УДК 532.5

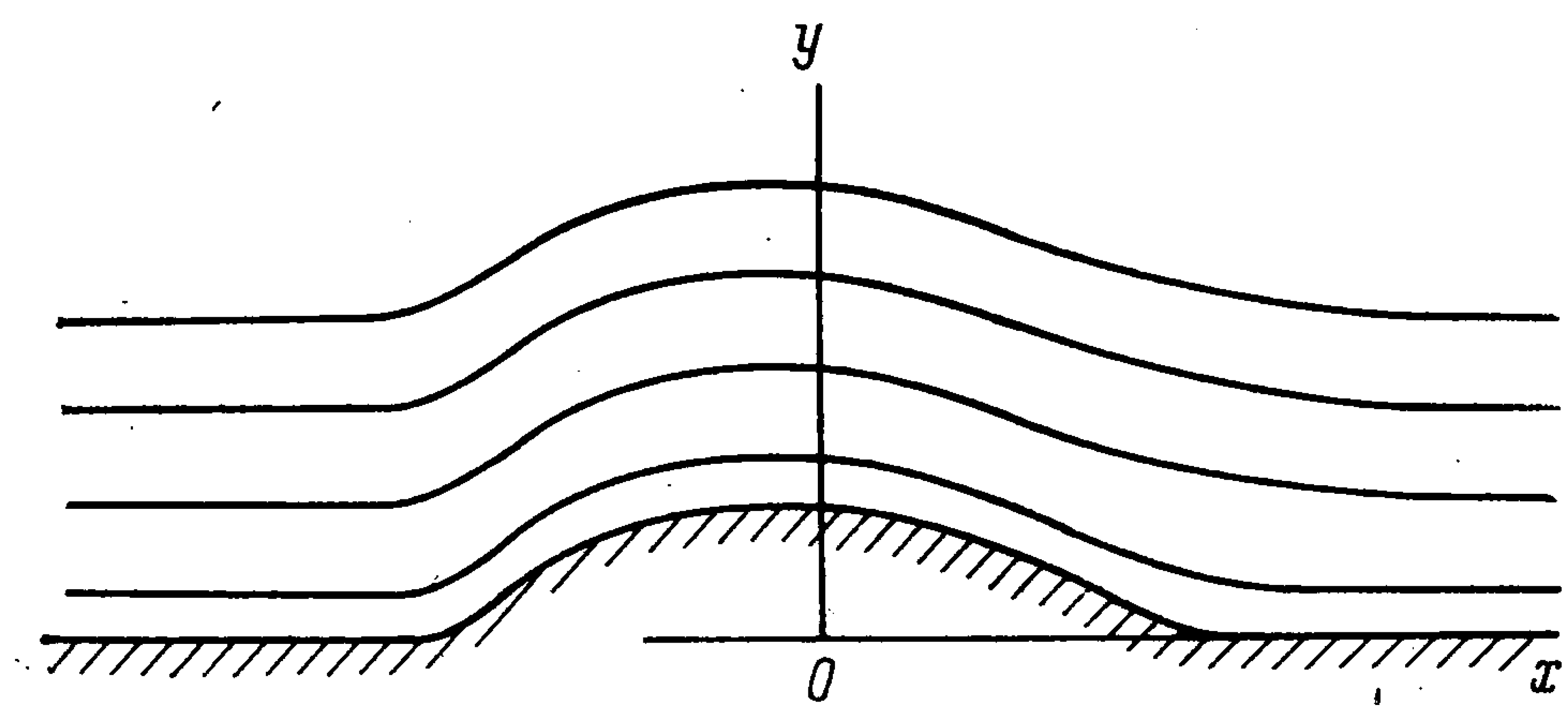
МНОГОСЛОЙНЫЕ УСТАНОВИВШИЕСЯ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ НАД НЕРОВНЫМ ДНОМ

Бежанов К. А., Тер-Крикоров А. М.

Предлагается метод исследования установившегося течения идеальной несжимаемой слоистой жидкости над горизонтальным дном, имеющим местную неровность. Жидкость содержит конечное число слоев, на границах которых терпят разрывы первого рода плотность и тангенциальная составляющая вектора скорости. В смешанных эйлерово-лагранжевых переменных исходная задача сводится к краевой задаче с известной границей, а затем к нелинейному интегродифференциальному уравнению. Решение линеаризованной задачи получено в виде суммы ряда Фурье по собственным функциям вспомогательной спектральной задачи. Изучена асимптотика волн, возникающих за неровностью дна, и упрощения, которые вносит предположение о близости средней скорости невозмущенного потока к одной из критических скоростей распространения длинных волн. В качестве примера рассматривается обтекание двуслойным потоком со ступенчатым распределением плотности препятствия произвольной формы.

Ранее [1] рассматривались две возможные постановки о движении многослойной жидкости с разрывами плотности и тангенциальной составляющей вектора скорости. Вопросы устойчивости слоистого течения с разрывами плотности содержит обзор [2].

