Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 5, 1984

УДК 531.38 + 532.5

О ПРОЦЕССИОННО-ВИНТОВЫХ ДВИЖЕНИЯХ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ЖИДКОСТИ

Рубановский В. Н.

Рассматривается задача Кирхгофа—Клебша о движении по инерции твердого тела в жидкости. Исследуются прецессионно-винтовые движения тела, слагающиеся из двух винтовых движений, одна из осей которых неподвижна в пространстве, а другая неподвижна в теле. Указано необходимое и достаточное кинематическое условие прецессионно-винтовых движений в дифференциальной и конечной формах. Дан метод отыскания таких движений, проведено исследование их устойчивости и указана геометрическая интерпретация движения тела.

1. Рассматривается задача о движении по инерции в беспредельной по всем направлениям идеальной однородной несжимаемой жидкости свободного твердого тела, ограниченного односвязной поверхностью и имеющего многосвязные полости, целиком заполненные совершающей безвихревое движение идеальной жидкостью. Предполагается, что движение внешней жидкости, порожденное движением тела, безвихревое, и что она покоится на бесконечности.

Кинетическая энергия T такой динамической системы с точностью до постоянной, определяемой циклическим движением жидкости в полостях тела, записывается в виде [1]

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(a_{ij}P_iP_j+b_{ij}R_iR_j+2c_{ij}P_iR_j),\quad a_{ij}=a_{ji},\quad b_{ij}=b_{ji}$$

где a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} — определенные для данной системы постоянные, а R_1 R_2, R_3 и P_1, P_2, P_3 — проекции на оси неизменно связанной с телом прямоугольной системы осей координат $Ox_1x_2x_3$, импульсивной силы $\mathbf{R}$ и импульсивной пары $\mathbf{P}$ системы без учета циклического движения жидкости в полостях тела.

Обозначив через u_i и Ω_i проекции на оси x_i поступательной $\mathbf{u}$ и мгновенной угловой скорости $\mathbf{\Omega}$ тела, будем иметь для них выражения

$$u_1=\partial T/\partial R_1,\qquad \Omega_1=\partial T/\partial P_1 \quad (123) \tag{1.1}$$

Уравнения движения тела в жидкости имеют вид [1, 2]

$$d\mathbf{R}/dt+\mathbf{\Omega}\times\mathbf{R}=0,\quad d\mathbf{P}/dt+\mathbf{\Omega}\times(\mathbf{P}+\mathbf{k})+\mathbf{u}\times\mathbf{R}=0 \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{k}=(k_1, k_2, k_3)$ — вектор кинетического момента циклического движения жидкости в полостях тела.

Уравнения (1.2) допускают три первых интеграла

$$T=E=\text{const},\quad \mathbf{R}^2=H^2=\text{const},\ (\mathbf{P}+\mathbf{k})\cdot\mathbf{R}=hH^2=\text{const} \tag{1.3}$$

Используя аппарат винтового исчисления [3], введем в рассмотрение импульсивный $\mathbf{Q}=\mathbf{R}+\omega(\mathbf{P}+\mathbf{k})$ и кинематический $\mathbf{U}=\mathbf{\Omega}+\omega\mathbf{u}$ винты, где ω ($\omega^2=0$) — число Клиффорда, и представим уравнения (1.2) в виде одного уравнения

$$d\mathbf{Q}/dt+\mathbf{U}\times\mathbf{Q}=0 \tag{1.4}$$

Из (1.4) следует, что винт $\mathbf{Q}$ неподвижен в пространстве, при этом

$$\mathbf{Q}^2 = H^2 (1 + \omega h)^2 \tag{1.5}$$

Отделяя здесь главную и моментную части, получаем последние два из интегралов (1.3).

2. Движение тела в жидкости назовем прецессионно-винтовым (ПВ движением), если оно слагается из двух винтовых движений, дуальный угол между осями которых остается постоянным и ось первого винтового движения неподвижна в пространстве, а ось второго неподвижна в теле.

Далее будем рассматривать только случай, когда составляющие винтовые движения являются постоянными.

