче (1.2), (1.3).

Ниже предлагается итерационный метод, при котором на каждом шаге получается и приближение отвечающего решения, и приближение бифуркационного значения параметра. Преимущества этого метода для численного решения задачи очевидны. На основании свойств оператора (2.1) и формул (2.5) доказывается сходимость итераций в некотором диапазоне параметров.

Переходим к описанию метода. Соотношениями

$$(3.1) \quad r_*(\beta) = 1 + \varepsilon \cos m\beta + \varepsilon^2 u(\beta), \quad \Omega = \Omega_0 + \varepsilon^2 \omega$$

введем в уравнение (1.3) параметр ε , функцию $u(\beta)$ вместо $r_*(\beta)$, параметр ω вместо Ω ; $m > 1$ — целое. После замены (3.1) подынтегральную функцию представим в виде $h_0 + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2 + \varepsilon^3 h_3$, где h_0, h_1, h_2 не содержат явно ε (неявно от ε зависит решение $u(\beta)$). Положим

$$(3.2) \quad \Omega_0 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{m}\right), \quad c_0 = -\frac{1}{2} \Omega_0$$

При таком выборе постоянных интегральное уравнение не будет содержать явно ε в нулевой и первой степени. После сокращения на ε^2 и вычисления интегралов, не зависящих от $u(\beta)$, интегральное уравнение представим в виде

$$(3.3) \quad \frac{1}{2m} u(\beta) + T_1(u(\beta)) = H_0(\omega) + \varepsilon H_1(u(\beta), \omega, \varepsilon)$$

$$H_0(\omega) = -\frac{1}{8m} + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{16m}\right) \cos 2m\beta + \frac{1}{2} \omega$$

Не выписывая громоздкую формулу для H_1 , отметим, что

$$(3.4) \quad H_1(u(\beta), \omega, 0) = \left[\Omega_0 u(\beta) + \omega + \frac{1}{8} m - \frac{3}{16} \right] \cos m\beta -$$

$$- \frac{1}{48} \cos 3m\beta - 2 \int_0^1 \rho_1 T(u(\beta) \cos m\beta) |_{\rho=1} d\rho_1 + S(u(\beta))$$

Здесь $S(u)$ — линейный интегральный оператор, обладающий свойствами

$$(3.5) \quad k \geq 1, \quad S(\cos km\beta) = d_{k-1} \cos(k-1)m\beta +$$

$$+ d_{k+1} \cos(k+1)m\beta$$

$$d_k = \frac{1}{4} \frac{11}{mk+2}, \quad d_0 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{m+2}$$

$$S(1) = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{m+2}\right) \cos m\beta, \quad S(0) = 0$$

Используя (2.1) — (2.5), найдем, что уравнение (3.3) при $\varepsilon = 0$ имеет решение (с произвольным ω_0)

$$(3.6) \quad | \quad | \quad u(\beta) = u_0(\beta) = g_0 + g_2 \cos 2m\beta$$

$$g_0 = -\frac{1}{4} + m\omega_0, \quad g_2 = \frac{1}{2} m - \frac{1}{4}$$

| Нетривиальному решению задачи (1.2), (1.3) отвечает решение $u(\beta, \varepsilon)$, которое стремится к $u_0(\beta)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Это решение предлагается получить (начиная с u_0 (3.6)) итерационным методом

$$(3.7) \quad \frac{1}{2m} u_{k+1}(\beta) + T_1(u_{k+1}(\beta)) = H_0(\omega_k) + \varepsilon H_1(u_k(\beta), \omega_k, \varepsilon)$$

$$(3.8) \quad \int_0^{2\pi} [H_0(\omega_k) + \varepsilon H_1(u_k(\beta), \omega_k, \varepsilon)] \cos m\beta d\beta = 0$$

Согласно условию (3.8), значение ω_k выбирается так, чтобы разложение правой части уравнения (3.7) в соответствующий ряд Фурье не содержало гармонику $\cos m\beta$; в противном случае уравнение (3.7) не имеет решения.