1. Постановка задачи. Рассматривается плоский установившийся поток идеальной несжимаемой слоистой жидкости, обтекающей неровное дно. В жидкости имеется n слоев, на границах которых терпят разрывы первого



рода плотность ρ и тангенциальная составляющая вектора скорости $\mathbf{V}$, а давление p непрерывно. Ось Ox направлена по горизонтальному уровню дна, а ось Oy — вертикально вверх (фигура). Пусть $y = y_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ — неизвестные уравнения границ раздела, а $y = y_0(x)$ — известное уравнение дна. Функция $y_0(x)$ предполагается непрерывной и финитной (или достаточно быстро убывающей при $x \to \pm\infty$). Удобно предположить, что при $y > y_n(x)$ имеется фиктивный поток, для которого $\rho = 0$, $\mathbf{V} = 0$, $p = 0$. В каждой из областей T_k: $(-\infty < x < +\infty$, $y_{k-1}(x) < y < y_k(x))$, $k = 1, 2, \ldots, n$, функции ρ, $\mathbf{V}$, p непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют системе уравнений гидродинамики, которая после замены $\mathbf{U} = \sqrt{\rho}\mathbf{V}$, $\mathbf{U} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ принимает вид

$$(\nabla, \mathbf{U}) = 0, \quad (\mathbf{U}, \nabla\rho) = 0, \quad (\mathbf{U}\nabla)\mathbf{U} = -g\rho\mathbf{j} - \nabla p \tag{1.1}$$

где g — ускорение силы тяжести, $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ — единичные орты осей Ox и Oy.

Если через $\mathbf{N}_k$ обозначить единичную нормаль к кривой $y = y_k(x)$, а через $[F]_k(x)$ — скачок функции $F(x, y)$ при переходе через k-ю границу раздела, то граничные условия можно записать в следующем виде:

$$(\mathbf{U}, \mathbf{N}_k) = 0 \text{ при } y = y_k(x),\ k = 1, 2, \ldots, n \tag{1.2}$$

$$[p]_k(x) = 0,\ k = 1, 2, \ldots, n$$

2. Формулировка краевой задачи для функции тока. Первое уравнение (1.1) позволяет ввести модифицированную функцию тока

$$u = \partial\psi/\partial y,\ v = -\partial\psi/\partial x \tag{2.1}$$

Если заметить, что линии $\psi = \text{const}$ совпадают с истинными линиями тока, то граничные условия (1.2) принимают вид

$$\psi(x, y_k(x)) = \psi_k,\ 0 = \psi_0 < \psi_1 < \ldots < \psi_n,\ k = 1, 2, \ldots, n \tag{2.2}$$

где уравнения границ раздела $y_k(x)$ и постоянные ψ_k должны быть определены в процессе решения.

В предположении непрерывности функции $\psi(x, y)$ можно показать, что $\rho = \rho(\psi)$. Предполагается, что функция $\rho(\psi)$ монотонно убывающая, кусочно-гладкая и имеет разрывы первого рода в точках ψ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда из (1.1) и (2.1) можно получить уравнение [1—5]

$$\nabla^2\psi + gy\rho'(\psi) = \Phi'(\psi),\ (x, y) \in T_k,\ k = 1, 2, \ldots, n \tag{2.3}$$

$$\Phi(\psi) = {}^1/_2\,(u^2 + v^2) + p + gy\rho(\psi) \tag{2.4}$$

Здесь и далее штрихом обозначается операция дифференцирования по соответствующему аргументу, $\Phi(\psi)$ — функция Бернулли.

Из (1.2), (2.2) и (2.4) получаем граничные условия

$$[{}^1/_2\,(\nabla\psi)^2 + gy\rho(\psi) - \Phi(\psi)]_k(x) = 0,\ k = 1, 2, \ldots, n \tag{2.5}$$

$$\psi(x, y_k(x)) = \psi_k,\ [\psi]_k(x) = 0,\ \psi(x, y_0(x)) = 0$$

В уравнение (2.3) и граничные условия (2.5) входят две неизвестные кусочно-гладкие функции $\rho(\psi)$ и $\Phi(\psi)$, имеющие разрывы первого рода в точках ψ_k. Вид этих функций определяется из условия, что при $x \to -\infty$ задан одномерный поток с параметрами $\rho = R(y)$, $\mathbf{V} = V(y)\,\mathbf{i}$, $p = P(y)$, удовлетворяющими уравнениям гидродинамики и граничным условиям (1.2). Кусочно-гладкие функции $R(y)$ и $V(y)$ имеют разрывы первого рода в точках h_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, $0 < h_1 < \ldots < h_n = H$ и удовлетворяют условиям

$$R'(y) \leqslant 0,\ R(y) \geqslant R_1 > 0,\ V(y) \geqslant V_1 > 0 \tag{2.6}$$

а давление $P(y)$ — гидростатическое

$$P(y) = g\int_y^H R(\xi)\,d\xi$$

Здесь H — глубина невозмущенного потока, R_1 и V_1 — постоянные.

Функция тока одномерного течения находится из решения задачи Коши

$$\psi'(y) = \sqrt{R(y)}\,V(y),\ \psi(0) = 0,\ [\psi]_k(x) = 0,\ k = 1, 2, \ldots, n - 1$$

откуда

$$\psi(y) = \int_0^y a(\xi)\,d\xi, \quad a(y) = \sqrt{R(y)}\,V(y) \tag{2.7}$$

В силу условий (2.6) уравнение (2.7) разрешимо относительно y

$$y = \eta(\psi),\ 0 \leqslant \psi \leqslant \psi_0,\ \psi_0 = \psi(H) \tag{2.8}$$

где $\eta(\psi)$ — непрерывная монотонно возрастающая кусочно-гладкая функция, а $\eta'(\psi)$ имеет разрывы первого рода в точках $\psi_k = \psi(h_k)$, $k =$

$= 1, 2, \ldots, n - 1$. Поэтому в силу (2.4) и (2.8) имеем

$$\rho(\psi) = R(\eta(\psi)),\quad V_0(\psi) = V(\eta(\psi)),\quad P_0(\psi) = P(\eta(\psi))$$

$$\Phi(\psi) = {}^1/_2\, \rho(\psi)\, V_0^2(\psi) + P_0(\psi) + g\eta(\psi)\, \rho(\psi)$$

Ранее были получены некоторые точные решения уравнения (2.3) для случая линейного задания функций $\rho'(\psi)$ и $\Phi'(\psi)$, а препятствие моделировалось распределением особенностей на линии $x = 0$ [2, 3].

