Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 5, 1984

УДК 531.38 + 532.5

О СУЩЕСТВОВАНИИ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ НАМАГНИЧИВАЮЩЕГОСЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Буров А. А., Субханкулов Г. И.

Выводятся уравнения движения магнитного твердого тела в идеальной жидкости и в однородном магнитном поле. Исследуется гамильтонова структура этих уравнений, указывается четыре первых интеграла. Находится четырехпараметрическое семейство случаев интегрируемости по Лиувиллю, а также некоторые случаи существования частных интегралов.

1. Пусть твердое тело движется в неограниченном объеме идеальной несжимаемой покоящейся на бесконечности жидкости. Введем две ортогональные системы координат: подвижную $Oxyz$ жестко связанную с телом, и неподвижную. Обозначим $\mathbf{\Omega} = (\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3)$ и $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3)$ векторы мгновенных угловой и поступательной скоростей тела. Здесь и далее компоненты векторов берутся в подвижной системе координат. Кинетическая энергия системы «тело плюс жидкость» задается положительно определенной-квадратичной формой

$$E(\mathbf{\Omega}, \mathbf{u}) = {}^1/_2\, \alpha_{ij}\Omega^i\Omega^j + \beta_{ij}\Omega^i u^j + {}^1/_2\, \gamma_{ij}u^i u^j$$

(по повторяющимся индексам всюду предполагается суммирование от 1 до 3).

Введем векторы $\mathbf{M} = (M^1, M^2, M^3)$ и $\mathbf{p} = (p^1, p^2, p^3)$, $M^i = \partial E/\partial\Omega^i$, $p^i = \partial E/\partial u^i$, имеющие смысл полного кинетического момента системы относительно точки O и полного импульса. Обозначим

$$H_0(\mathbf{M}, \mathbf{p}) = {}^1/_2\, a_{ij}M^iM^j + b_{ij}M^ip^j + {}^1/_2\, c_{ij}p^ip^j$$

квадратичную форму, двойственную к $E(\mathbf{\Omega}, \mathbf{u})$ относительно преобразования Лежандра. Тогда

$$u^i = \partial H_0/\partial p^i,\ \Omega^i = \partial H_0/\partial M^i\ (i = 1, 2, 3) \tag{1.1}$$

Уравнения изменения импульса и кинетического момента системы «тело плюс жидкость» имеют вид [1]

$$\mathbf{p}^\cdot = \mathbf{p} \times \mathbf{\Omega} + \mathbf{F}_c, \quad \mathbf{M}^\cdot = \mathbf{M} \times \mathbf{\Omega} + \mathbf{p} \times \mathbf{u} + \mathbf{M}_c \tag{1.2}$$

где $\mathbf{F}_c$ и $\mathbf{M}_c$ — дополнительные негидродинамические сила и момент сил, действующих на тело. Производные $\mathbf{M}^\cdot$ и $\mathbf{p}^\cdot$ определяют изменение векторов $\mathbf{M}$ и $\mathbf{p}$ по отношению к подвижной системе координат.

Пусть тело движется в однородном магнитном поле $\mathbf{h}$. Напряженность $\mathbf{h}^*$ и индукция $\mathbf{b}^*$ магнитного поля, искаженного присутствием тела, в квазистатическом приближении удовлетворяют уравнениям и граничным условиям

$$\operatorname{div} \mathbf{b}^* = 0,\ \operatorname{rot} \mathbf{h}^* = 0 \tag{1.3}$$
$$[b_n^*] = 0,\ [\mathbf{h}_\tau^*] = 0,\ \mathbf{h}^* \to \mathbf{h}\ \text{при}\ x^2 + y^2 + z^2 \to \infty$$

где b_n^* и $\mathbf{h}_\tau^*$ — нормальная составляющая индукции и касательная составляющая напряженности магнитного поля на поверхности тела. Квад-

скорость спутника, $\mathbf{M} = \Lambda\boldsymbol{\omega}$ — вектор кинетического момента. Введем функцию

$$H = \frac{1}{2}\langle \mathbf{M}, \Lambda^{-1}\mathbf{M}\rangle - \omega_0 \langle \mathbf{M}, \mathbf{p}\rangle + \frac{3}{2}\omega_0^2 \langle \mathbf{h}, \Lambda\mathbf{h}\rangle$$

Здесь $\mathbf{h}$ — единичный вектор, направленный от притягивающего центра к точке O, $\mathbf{p}$ — единичный вектор нормали к плоскости орбиты.