Последовательности u_k, ω_k сходятся к решению уравнения (3.3). |

Чтобы доказать сходимость последовательностей u_k, ω_k (неограниченность ядра оператора H_1 усложняет задачу), рассмотрим сначала линейризованный относительно ε итерационный процесс

$$(3.9) \quad \frac{1}{2m} u_{k+1}(\beta) + T_1(u_{k+1}(\beta)) = H_0(\omega_k) + \varepsilon H_1(u_k(\beta), \omega_k, 0)$$

$$\int_0^{2\pi} [H_0(\omega_k) + \varepsilon H_1(u_k(\beta), \omega_k, 0)] \cos m\beta d\beta = 0$$

Из (2.1) — (2.5), (3.4) — (3.6) следует, что процесс (3.9) приводит к приближениям вида

$$(3.10) \quad u_k(\beta) = g_0 + g_2 \cos 2m\beta + \sum_{j=0}^{k+2} b_j^{(k)} \cos jm\beta, \quad b_1^{(k)} = 0$$

При этом

$$(3.11) \quad \omega_k - \omega_0 = -1/4 b_2^{(k)}, \quad b_0^{(k+1)} = m(\omega_k - \omega_0)$$

$$b_2^{(k+1)} = m\varepsilon(1 - 1/2m) b_2^{(k)}$$

$$b_3^{(k+1)} = m\varepsilon \left[\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2m} \right) (g_2 + b_2^{(k)} + b_4^{(k)}) - \frac{1}{16} \right]$$

$$j > 3, \quad b_j^{(k+1)} = m\varepsilon \frac{j}{j-1} \left(\frac{1}{mj} + 2\Omega_0 \right) \cdot \frac{1}{2} (b_{j+1}^{(k)} + b_{j-1}^{(k)})$$

$$j > k + 2, \quad b_j^{(k)} = 0; \quad j \geq 0, \quad b_j^{(0)} = 0.$$

Из (3.11) следует, что $b_j^{(k)} \geq 0$ при $j \geq 2$ ($\varepsilon > 0$), и

$$|b_j^{(k+1)} - b_j^{(k)}| < \frac{3}{8} m \left(\frac{3}{2} m\varepsilon \right)^k$$

$$\sum_{j=2}^{k+3} |b_j^{(k+1)} - b_j^{(k)}| < \frac{3}{8} m (k+2) \left(\frac{3}{2} m\varepsilon \right)^k$$

На основании полученных оценок заключаем, что процесс (3.9) определяет сходящуюся при малом $m\varepsilon$ последовательности ω_k и $u_k(\beta)$. Оператор $H_1(u, \omega, \varepsilon)$ отличается от оператора $H_1(u, \omega, 0)$ слагаемым порядка ε .

Оценки, аналогичные приведенным выше, показывают, что добавление членов высшего порядка малости не нарушает (при малом ε) сходимости итерационного процесса, поскольку «невозмущенный» процесс (3.9) сходится не медленнее геометрической прогрессии.

Доказательство того, что предел итераций (3.7), (3.8) является решением уравнения (3.3), повторяет известные приемы и здесь не приводится. Заметим, что изложенное можно переформулировать в терминах отображений, а приведенное доказательство устанавливает, что при малом $m\varepsilon$ формулы (3.7), (3.8) определяют сжимающее отображение.

4. **Нелинейное дисперсионное соотношение.** Решение задачи (1.2), (1.3) может строиться в виде рядов по целым неотрицательным степеням параметра ε с привлечением условия типа (3.8). Первые три члена этих рядов совпадают с результатами первой итерации (3.6)–(3.8). Первая итерация приводит к формулам

$$(4.1) \quad \Omega = \Omega_0 + \varepsilon^2 \omega_0 + o(\varepsilon^3), \quad \omega_0 = -\frac{1}{4}(m-1)$$

$$(4.2) \quad r_*(\beta) = 1 + \varepsilon \cos m\beta + \varepsilon^2 (g_0 + g_2 \cos 2m\beta) + \varepsilon^2 g_3 \cos 3m\beta + o(\varepsilon^3)$$

$$g_0 = -\frac{1}{4}(m^2 - m + 1), \quad g_2 = \frac{1}{2}m - \frac{1}{4},$$

$$g_3 = \frac{1}{8}(m-1)(3m-1)$$

$$(4.3) \quad \Psi(\rho, \beta) = \Psi_0 + \varepsilon \Psi_1 + \varepsilon^2 \Psi_2 + \varepsilon^3 \Psi_3 + o(\varepsilon^3)$$

$$\rho < 1, \quad \Psi_0 = -\frac{1}{4}(1 - \rho^2); \quad \rho > 1, \quad \Psi_0 = \frac{1}{2} \ln \rho$$