3. Преобразование уравнения и граничных условий. В уравнении (2.3) и граничных условиях (2.5) сделаем замену переменных, принимая x и η за независимые переменные, а $y(x, \eta)$ за неизвестную функцию. Переменная η, связанная с ψ соотношением (2.8), играет роль лагранжевой координаты жидкой частицы. Перейдем также к безразмерным переменным, беря в качестве единицы длины глубину потока H, а в качестве единиц плотности и скорости — числа

$$R_0 = \frac{1}{H}\int_0^H R(\xi)\, d\xi,\quad c = \frac{1}{HR_0}\int_0^H R(\xi)\, V(\xi)\, d\xi$$

которые можно интерпретировать как среднюю плотность и среднюю скорость одномерного потока. В итоге получаем следующую граничную задачу для совокупности областей G: $(-\infty < x < +\infty,\quad \eta_{k-1} < \eta < \eta_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(a^2(\eta)\frac{1 + y_x^2}{2y_\eta^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(a^2(\eta)\frac{y_x}{y_\eta}\right) + \nu R'(\eta)\, y = \Phi_0'(\eta) \tag{3.1}$$

$$\left[a^2(\eta)\frac{1 + y_x^2}{2y_\eta^2} + \nu R(\eta)\, y - \Phi_0(\eta)\right]_k (x) = 0,\quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{3.2}$$

$$y(x, 0) = y_0(x),\quad [y]_k(x) = 0,\quad k = 1, 2, \ldots, n - 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} y(x, \eta) = \eta$$

Здесь

$$\Phi_0(\eta) = {}^1/_2\, R(\eta)\, V^2(\eta) + P(\eta) + \nu\eta R(\eta),\quad \nu = gH/c^2 \tag{3.3}$$

Нижние индексы x и η означают дифференцирование по соответствующей переменной.

Функция $y = \eta$ удовлетворяет уравнению (3.1) и граничным условиям (3.2), поэтому после замены

$$y = \eta + w(x, \eta) \tag{3.4}$$

приходим к нелинейной граничной задаче для совокупности областей G, w — возмущение одномерного потока, $F_1 w$ и $F_2 w$ — нелинейные операторы

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(a^2(\eta)\left(\frac{\partial w}{\partial\eta} + F_1 w\right)\right) + a^2(\eta)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + F_2 w\right) - \nu R'(\eta)\, w = 0 \tag{3.5}$$

$$\left[a^2(\eta)\left(\frac{\partial w}{\partial\eta} + F_1 w\right) - \nu R(\eta)\, w\right]_k (x) = 0,\quad k = 1, 2, \ldots, n$$

$$w(x, 0) = y_0(x),\quad [w]_k(x) = 0,\quad k = 1, 2, \ldots, n - 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} w(x, \eta) = 0$$

$$F_1 w = -\frac{2w_\eta^3 + 3w_\eta^2 + w_x^2}{2(1 + w_\eta)^2},\quad F_2 w = -\frac{w_x w_\eta}{1 + w_\eta} \tag{3.6}$$

Для того чтобы получить линеаризованные уравнение и граничные условия, достаточно в (3.5) положить $F_1 w = 0$, $F_2 w = 0$.

При теоретическом исследовании неудобно переходить к традиционной форме уравнения, содержащей частоту Брента—Вяйсяля, поскольку при этом уравнение теряет дивергентный вид.

4. Основное интегродифференциальное уравнение. Проинтегрируем уравнение (3.5) по отрезку $[\eta, 1]$ и воспользуемся первым граничным условием. Вводя меру Лебега — Стилтьеса, порожденную монотонной функцией $R(\eta)$, полученное уравнение можно записать в виде

$$(4.1)\qquad -a^2(\eta)\left(\frac{\partial w}{\partial \eta}+F_1w\right)-\nu\int_\eta^1 w(x,\xi)\,dR(\xi)+$$
$$+\int_\eta^1 a^2(\xi)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,\xi)+\frac{\partial}{\partial x}F_2w\right)d\xi=0$$

Разделим уравнение (4.1) на $a^2(\eta)$ и проинтегрируем по отрезку $[0, \eta]$, используя второе и третье граничные условия (3.5). Возникающие повторные интегралы преобразуем, разбивая во внутренних интегралах отрезок интегрирования $[\tau, 1]$ на отрезки $[\tau, \eta]$ и $[\eta, 1]$ и меняя порядок интегрирования. Затем введем непрерывную симметричную функцию двух переменных (функцию Грина)

$$(4.2)\qquad G(\eta,\xi)=\vartheta(\xi-\eta)\int_0^\eta\frac{d\tau}{a^2(\tau)}+\vartheta(\eta-\xi)\int_0^\xi\frac{d\tau}{a^2(\tau)},\quad 0\leqslant\xi,\eta\leqslant 1$$

где $\vartheta(t)=0$ при $t<0$, $\vartheta(t)=1$ при $t>0$, $\vartheta(0)={}^1/_2$.

В результате получим следующее основное интегродифференциальное уравнение с симметричными и непрерывными ядрами

$$(4.3)\qquad w(x,\eta)+\nu\int_0^1 G(\eta,\xi)\,w(x,\xi)\,dR(\xi)=y_0(x)-$$
$$-\int_0^\eta F_1w\,d\xi+\int_0^1 G(\eta,\xi)\,a^2(\xi)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,\xi)+\frac{\partial}{\partial x}F_2w\right)d\xi$$

Уравнение (4.3) описывает процесс образования поверхностных и внутренних волн за препятствием. Для малых возмущений можно ограничиться линеаризованным уравнением, получающимся из (4.3) при $F_1w=0$, $F_2w=0$, и решить его методом Фурье разделения переменных. При этом возникает необходимость в исследовании некоторых вспомогательных задач на собственные значения, имеющих и самостоятельное физическое значение.