Тогда движение спутника в системе координат $Oxyz$ описывается уравнениями (1.9), (1.10) с функцией H указанного выше вида.

2. Введем в $C^\infty(R^9)$ скобку Пуассона — билинейную кососимметрическую операцию $\{\cdot, \cdot\}$, удовлетворяющую тождеству Лейбница, полагая

$$\{M_i, M_j\} = -e_{ijk}M_k, \quad \{M_i, p_j\} = -e_{ijk}p_k \tag{2.1}$$

$$\{M_i, h_j\} = -e_{ijk}h_k, \quad \{p_i, p_j\} = \{p_i, h_j\} = \{h_i, h_j\} = 0$$

Тогда уравнения (1.9), (1.10) можно записать в виде

$$\mathbf{M}^\cdot = \{\mathbf{M}, H\}, \quad \mathbf{p}^\cdot = \{\mathbf{p}, H\}, \quad \mathbf{h}^\cdot = \{\mathbf{h}, H\} \tag{2.2}$$

Система (2.2) представляет собой специальный случай уравнений Эйлера на алгебре Ли G [4], являющейся полупрямой суммой алгебры Ли группы E_3 движений трехмерного евклидова пространства и алгебры Ли группы T_3 трансляций трехмерного пространства.

При любых значениях входящих в нее параметров система (1.9), (1.10) обладает четырьмя первыми интегралами: интегралом энергии $I_1 = H$ и интегралами

$$I_2 = \langle \mathbf{p}, \mathbf{p}\rangle, \quad I_3 = \langle \mathbf{h}, \mathbf{h}\rangle, \quad I_4 = \langle \mathbf{p}, \mathbf{h}\rangle \tag{2.3}$$

Функции I_2, I_3, I_4 коммутируют с любой гладкой функцией на $R^9\{\mathbf{M}, \mathbf{p}, \mathbf{h}\}$, т. е. скобка Пуассона (2.1) вырождена. Рассмотрим сужение скобки Пуассона и функции H ($\mathbf{M}, \mathbf{p}, \mathbf{h}$) на неособый уровень интегралов

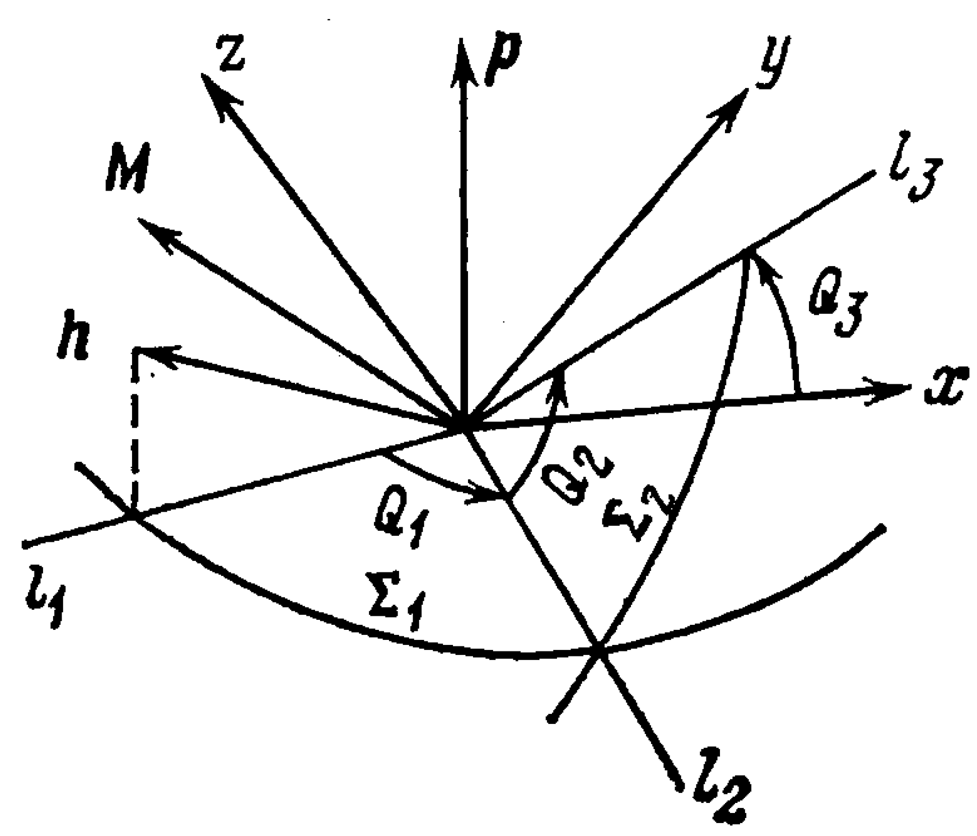
$$I_{234} = \{I_2 = c_2 > 0, I_3 = c_3 > 0, I_4 = c_4\}$$