$$\Psi_1 = \Psi_{1,1} \cos m\beta, \quad \Psi_2 = \Psi_{2,0} + \Psi_{2,2} \cos 2m\beta$$

$$\rho < 1, \quad \Psi_{1,1} = \frac{1}{2} \rho^2 - \frac{1}{2m} \rho^m$$

$$\Psi_{2,2} = \frac{1}{4} m \rho^2 - \frac{1}{4} \rho^m$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{2,0} &= \left(\frac{1}{2} g_0 + \frac{1}{8} \right) \rho^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \rho^m \\
\rho > 1, \quad \Psi_{1,1} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2m} \rho^{-m} \\
\Psi_{2,2} &= \frac{1}{4} (m-1) + \frac{1}{4} \rho^{-m} - \frac{1}{4} \rho^{-2m} \\
\Psi_{2,0} &= \frac{1}{2} g_0 - \frac{1}{8} + \left(g_0 + \frac{1}{4} \right) \ln \rho + \frac{1}{4} \rho^{-m} \\
\Psi_3 &= \Psi_{3,1} \cos m\beta + \Psi_{3,3} \cos 3m\beta \\
\rho < 1, \quad \Psi_{3,1} &= \left(-\frac{1}{8} m^2 + \frac{1}{4} m - \frac{3}{16} \right) \rho^2 + \\
&+ \left(-\frac{1}{8} m + \frac{3}{16m} \right) \rho^m \\
\Psi_{3,3} &= \frac{1}{2} g_3 \left(\rho^2 - \frac{1}{3m} \rho^{3m} \right) + \\
&+ \frac{1}{4} g_2 \left[\rho^2 - \rho^m - \rho^{2m} + \left(1 - \frac{1}{3m} \right) \rho^{3m} \right] - \\
&- \frac{1}{16} (m-1) \rho^m + \frac{1}{16} (2m-1) \rho^{2m} - \frac{1}{48} (3m-1) \rho^{3m} \\
\rho > 1, \quad \Psi_{3,1} &= -\frac{1}{8} m^2 + \frac{5}{16} + \frac{1}{4} m \rho^{-2m} + \\
&+ \left(-\frac{1}{8} m - \frac{1}{2} + \frac{3}{16m} \right) \rho^{-m} \\
\Psi_{3,3} &= \frac{1}{2} g_3 \left(1 - \frac{1}{3m} \rho^{-3m} \right) + \\
&+ \frac{1}{4} g_2 \left[-1 + \rho^{-m} + \rho^{-2m} - \left(1 + \frac{1}{3m} \right) \rho^{-3m} \right] + \\
&+ \frac{1}{24} - \frac{1}{16} (m+1) \rho^{-m} + \frac{1}{16} (2m+1) \rho^{-2m} - \frac{1}{48} (3m+1) \rho^{-3m}
\end{aligned}$$

Чтобы получить представление о пределах применимости полученных формул, сопоставим численные и аналитические результаты. В [2] при наперед заданных значениях площади вихря $S = 5$, его периода вращения $T = 20$ и волнового числа $m = 3$ найдены значения параметров границы вихря: наименьший радиус $R_1 = 1,056$, наибольший радиус $R_2 = 1,591$, амплитуды гармоник $a_0 = 1,250$, $a_m = 2,394 \cdot 10^{-1}$, $a_{2m} = 6,08 \cdot 10^{-2}$, $a_{3m} = 2,04 \cdot 10^{-2}$.

Найдем соответствующие параметры аналитического решения. При $m = 3$ из (4.2) следует

$$(4.4) \quad r_*(\beta) = 1 + \varepsilon \cos 3\beta + \varepsilon^2 (-1,75 + 1,25 \cos 6\beta) + 2\varepsilon^3 \cos 9\beta$$