5. Исследование вспомогательных интегральных уравнений. Начнем с исследования задачи на собственные значения для линейного однородного интегрального уравнения

$$(5.1)\qquad w(\eta)-\nu\int_0^1 G(\eta,\xi)\,w(\xi)\,d\mu(\xi)=0$$

Обозначим через $L_\mu^2[0, 1]$ гильбертово пространство функций, интегрируемых с квадратом по мере $d\mu(\eta)=-dR(\eta)$. Это пространство конечномерно, если $R'(\eta)=0$ при $\eta\in(h_{k-1}, h_k)$, $k=1, 2, \ldots, n$, и бесконечномерно, если $R'(\eta)<0$ на множестве ненулевой меры. Так как функция $G(\eta, \xi)$ непрерывна и симметрична, то интегральный оператор в (5.1) вполне непрерывный и самосопряженный в $L_\mu^2[0, 1]$ и для интегрального уравнения (5.1) справедлива теория Гильберта — Шмидта [6—8]. Основные факты этой теории используются ниже без дальнейших ссылок.

Все характеристические числа уравнения (5.1) вещественны. Если пространство $L_\mu^2[0, 1]$ бесконечномерно, то существует счетное множество характеристических чисел $\{\nu_i\}$ и полная в $L_\mu^2[0, 1]$ ортонормированная система собственных функций $\{\varphi_i(\eta)\}$. Полнота системы собственных функций не только в области значений интегрального оператора, но и в $L_\mu^2[0, 1]$ следует из того легко проверяемого факта, что непрерывная функция, ортогональная ядру $G(\eta, \xi)$, должна быть тождественным нулем. Все характеристические числа изолированные и $\nu_i \to +\infty$ при $i \to +\infty$. Можно также показать, что все характеристические числа $\nu_i > 0$, так как ядро $G(\eta, \xi)$ положительно определено.

В самом деле, собственная функция $\varphi(\eta)$, соответствующая характеристическому числу ν, должна быть решением граничной задачи

$$(5.2)\qquad \frac{d}{d\eta}\left(a^2(\eta)\frac{d\varphi}{d\eta}\right) - \nu R'(\eta)\varphi(\eta) = 0, \quad h_{k-1} < \eta < h_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

$$\left[a^2(\eta)\frac{d\varphi}{d\eta} - \nu R(\eta)\varphi(\eta)\right]_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

$$[\varphi]_k = 0, \ k = 1, \ldots, n-1, \ \varphi(0) = 0,$$

Умножая уравнение (5.2) на $\varphi(\eta)$, интегрируя от 0 до 1 и повторяя рассуждения, проведенные при выводе уравнения (4.1), получаем

$$(5.3)\qquad \nu = \int_0^1 a^2(\eta)\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2 d\eta \Big/ \int_0^1 \varphi^2(\eta)\, d\mu(\eta) > 0$$

Кроме того, все характеристические числа простые, это следует из теоремы единственности решения задачи Коши для уравнения второго порядка. Итерированные ядра раскладываются в билинейные ряды

$$G^{(m)}(\eta, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(\xi)\varphi_i(\eta)}{\nu_i^m}$$

Для $m > 2$ билинейный ряд сходится абсолютно и равномерно по переменным ξ и η на $[0, 1] \times [0, 1]$. При $m = 1, 2$ ряды сходятся абсолютно и равномерно на любом компакте, принадлежащем множеству, на котором мера $dR(\eta)\, dR(\xi)$ не обращается в нуль (обобщение теоремы Мерсера).

Из уравнения (5.2) можно интегрированием получить полезное для дальнейшего исследования соотношение

$$(5.4)\qquad \nu_i \int_0^1 \varphi_i(\xi)\, d\mu(\xi) = a^2(0)\varphi_i'(0)$$

Если рассмотреть неоднородное уравнение (5.1) с правой частью $f(\eta) \in L_\mu^2[0, 1]$, то его решение выражается через резольвенту $\Gamma(\eta, \xi, \nu)$ следующим образом:

$$(5.5)\qquad w(\eta) = f(\eta) - \nu \int_0^1 \Gamma(\eta, \xi, \nu)\, d\mu(\xi)$$

$$\Gamma(\eta, \xi, \nu) = \nu^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(\xi)\varphi_i(\eta)}{\nu_i^2(\nu - \nu_i)} - \nu G^{(2)}(\eta, \xi) - G(\eta, \xi)$$

Тогда ряд в выражении (5.5) сходится абсолютно и равномерно на $[0,1] \times [0,1]$, а резольвента — непрерывная функция переменных ξ, η и удовлетворяет интегральному соотношению

$$(5.6)\qquad \Gamma(\eta, \xi, \nu) = \nu \int_0^1 G(\eta, \tau)\Gamma(\tau, \xi, \nu)\, d\mu(\tau) - G(\xi, \eta)$$

Резольвента является мероморфной функцией параметра ν с простыми полюсами и в окрестности полюса $\nu = \nu_i$ может быть разложена в ряд

Лорана

$$(5.7)\qquad \Gamma(\eta,\xi,\nu)=\frac{\varphi_l(\xi)\varphi_l(\eta)}{\nu-\nu_l}+\sum_{i=0}^{\infty}(\nu-\nu_l)^i M_i(\xi,\eta)$$

причем коэффициенты ряда (5.7) непрерывны на $[0, 1] \times [0, 1]$.