Укажем необходимое и достаточное кинематическое условие ПВ движения. Пусть $\mathbf{\Lambda}$ — единичный винт неподвижной в пространстве оси. В качестве оси, неподвижной в теле, возьмем ось x_3 и обозначим через $\mathbf{E}_3$ ее единичный винт. Дуальный угол между осями винтов $\mathbf{\Lambda}$ и $\mathbf{E}_3$ обозначим через $\Theta = \vartheta + \omega\vartheta^\circ$. Винты $\mathbf{\Lambda}$ и $\mathbf{E}_3$ удовлетворяют уравнениям

$$d\mathbf{\Lambda}/dt + \mathbf{U} \times \mathbf{\Lambda} = 0, \quad \mathbf{\Lambda}^2 = 1, \quad \mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{E}_3 = \Lambda_3 = \cos\Theta \tag{2.1}$$

Отсюда в проекциях на оси x_1, x_2, x_3 получаем уравнения

$$\Lambda_1^{\boldsymbol\cdot} = U_3\Lambda_2 - U_2\Lambda_3, \quad \Lambda_2^{\boldsymbol\cdot} = U_1\Lambda_3 - U_3\Lambda_1 \tag{2.2}$$

$$U_1\Lambda_2 - U_2\Lambda_1 = 0 \tag{2.3}$$

Дифференцируя интегральное соотношение (2.3) с учетом (2.2), получаем уравнение, после подстановки в которое выражений

$$\Lambda_1 = \frac{U_1 \sin\Theta}{\sqrt{U_1^2 + U_2^2}}, \quad \Lambda_2 = \frac{U_2 \sin\Theta}{\sqrt{U_1^2 + U_2^2}}, \quad \Lambda_3 = \cos\Theta$$

получаемых из (2.1) и (2.3), приходим к требуемому условию

$$U_2U_1^{\boldsymbol\cdot} - U_1U_2^{\boldsymbol\cdot} - U_3(U_1^2 + U_2^2) + (U_1^2 + U_2^2)^{3/2}\operatorname{ctg}\Theta = 0 \tag{2.4}$$

Соотношение (2.4) является винтовым аналогом известного кинематического условия Гриоли прецессионных движений твердого тела с одной неподвижной точкой [4].

Введем неподвижную систему прямоугольных осей координат $O'\zeta_1\zeta_2\zeta_3$, ось ζ_3 которой совпадает с осью винта $\mathbf{Q} = H(1 + \omega h)\mathbf{\Gamma}$ с единичным винтом $\mathbf{\Gamma}$. Положение подвижных осей $Ox_1x_2x_3$ относительно неподвижных $O'\zeta_1\zeta_2\zeta_3$ определим дуальными эйлеровыми углами Θ_*, Ψ_*, Φ_*. Проекции U_i винта U на оси x_i связаны с дуальными эйлеровыми углами и производными от них по времени соотношениями [3]

$$U_1 = \Psi_*^{\boldsymbol\cdot} \sin\Theta_* \sin\Phi_* + \Theta_*^{\boldsymbol\cdot} \cos\Phi_*$$
$$U_2 = \Psi_*^{\boldsymbol\cdot} \sin\Theta_* \cos\Phi_* - \Theta_*^{\boldsymbol\cdot} \sin\Phi_*$$
$$U_3 = \Psi_*^{\boldsymbol\cdot} \cos\Phi_* + \Phi_*^{\boldsymbol\cdot}$$

Подставляя эти соотношения в (2.4), приведем условие ПВ движений к виду

$$\begin{gathered}\Psi_*^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}\Theta_*^{\boldsymbol\cdot}\sin\Theta_* - \Theta_*^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}\Psi_*^{\boldsymbol\cdot}\sin\Theta_* + 2\Psi_*^{\boldsymbol\cdot}\Theta_*^{\boldsymbol\cdot 2}\cos\Theta_* + \\ + \Psi_*^{\boldsymbol\cdot 3}\sin^2\Theta_*\cos\Theta_* = (\Theta_*^{\boldsymbol\cdot 2} + \Psi_*^{\boldsymbol\cdot 2}\sin^2\Theta_*)^{3/2}\operatorname{ctg}\Theta\end{gathered} \tag{2.5}$$

Условие ПВ движений можно представить в дуальных эйлеровых углах в конечном виде. Для этого рассмотрим скалярное произведение двух винтовых произведений

$$(\mathbf{\Lambda} \times \mathbf{\Gamma})\cdot(\mathbf{\Gamma} \times \mathbf{E}_3) = (\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{\Gamma})(\mathbf{\Gamma}\cdot\mathbf{E}_3) - \mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{E}_3$$

Отсюда, в виду того что скалярные произведения единичных винтов равны косинусам соответствующих дуальных углов, получаем $\sin K \sin \Theta_* \cos(\Psi_* - \Psi_{*0}) = \cos K \cos \Theta_* - \cos \Theta$, где $\Psi_* - \Psi_{*0}$ — дуальный угол между винтами $(\Lambda \times \Gamma) \sin^{-1} K$ и $(\Gamma \times E_3) \sin^{-1} \Theta_*$, Ψ_{*0} — дуальный угол между осью винта $(\Lambda \times \Gamma) \sin^{-1} K$ и осью ζ_1, а K — дуальный угол между винтами Λ и Γ $(K = \varkappa + \omega\varkappa^0)$.