При $|\varepsilon| < 0,4$ правая часть (4.4) достигает минимума r_1 при $\beta = \pi/3$ и максимума r_2 при $\beta = 0$, так что $r_2 - r_1 = 2\varepsilon + 4\varepsilon^3$. Найдем R_0 и ε из условий $R_0 (r_2 - r_1) = R_2 - R_1 = 0,535$, $\pi R_0^2 (1 - 3\varepsilon^2) = 5$; последнее получено из (1.4), (4.4). Таким образом, численному решению отвечает аналитическое решение с параметрами $R_0 = 1,334$ и $\varepsilon = 0,187$. Согласно (4.1), для аналитического решения $T = 2\pi/\Omega = 19,90$. Если пренебречь поправкой $\varepsilon^2 \omega_0$, то $T = 18,86$. Из (4.4) для амплитуд гармоник следует: $a_0 = (1 - 1,75 \varepsilon^2) R_0 = 1,252$, $a_m = R_0 \varepsilon = 2,499 \cdot 10^{-1}$, $a_{2m} = 1,25 R_0 \varepsilon^2 = 5,855 \cdot 10^{-2}$, $a_{3m} = 2\varepsilon^3 R_0 = 1,756 \cdot 10^{-2}$.

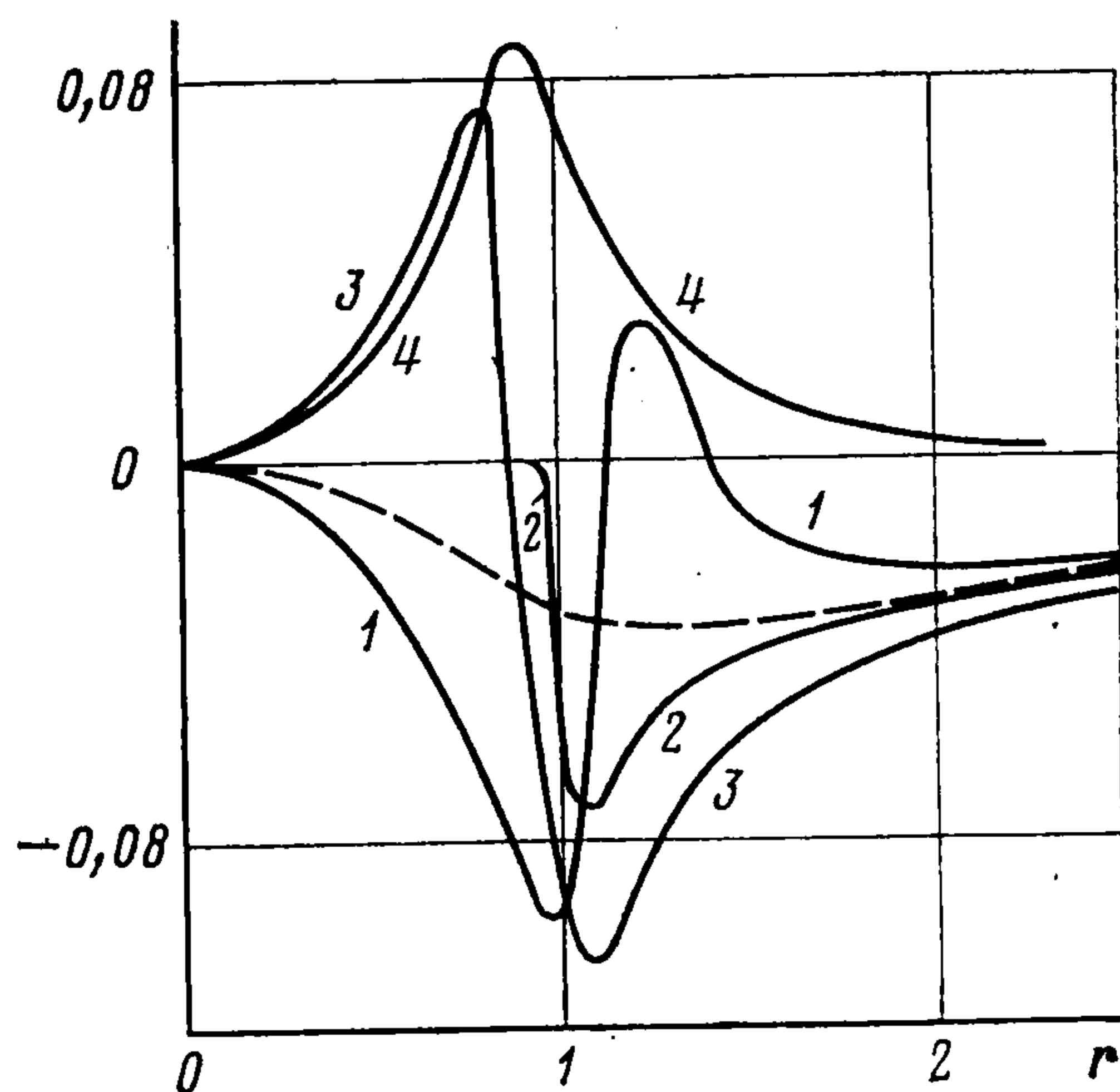
Численно найдены еще три набора параметров для $m = 3$, $T = 20,5$; $m = 4$, $T = 17,0$; $m = 4$, $T = 17,5$ (во всех случаях $S = 5$). Им отвечают параметры аналитического решения: $\varepsilon = 0,2184$, $T = 20,30$; $\varepsilon = 0,0925$, $T = 17,04$; $\varepsilon = 0,1399$, $T = 17,44$.