Воспользуемся формулой (5.5) с функцией $f(\eta)$, равной правой части уравнения (4.3), а также тождеством (5.6) для резольвенты. Тогда получим нелинейное интегродифференциальное уравнение для неизвестной функции $w(x, \eta)$

$$(5.8)\qquad w(x,\eta)=\chi(\eta,\nu)y_0(x)-\int_0^1 a^2(\xi)\Gamma(\eta,\xi,\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,\xi)\,d\xi+\Phi w$$

$$\Phi w=-\int_0^{\eta}F_1 w\,d\tau+\nu\int_0^1\Gamma(\eta,\xi,\nu)\left(\int_0^{\xi}F_1 w\,d\tau\right)d\mu(\xi)-$$

$$-\int_0^1 a^2(\xi)\Gamma(\eta,\xi,\nu)\frac{\partial}{\partial x}F_2 w\,d\xi,\quad \chi(\eta,\nu)=1-\nu\int_0^1\Gamma(\eta,\xi,\nu)\,d\mu(\xi)$$

где нелинейные операторы $F_1 w$ и $F_2 w$ определены в (3.6).

Таким образом, (5.8) — точное интегродифференциальное уравнение, описывающее распространение волн за препятствием. Если в (5.8) положить $\Phi w = 0$, то получается линейное интегродифференциальное уравнение, которое решается далее методом Фурье. При этом основную роль играет изучение свойств характеристических чисел и собственных функций однородного интегрального уравнения Фредгольма с непрерывным симметризуемым ядром

$$(5.9)\qquad z(\eta)=\lambda\int_0^1 a^2(\xi)\Gamma(\eta,\xi,\nu)z(\xi)\,d\xi$$

Все характеристические числа $\lambda_i(\nu)$ уравнения (5.9) вещественные и простые. Простота характеристических чисел следует из эквивалентности интегрального уравнения (5.9) краевой задаче на собственные значения для линейного дифференциального уравнения второго порядка и единственности решения задачи Коши для такого уравнения. Вопрос о знаке $\lambda_i(\nu)$ требует дополнительного исследования. При помощи рассуждений, примененных при выводе формулы (5.3), можно показать, что при $\nu < \nu_1$ все $\lambda_i(\nu) < 0$. Таким образом, если скорость потока превышает любую из критических скоростей $c_i = \sqrt{gH/\nu_i}$ распространения длинных волн, все характеристические числа $\lambda_i < 0$. Это означает, как показано ниже, что далеко вниз по потоку не образуются поверхностные и внутренние волны.

Так как $\Gamma(\eta, \xi, \nu)$ — мероморфная функция параметра ν, то для исследования зависимости характеристических чисел от параметра ν можно применять методы комплексного анализа. Полное исследование является трудным. В случае, когда параметр ν близок к одному из критических значений ν_i, становятся эффективными методы аналитической теории возмущений [8]. Можно показать, что существует единственное характеристическое число $\lambda_l(\nu) \to 0$ при $\nu \to \nu_l$, и найти асимптотику этого числа и соответствующей ему собственной функции

$$(5.10)\qquad z_l(\eta,\nu)=\varphi_l(\eta)/\sqrt{A_{ll}}+(\nu-\nu_l)Q_l(\eta,\nu)$$

$$\lambda_l(\nu)=(\nu-\nu_l)/A_{ll}+o(\nu-\nu_l),\quad A_{ll}=\|\varphi_l\|^2=\int_0^1 a^2(\eta)\varphi_l^2(\eta)\,d\eta$$

Здесь функция $Q_l(\eta, \nu)$ аналитична в окрестности точки $\nu = \nu_l$ и непрерывна по переменным ξ и η.

Из формул (5.10) можно вывести ряд полезных следствий. Прежде всего заметим, что $\lambda_l(\nu) > 0$ при $\nu > \nu_l$ и $\lambda_l(\nu) < 0$ при $\nu < \nu_l$. Так как собственные функции $z_i(\eta, \nu)$ ортогональны с весом $a^2(\eta)$ на отрезке $[0, 1]$, то при $\nu \to \nu_l$

$$(5.11)\qquad (z_i, \varphi_l) = \int_0^1 a^2(\eta)\, z_i(\eta, \nu)\, \varphi_l(\eta)\, d\eta = O(\nu - \nu_l), \quad i \neq l$$

$$(z_l, \varphi_l) = \sqrt{A_{ll}} + O(\nu - \nu_l), \ \| z_l \| = 1 + O(\nu - \nu_l)$$

Заметим еще, что ядро $\Gamma(\eta, \xi, \nu)$ можно представить в виде

$$(5.12)\qquad \Gamma(\eta, \xi, \nu) = z_l(\xi, \nu) z_l(\eta, \nu)/\lambda_l + \Gamma_1(\eta, \xi, \nu)$$

где ядро $\Gamma_1(\eta, \xi, \nu)$ ортогонально с весом $a^2(\eta)$ собственной функции $z_l(\eta, \nu)$. Из формул (5.10) и (5.11) следует, что ядро $\Gamma_1(\eta, \xi, \nu)$ аналитично в некоторой окрестности точки $\nu = \nu_l$, а так как оно еще и непрерывно по η, то в силу равенства Парсеваля имеем

$$(5.13)\qquad {\sum_{i=1}^{\infty}}_l \frac{z_i^2(\eta, \nu)}{\lambda_i^2} = \int_0^1 \Gamma_1^2(\eta, \xi, \nu)\, d\xi \leqslant C, \quad |\nu - \nu_l| \leqslant \delta, \quad 0 \leqslant \eta \leqslant 1$$

где индекс l у знака суммы означает, что при суммировании исключается индекс $i = l$, а постоянные C и δ_0, не зависят от η и ν.