Утверждение 1. На I_{234} существует глобальная замена переменных, приводящая скобку Пуассона, суженную на I_{234}, к каноническому виду.

Доказательство. Введем на I_{234} переменные P_i, Q_i ($i = 1, 2, 3$) следующим образом:

$$P_1 = M_3, \quad P_2 = \langle \mathbf{M}, \mathbf{M}\rangle^{1/2}, \quad P_3 = \langle \mathbf{M}, \mathbf{p}\rangle / \langle \mathbf{p}, \mathbf{p}\rangle^{1/2}$$

Смысл переменных Q_i ($i = 1, 2, 3$) ясен из фигуры.



Здесь $Oxyz$ — подвижная ортогональная система координат, жестко связанная с телом; Σ_1 и Σ_2 — плоскости, проходящие через точку O и перпендикулярные векторам $\mathbf{p}$ и $\mathbf{M}$ соответственно; l_1 — ортогональная проекция прямой, проходящей вдоль вектора $\mathbf{h}$, на плоскость Σ_1; l_2 — линия пересечения плоскостей Σ_1 и Σ_2; l_3 — линия пересечения плоскостей Σ_2 и Oxy. Явные выражения для углов Q_i ($i = 1, 2, 3$) через $\mathbf{M}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{h}$ громоздки и здесь не приводятся.

Прямое вычисление скобок Пуассона с учетом соотношений (2.1) дает

$$\{P_i, Q_j\} = \delta_{ij}, \{P_i, P_j\} = \{Q_i, Q_j\} = 0$$

т. е. переменные P_i, Q_i ($i = 1, 2, 3$) — канонические. В новых переменных система уравнений (2.2) на I_{234} имеет вид

$$Q_i^\cdot = \partial H^* / \partial P_i, \quad P_i^\cdot = -\partial H^* / \partial Q_i$$

где H^* — сужение функции H на I_{234}.

Переменные P_i, Q_i $(i = 1, 2, 3)$ аналогичны переменным Андуайе, используемым при изучении динамики тяжелого твердого тела с закрепленной точкой [5].

3. Неособое симплектическое многообразие I_{234} шестимерно, поэтому для полной интегрируемости уравнений движения (2.2) требуется существование помимо интеграла энергии $I_1 = H$ еще двух дополнительных коммутирующих между собой первых интегралов.

Утверждение 2. Пусть функция

$$H(\mathbf{M}, \mathbf{p}, \mathbf{h}) = \frac{1}{2}\langle A\mathbf{M}, \mathbf{M}\rangle + \frac{1}{2}\langle C\mathbf{p}, \mathbf{p}\rangle + \frac{1}{2}\langle D\mathbf{h}, \mathbf{h}\rangle$$

такова, что матрицы A, C, D диагональны:

$$A = \operatorname{diag}(a_1, a_2, a_3),\ C = \operatorname{diag}(c_1, c_2, c_3),\ D = \operatorname{diag}\ (d_1, d_2, d_3)$$

причем

$$c_i = \varkappa_1 a_1 a_2 a_3 a_i^{-1} + \nu_1,\quad d_i = \varkappa_2 a_1 a_2 a_3 a_i^{-1} + \nu_2 \tag{3.1}$$