Таким образом, нелинейное дисперсионное соотношение обнаруживает высокую точность в диапазоне $|m\varepsilon| \leq 0,5$. Формула (4.2) в этом диапазоне приводит к результатам, отличающимся от численных на 5–7%. На фиг. 1 изображена граница вихря, построенная по (4.4) при $\varepsilon = 0,2$.

5. Поле скоростей. Характер и особенности колебаний. Составляющие абсолютной скорости связаны с функцией тока соотношениями

$$(5.1) \quad q_r = -\frac{1}{\rho r_*} \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} + \frac{1}{r_*^2} \frac{dr_*}{d\beta} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho}, \quad q_\beta = \frac{1}{r_*} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho}$$

На фиг. 2 представлены кривые, построенные по формулам (4.3), (5.1) при $m = 3$, $\varepsilon = 0,2$. Эти кривые показывают распределение величин q_r и $Q_\beta = q_\beta - q_0(r)$ в функции радиуса r при фиксированном θ и с временным интервалом в четверть периода для фаз $\beta = 0$, $\beta = \pi/6$, $\beta = \pi/3$, $\beta = \pi/2$; здесь $q_0'(r) = \partial\Psi_0(r)/\partial r$ — тангенциальная составляющая скорости жидких частиц кругового вихря (т. е. в случае $\varepsilon = 0$). Кривые 1—3 представляют $Q_\beta(r)$ при $\beta = 0$, $\beta = \pi/6$, $\beta = \pi/3$ соответственно; при $\beta = \pi/2$ график $Q_\beta(r)$ совпадает с кривой 2. Кривая 4 является графиком $q_r(r)$ при $\beta = \pi/2$; $q_r = 0$ при $\beta = 0$ и $\beta = \pi/3$; при $\beta = \pi/6$ график функции $q_r(r)$ и кривая 4 взаимно симметричны относительно оси r . Эти же кривые представляют собой графики $Q_\beta(r)$ и $q_r(r)$ в один и тот же момент времени t с интервалом $\Delta\theta = \pi/6$ по углу θ . Интервал $\Delta\theta$ представляет собой четверть углового периода колеблющегося поля скоростей. Штрихами намечено среднее по времени положение кривых $Q_\beta(r)$.



Фиг. 2

Из графиков следует, что индуцированные вихрем волны локализованы в окрестности вихря в пределах 2—3 средних радиусов R_0 .

Можно показать, что не только приближенные, но и точное решение задачи инвариантно относительно поворота на угол $\theta = 2\pi/m$.

Полученные результаты обнаруживают отличие изучаемой системы от многих известных консервативных механических колебательных систем. В типичной механической системе в процессе колебаний за полупериод кинетическая энергия превращается в потенциальную энергию «упругого элемента» и наоборот. Из графиков видно, что в рассматриваемой системе максимумы отклонений составляющих скорости от среднего значения достигаются со сдвигом во времени и в пространстве примерно в четверть периода, так что в процессе колебаний происходит «перекачка» кинетической энергии от радиальных перемещений к тангенциальным и наоборот.²

В заключение отметим, что оператор (2.1) и формулы (2.5) могут быть использованы для построения класса стационарных цилиндрических вихрей, у которых завихренность и функция тока связаны нелинейным соотношением, а также класса нестационарных вихрей в тяжелой жидкости с кусочно-постоянной плотностью, подобно тому, как это сделано² для осесимметричных вихрей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lamb H. Hydrodynamics. Cambridge: Univ. Press, 1932. 732 p.— Рус. перев.: Гидродинамика. М.— Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
2. Дим Г., Забуски Н. Солитоны в действии. М.: Мир, 1981. 312 с.
3. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 527 с.

² См. сноску на с. 762.