6. Решение линейного интегродифференциального уравнения обтекания препятствия. Чтобы иметь дело с классическими решениями, предположим далее, что функция $y_0(x)$ финитна и трижды непрерывно дифференцируема, причем

$$(6.1)\qquad y_0(x) = \delta \Lambda(x), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda(x)\, dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\Lambda(x)\, dx = K, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\Lambda'''(x)|\, dx = M$$

Здесь δ — малый параметр, величина которого должна быть, вообще говоря, согласована с ν, а K и M — некоторые числа порядка единицы.

Полагая в (5.8) $\Phi w = 0$, получаем линеаризованное уравнение

$$(6.2)\qquad W(x, \eta) = -\int_0^1 a^2(\xi)\, \Gamma(\eta, \xi, \nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(x, \xi)\, d\xi - \varkappa(\eta)\, y_0''(x)$$

$$\varkappa(\eta) = \int_0^1 a^2(\xi)\, \Gamma(\eta, \xi, \nu)\, \chi(\xi)\, d\xi$$

$$W(x, \eta) = \omega(x, \eta) - y_0(x)\, \chi(\eta)$$

Ищем решение уравнения (6.2) в виде ряда Фурье по ортонормированной системе собственных функций уравнения (5.9)

$$(6.3)\qquad W(x, \eta) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i(x)\, z_i(\eta, \nu)$$

Разложим также функцию $\varkappa(\eta)$ в ряд Фурье по системе $\{z_i(\eta, \nu)\}$, получаем

$$(6.4)\qquad \varkappa(\eta) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i}{\lambda_i} z_i(\eta, \nu)$$

$$\beta_i = \int_0^1 a^2(\xi)\chi(\xi) z_i(\xi, \nu)\, d\xi =$$

$$= \int_0^1 a^2(\xi) z_i(\xi, \nu)\, d\xi - \frac{\nu}{\lambda_i} \int_0^1 z_i(\xi, \nu)\, d\mu(\xi)$$

Если $\nu \to \nu_l + 0$, то в силу формул (5.10) и (5.4) имеем

$$\beta_l \approx -\frac{a^2(0)\varphi_l'(0)}{\sqrt{(\nu-\nu_l)\lambda_l}}; \quad \beta_i = O(1), \quad i \neq l \tag{6.5}$$

Подставляя разложения (6.3) и (6.4) в (6.2), получим уравнения для определения неизвестных функций $B_i(x)$

$$B_i''(x) + \lambda_i B_i(x) = -\beta_i y_0''(x), \; i = 1, 2, \ldots \tag{6.6}$$

Решение уравнения (6.6), обращающееся в нуль вместе со своей производной при $x \to -\infty$, имеет вид

$$B_i(x) = -\frac{\beta_i}{\sqrt{\lambda_i}} \int_{-\infty}^{x} y_0''(\xi) \sin\sqrt{\lambda_i}(x-\xi)\, d\xi, \quad \lambda_i > 0 \tag{6.7}$$

$$B_i(x) = \frac{\beta_i}{2\sqrt{-\lambda_i}} \int_{-\infty}^{+\infty} y_0''(\xi) \exp(-\sqrt{-\lambda_i}\,|x-\xi|)\, d\xi, \quad \lambda_i < 0$$

Интегрированием по частям можно установить, что

$$B_i(x) = \frac{\beta_i}{\lambda_i}(y_0''(x)\operatorname{sgn}\lambda_i - C_i(x)) \tag{6.8}$$

$$C_i(x) = \int_{-\infty}^{x} y_0'''(\xi) \cos\sqrt{\lambda_i}(x-\xi)\, d\xi, \quad \lambda_i > 0$$

$$C_i(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} y_0'''(\xi) \exp(-\sqrt{-\lambda_i}\,|x-\xi|) \operatorname{sgn}(x-\xi)\, d\xi, \quad \lambda_i < 0$$

Далее из формул (6.3), (6.8) и последнего соотношения (6.2) получаем

$$w(x, \eta) = y_0(x)\chi(\eta) - y_0''(x)\varkappa(\eta) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i}{\lambda_i} C_i(x) z_i(\eta, \nu) \tag{6.9}$$

Стандартные оценки, основанные на использовании неравенства Бесселя, показывают, что ряд в формуле (6.9) сходится равномерно по x

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left|\frac{\beta_i}{\lambda_i}\right| |C_i(x)|\,|z_i(\eta, \nu)| \leqslant \frac{\delta M}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\beta_i^2 + \frac{z_i^2(\eta, \nu)}{\lambda_i^2}\right) \leqslant \tag{6.10}$$

$$\leqslant \frac{\delta M}{2} \left(\int_0^1 a^2(\xi)\chi^2(\xi)\, d\xi + \max_{0 \leqslant \eta \leqslant 1} \int_0^1 a^2(\xi)\Gamma^2(\eta, \xi, \nu)\, d\xi \right)$$

Выражение (6.9) представляет также обобщенное решение интегродифференциального уравнения (6.2), если производные в (6.9) понимать в смысле теории распределений Шварца. Если же потребовать большую гладкость у функции $y_0(x)$, то обобщенное решение будет и классическим.