где $\varkappa_1$; $\varkappa_2$, ν_1, ν_2 — произвольные постоянные. Тогда система (2.2) имеет два дополнительных коммутирующих между собой первых интеграла

$$\begin{aligned} I_5 &= \langle\mathbf{M}, \mathbf{M}\rangle - a_i\,(\varkappa_1 p_i^2 + \varkappa_2 h_i^2) \\ I_6 &= \varkappa_1\langle\mathbf{M}, \mathbf{p}\rangle^2 + \varkappa_2\langle\mathbf{M}, \mathbf{h}\rangle^2 + \varkappa_1\varkappa_2 a_i\,(\mathbf{p}\times\mathbf{h})_i^2 \end{aligned} \tag{3.2}$$

причем $I_1 = H$, I_5, I_6 функционально независимы на I_{234}.

Доказательство. Вычислим производные $I_5^{\boldsymbol\cdot}$ и $I_6^{\boldsymbol\cdot}$ в силу системы (2.2) с функцией H описанного вида.

$$\begin{aligned} I_5^{\boldsymbol\cdot} &= 2M_iM_i^{\boldsymbol\cdot} - 2a_i\,(\varkappa_1 p_i p_i^{\boldsymbol\cdot} + \varkappa_2 h_i h_i^{\boldsymbol\cdot}) = \\ &= 2e_{ijk}\,[M_i(M_j a_k M_k + p_j c_k p_k + h_j d_k h_k) - a_i\,(\varkappa_1 p_i p_j + \\ &+ \varkappa_2 h_i h_j)\,a_k M_k] \end{aligned}$$

Приводя подобные члены, получим

$$I_5^{\boldsymbol\cdot} = 2e_{ijk}M_i p_j p_k\ \ (c_k + \varkappa_1 a_i a_k) + 2e_{ijk}M_i h_j h_k\ \ (d_k + \varkappa_2 a_i a_k)$$

В силу (3.1) правая часть последнего соотношения равна нулю. Аналогично

$$\begin{aligned} I_6^{\boldsymbol\cdot} &= 2\varkappa_1\langle\mathbf{M}, \mathbf{p}\rangle\frac{d}{dt}\langle\mathbf{M}, \mathbf{p}\rangle + 2\varkappa_2\langle\mathbf{M}, \mathbf{h}\rangle\frac{d}{dt}\langle\mathbf{M}, \mathbf{h}\rangle + \\ &+ 2\varkappa_1\varkappa_2 a_i s_i s_i^{\boldsymbol\cdot} \end{aligned} \tag{3.3}$$

где $\mathbf{s} = \mathbf{h}\times\mathbf{p}$. Имеем равенства

$$\frac{d}{dt}\langle\mathbf{M}, \mathbf{p}\rangle = e_{ijk}p_i h_j d_k h_k = -d_k s_k h_k$$

$$\frac{d}{dt}\langle\mathbf{M}, \mathbf{h}\rangle = e_{ijk}h_i p_j c_k p_k = c_k s_k p_k$$

$$a_i s_i s_i^{\boldsymbol\cdot} = a_i s_i e_{ijk} s_j a_k M_k = \frac{a_1 a_2 a_3}{a_j}s_j\,(\mathbf{M}\times\mathbf{s})_j$$

Так как $\mathbf{M}\times\mathbf{s} = \mathbf{M}\times(\mathbf{h}\times\mathbf{p}) = \mathbf{h}\langle\mathbf{M}, \mathbf{p}\rangle - \mathbf{p}\langle\mathbf{M}, \mathbf{h}\rangle$, то $a_i s_i s_i^{\boldsymbol\cdot} = a_1 a_2 a_3 a_k^{-1} s_k\,(h_k\langle\mathbf{M}, \mathbf{p}\rangle - p_k\langle\mathbf{M}, \mathbf{h}\rangle)$.

Тогда, приводя в (3.3) подобные члены, получим

$$\begin{aligned} I_6^{\boldsymbol\cdot} &= 2\langle\mathbf{M}, \mathbf{p}\rangle s_k h_k\,(-\varkappa_1 d_k + \varkappa_1\varkappa_2 a_1 a_2 a_3 a_k^{-1}) + \\ &+ 2\langle\mathbf{M}, \mathbf{h}\rangle s_k p_k\,(\varkappa_2 c_k - \varkappa_1\varkappa_2 a_1 a_2 a_3 a_k^{-1}) \end{aligned}$$

В силу (3.1) и соотношений $\langle\mathbf{s}, \mathbf{p}\rangle = \langle\mathbf{s}, \mathbf{h}\rangle = 0$ правая часть полученного выражения равна нулю.

Таким образом, имеется четырехпараметрическое семейство интегрируемых по Лиувиллю систем вида (1.9), (1.10). На особых уровнях I_{234}

интегралы I_5 и I_6 переходят соответственно в интеграл Клебша и в квадрат интеграла площадей уравнений Кирхгофа [6].

Если $a_1 = a_2$, то дополнительные интегралы можно взять в виде

$$I_5 = M_3$$

$$I_6 = \varkappa_1 \langle \mathrm{M}, \mathrm{p}\rangle^2 + \varkappa_2 \langle \mathrm{M}, \mathrm{h}\rangle^2 - \varkappa_1\varkappa_2 a_1 (p_1h_2 - p_2h_1)^2$$

Для системы (2.2) с гамильтонианом H $(\mathrm{M}, \mathrm{p}, \mathrm{h}) = I_5$ функции I_2, I_3, I_4, I_6 и

$$I = a_iM_i^2 + a_1a_2a_3a_i^{-1} (\varkappa_1p_i^2 + \varkappa_2h_i^2)$$

также образуют полный набор независимых коммутирующих интегралов.

Заметим, что $I_5 = M_3$ — интеграл системы (2.2) с функцией H вида (1.8), когда матрицы A, B, C, D диагональны и

$$a_1 = a_2,\ b_1 = b_2,\ c_1 = c_2,\ d_1 = d_2,\ J_1 = J_2$$

При специальном выборе функции H вида (1.8) система (2.2) допускает частный интеграл I, т. е. $I^{\cdot}|_{(2.2)} = 0$, если $I = 0$.

Утверждение 3. Пусть функция H $(\mathrm{M}, \mathrm{p}, \mathrm{h})$ вида (1.8) удовлетворяет условиям

$$A = \mathrm{diag}\ (a_1,\ a_2,\ a_3),\quad a_1 < a_2 < a_3,\quad B = 0,\quad c_{12} = c_{23} = 0$$

$$\sqrt{a_2 - a_1}\ (c_{33} - c_{22}) \mp \sqrt{a_3 - a_2}c_{13} = 0$$

$$\sqrt{a_2 - a_1}c_{13} \pm \sqrt{a_3 - a_2}\ (c_{22} - c_{11}) = 0$$

и одному из следующих условий:

1) $\mathrm{J} = 0,\ d_{12} = d_{23} = 0$

$$\sqrt{a_2 - a_1}\ (d_{33} - d_{22}) \mp \sqrt{a_3 - a_2}d_{13} = 0$$

$$\sqrt{a_2 - a_1}c_{13} \pm \sqrt{a_3 - a_2}\ (c_{22} - c_{11}) = 0$$

2) $D = 0,\ J_2 = 0$

$$\sqrt{a_2 - a_1}J_3 \pm \sqrt{a_3 - a_2}J_1 = 0$$

Тогда $I = M_1 \sqrt{a_2 - a_1} \pm M_2 \sqrt{a_3 - a_2}$ — частный интеграл системы (2.2).

Полученный частный интеграл является обобщением частного интеграла уравнений Кирхгофа [7] и частного интеграла Гесса — Аппельрота в динамике тяжелого твердого тела с неподвижной точкой.

Авторы благодарят А. Н. Голубятникова и В. В. Козлова за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1976. 573 с.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 623 с.
3. *Белецкий В. В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.
4. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 431 с.
5. *Архангельский Ю. А.* Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. 328 с.
6. *Стеклов В. А.* О движении твердого тела в жидкости. Харьков, 1893. 234 с.
7. *Козлов В. В., Онищенко Д. А.* Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа.— Докл. АН СССР, 1982, т. 266, № 6, с. 1298—1300.

Москва

Поступила в редакцию 24.IV.1983