7. Исследование волновой картины за препятствием. Из формул (6.8), (6.9) видно, что если носитель функции $y_0(x)$ лежит на отрезке $[-L, L]$, то при $x < -L$ поток не возмущен волнами. Если же $x > L$, то из (6.8) имеем при $\lambda_i > 0$

$$C_i(x) = D_i \cos\sqrt{\lambda_i}x + E_i \sin\sqrt{\lambda_i}x \tag{7.1}$$

$$D_i = \int_{-\infty}^{+\infty} y_0'''(\xi)\cos\sqrt{\lambda_i}\,\xi\, d\xi, \quad E_i = \int_{-\infty}^{+\infty} y_0'''(\xi)\sin\sqrt{\lambda_i}\,\xi\, d\xi$$

При $x > L$ и $\lambda_i < 0$ имеем

$$|C_i(x)| \leqslant \frac{\delta \max|\Lambda'''(x)|}{2\sqrt{|\lambda_i|}} \exp\left(-\sqrt{|\lambda_i|}(x-L)\right) \tag{7.2}$$

Используя (7.1) и (6.8), из (6.9) получаем при $x > L$

$$w(x, \eta) = \sum_{i=1}^{\infty}{}' (D_i \cos\sqrt{\lambda_i}\, x + E_i \sin\sqrt{\lambda_i}\, x)\frac{\beta_i}{\lambda_i} z_i(\eta, \nu) + \tag{7.3}$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\beta_i}{\lambda_i} b_i(x) z_i(\eta, \nu), \quad b_i(x) = \begin{cases} 0, & \lambda_i > 0 \\ C_i(x), & \lambda_i < 0 \end{cases}$$

Штрих при сумме означает, что суммирование ведется только по тем индексам, для которых $\lambda_i > 0$.

Пусть теперь $0 < \nu - \nu_l < \delta_1$, где величина δ_1 достаточно мала. Используя оценку (5.13) и повторяя оценку (6.10), получим

$$\sum_{i=1}^{\infty}{}_l \left|\frac{\beta_i}{\lambda_i}\right| |C_i(x)||z_i(\eta, \nu)| \leqslant \frac{\delta M}{2}\Big(\max_{\substack{0\leqslant\nu-\nu_l<\delta_1\\ 0\leqslant\eta\leqslant1}} \int_0^1 a^2(\xi)\chi_1^2(\xi)\, d\xi + \tag{7.4}$$

$$+ \max_{\substack{0\leqslant\nu-\nu_l<\delta_1\\ 0\leqslant\eta\leqslant1}} \int_0^1 a^2(\xi)\Gamma_1^2(\eta, \xi, \nu)\, d\xi\Big) = C\delta$$

$$\chi_1(\eta) = 1 - \nu\int_0^1 \Gamma_1(\eta, \xi, \nu)\, d\mu(\xi)$$

Функция $\Gamma_1(\eta, \xi, \nu)$ определена в (5.12), а постоянная C не зависит от η и ν.

Из неравенства (7.4) следует, что при $x > L$ в формуле (6.9) сумма всех слагаемых, за исключением слагаемого с индексом l, имеет порядок δ при $\nu \to \nu_l + 0$.

Покажем, что при $\lambda_l > 0$ l-е слагаемое имеет более низкий порядок. Используя (6.1) и (6.8) при $x > L$ и интегрируя (6.7) по частям, получаем

$$B_l(x) = -\sqrt{\lambda_l}\,\beta_l\delta\Big(\sin\sqrt{\lambda_l}\, x \int_{-\infty}^{x}\Lambda(\xi)\cos\sqrt{\lambda_l}\,\xi\, d\xi - \tag{7.5}$$

$$- \cos\sqrt{\lambda_l}\, x \int_{-\infty}^{x}\Lambda(\xi)\sin\sqrt{\lambda_l}\,\xi\, d\xi\Big)$$

где второе слагаемое в скобках не превосходит $\sqrt{\lambda_l}K$.

Подставляя (7.5) в (6.9) и используя (6.5) и (7.3), получаем при $x > L$, $0 < \nu - \nu_l < \delta_1$

$$w(x, \eta) = -\frac{\delta a^2(0)\varphi_l'(0)\varphi_l(\eta)}{\sqrt{(\nu-\nu_l)A_{ll}}}\sin\sqrt{\lambda_l}\, x\int_{-L}^{L}\Lambda(\xi)\cos\sqrt{\lambda_l}\,\xi\, d\xi + \tag{7.6}$$

$$+ \delta w_0(x, \eta, \nu), \quad |w_0(x, \eta, \nu)| \leqslant C$$

где постоянная C не зависит от ν. Далее при $x > L$ в силу (6.1) имеем

$$w(x, \eta) = -\frac{\delta a^2(0)\varphi_l'(0)}{\sqrt{(\nu-\nu_l)A_{ll}}}\sin\sqrt{\lambda_l}\, x\varphi_l(\eta) + O(\delta) \tag{7.7}$$

Для того чтобы были справедливы предположения линейной теории нужно в формуле (7.7) согласовать малый параметр δ с $\nu - \nu_l$. Достаточно считать, что $\delta = o(\sqrt{\nu - \nu_l})$. Из (6.8) и (6.9) также следует, что возмущение $w(x, \eta)$ мало, если малы $y_0(x)$, $y_0'(x)$, $y_0''(x)$ и $y_0'''(x)$. Если предположение о малости $y_0(x)$ представляется оправданным, то предположения о малости $y_0'(x)$, $y_0''(x)$ и $y_0'''(x)$ излишни. На самом деле от этих предположений можно освободиться, так как вблизи дна на характер потока слабо влияют силы плавучести. Здесь гораздо существеннее силы трения, приводящие к образованию пограничного слоя и застойных зон вблизи препятствия. В качестве $y_0(x)$ можно взять уравнение линии тока, являющейся верхней границей пограничного слоя, которая обладает достаточной гладкостью.

Заметим также, что из формулы (7.6) виден эффект резонансного усиления возмущения, вносимого в поток неровностью дна порядка δ. Если значение ν близко к критическому, то амплитуда волны, вообще говоря, имеет порядок $\delta/\sqrt{\nu - \nu_l}$.

8. Обтекание препятствия потоком двуслойной жидкости. В качестве простейшего примера, иллюстрирующего предложенный метод, рассмотрим обтекание двуслойным потоком со ступенчатым распределением плотности препятствия произвольной формы ($\varepsilon > 0$ — малый параметр)

$$R(\eta) = \begin{cases} 1 + \varepsilon h_0, & 0 \leqslant \eta < h \\ 1 - \varepsilon h, & h \leqslant \eta < 1, \\ 0, & \eta > 1 \end{cases} \qquad V(\eta) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant \eta < 1 \\ 0, & \eta \geqslant 1 \end{cases} \qquad \int_0^1 R(\eta)\, d\eta = 1, \quad h + h_0 = 1$$

Тогда функция

$$q(\eta) = \int_0^\eta \frac{d\tau}{R(\tau)}$$

кусочно-линейна. С точностью до величины порядка ε^2 имеем

$$q(0) = 0, \quad q(h) = h - \varepsilon h h_0 + \varepsilon^2 h h_0^2, \quad q(1) = 1 + \varepsilon^2 h h_0$$

Функция Грина $G(\eta, \xi)$ также кусочно-линейна и

$$G(h, h) = G(h, 1) = q(h), \quad G(1, 1) = q(1)$$

Из интегрального уравнения (5.1) имеем

$$\nu^{-1}\varphi(\eta) = \varepsilon A G(\eta, h) + (1 - \varepsilon h) B G(\eta, 1), \quad A = \varphi(h), \ B = \varphi(1) \tag{8.1}$$

Полагая в выражении (8.1) $\eta = h$ и $\eta = 1$, приходим к алгебраической системе относительно неизвестных A и B. Приравнивая нулю определитель этой системы, получим характеристическое уравнение, откуда

$$\nu_1^{-1} = 1 - \varepsilon h h_0 + \varepsilon^2 h h_0^3, \quad \nu_2^{-1} = \varepsilon h h_0 - \varepsilon^2 h h_0^3$$

Соответствующие собственные функции кусочно-линейны и

$$\varphi_1(h) = q(h), \quad \varphi_1(1) = 1 - \varepsilon h h_0 + \varepsilon^2 h h_0 (1 + h_0^2)$$
$$\varphi_2(h) = q(h), \quad \varphi_2(1) = -\varepsilon h^2 + \varepsilon^2 h^2 h_0 (1 + h_0)$$

Нормированные собственные функции с точностью до $O(\varepsilon)$ имеют вид

$$\varphi_1(\eta) = \eta, \quad 0 \leqslant \eta \leqslant 1, \qquad \varphi_2(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon h h_0}} \begin{cases} h_0 \eta, & 0 \leqslant \eta < h \\ h(1 - \eta), & h \leqslant \eta \leqslant 1 \end{cases} \tag{8.2}$$

Видно, что функция $\varphi_1(\eta)$ достигает максимума при $\eta = 1$, а $\varphi_2(\eta)$ — при $\eta = h$. Величины, входящие в формулу (7.7), с точностью до $O(\varepsilon)$ имеют вид

$$\varphi_0'(0) = 1, \quad \varphi_2'(0) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon h}}, \quad A_{11} = \frac{1}{3}, \quad A_{22} = \frac{1}{3\varepsilon}$$

$$a(0) = 1, \quad \lambda_1 = 3(\nu - 1), \quad \lambda_2 = \frac{3}{h h_0}(\varepsilon \nu h h_0 - 1)$$

Из (8.2) следует, что для первой (или баротропной) моды максимальное возмущение имеет место на свободной границе. Из (3.4) и (7.7) находим асимптотику свободной границы

$$y_1(x) \approx 1 - \delta \sqrt{\frac{3}{\nu - 1}} \sin \sqrt{3(\nu - 1)}\, x$$

Для второй (или бароклинной) моды находим, что максимальное возмущение имеет место на границе раздела, асимптотика которой имеет вид

$$y_2(x) \approx h \left(1 - \frac{\delta}{h} \sqrt{\frac{3h_0}{(\nu^\circ - 1)h}} \sin \sqrt{\frac{3h(\nu^\circ - 1)}{h_0}}\, \frac{x}{h}\right) \tag{8.3}$$

$$\nu^\circ = \varepsilon\nu h h_0 = \frac{gH_1H_2(R_1 - R_2)}{c^2(R_1H_1 + R_2H_2)}$$

Число ν° в право части формулы (8.3) записано через размерные переменные, причем R_1 и H_1, R_2 и H_2 — плотность и толщина нижнего и верхнего слоя. Критическое значение параметра ν° равно единице, ему соответствует критическое значение скорости распространения длинных волн на границе раздела.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тер-Крикоров А. М.* К теории волн установившегося типа в неоднородной жидкости.— ПММ, 1965, т. 29, вып. 3, с. 440—452.
2. *Yih C.-S.* Wave motion in stratified fluids.— In: Nonlinear Waves. Ithaca — L.: Cornell Unive. Press, 1974, p. 263—290.— Рус. перев.: М.: Мир, 1977, с. 271—296.
3. *Yih C.-S.* Exact solutions for steady two-dimensional flow of a stratified fluid.— J. Fluid. Mech., 1960, v. 9, pt 2, p. 161—174.
4. *Тер-Крикоров А. М.* О внутренних волнах в неоднородной жидкости.— ПММ, 1962, т. 26, вып. 6, с. 1067—1076.
5. *Ле Блон П., Майсек Л.* Волны в океане. Т. 1. М.: Мир, 1981. 480 с.
6. *Петровский И. Г.* Лекции по теории интегральных уравнений. М.— Л.: Гостехиздат, 1951. 128 с.
7. *Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. Л.* и др. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 448 с.
8. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979. 587 с.

Москва

Поступила в редакцию
7.XII.1983