Из последнего равенства получаем искомое условие

$$\cos(\Psi_* - \Psi_{*0}) = (\cos K \cos \Theta_* - \cos \Theta)(\sin K \sin \Theta_*)^{-1} \tag{2.6}$$

которое можно рассматривать как общее решение дифференциального уравнения (2.5) с двумя произвольными дуальными постоянными Ψ_{*0} и K. Оно является винтовым аналогом условия прецессионных движений твердого тела с неподвижной точкой [1].

3. Укажем метод нахождения ПВ движений. Умножив скалярно обе части уравнения (2.1) на винт E_3, получим соотношение $E_3 \cdot (U \times \Lambda) = 0$, из которого следует, что винт U можно представить в виде

$$U = \Psi^{\cdot} \Lambda + \Phi^{\cdot} E_3 \tag{3.1}$$

где Ψ — дуальный угол между осями винтов $\Lambda \times (\Gamma \times \Lambda)$ и $E_3 \times \Lambda$, а Φ — дуальный угол между осью винта $E_3 \times \Lambda$ и осью x_1.

Подставив (3.1) в (2.1), получаем для определения Λ уравнение

$$\Lambda^{\cdot} + \Phi^{\cdot}(E_3 \times \Lambda) = 0, \quad \Lambda^2 = 1 \tag{3.2}$$

Интегрируя (3.2), находим для прямоугольных дуальных координат $\Lambda_i = \lambda_i + \omega\lambda_i^{\circ}$ $(i = 1, 2, 3)$ винта Λ выражения

$$\Lambda_1 = \sin \Theta \sin \Phi, \Lambda_2 = \sin \Theta \cos \Phi, \Lambda_3 = \cos \Theta, \Phi = \Phi^{\cdot} t + A \tag{3.3}$$

где $A = \alpha + \omega\alpha^{\circ}$ — произвольная дуальная постоянная.

Из (3.1) и (3.3) для координат U_i винта U получаем выражения

$$\begin{aligned} U_1 &= \Omega_1 + \omega u_1 = \Psi^{\cdot} \sin \Theta \sin \Phi \\ U_2 &= \Omega_2 + \omega u_2 = \Psi^{\cdot} \sin \Theta \cos \Phi \\ U_3 &= \Omega_3 + \omega u_3 = \Psi^{\cdot} \cos \Theta + \Phi^{\cdot} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Отделяя здесь главные и моментные части, имеем

$$\begin{aligned} &\Omega_1 = \psi^{\cdot} \sin \vartheta \sin \varphi, \quad \Omega_2 = \psi^{\cdot} \sin \vartheta \cos \varphi, \Omega_3 = \psi^{\cdot} \cos \vartheta + \varphi^{\cdot} \\ &\varphi = \varphi^{\cdot} t + \alpha \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= (\psi^{\cdot\circ} \sin \vartheta + \psi^{\cdot} \vartheta^{\circ} \cos \vartheta) \sin \varphi + \psi^{\cdot} (\varphi^{\cdot\circ} t + \alpha^{\circ}) \sin \vartheta \cos \varphi \\ u_2 &= (\psi^{\cdot\circ} \sin \vartheta + \psi^{\cdot} \vartheta^{\circ} \cos \vartheta) \cos \varphi - \psi^{\cdot} (\varphi^{\cdot\circ} t + \alpha^{\circ}) \sin \vartheta \sin \varphi \\ u_3 &= \psi^{\cdot\circ} \cos \vartheta - \psi^{\cdot} \vartheta^{\circ} \sin \vartheta + \varphi^{\cdot\circ} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Для определения винта Γ используем легко проверяемое разложение

$$\begin{aligned} \Gamma = \left(\cos K + \frac{\cos \Theta \sin K \sin \Psi}{\sin \Theta}\right) \Lambda - \frac{\sin K \sin \Psi}{\sin \Theta} E_3 - \\ - \frac{\sin K \cos \Psi}{\sin \Theta} (\Lambda \times E_3) \end{aligned} \tag{3.7}$$

из которого для координат $\Gamma_i = \gamma_i + \omega\gamma_i^{\circ}$ $(i = 1, 2, 3)$ винта Γ получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= (\sin \Theta \cos K + \cos \Theta \sin K \sin \Psi) \sin \Phi - \\ &- \sin K \cos \Psi \cos \Phi \\ \Gamma_2 &= (\sin \Theta \cos K + \cos \Theta \sin K \sin \Psi) \cos \Phi + \\ &+ \sin K \cos \Psi \sin \Phi \end{aligned}$$

[1] *Горр Г. В.* Методы построения полного решения задач динамики твердого тела: Автореф. дис. на соискание уч. ст. докт. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1982. 35с.

$$\Gamma_3 = \cos\Theta\cos K - \sin\Theta\sin K\sin\Psi,\quad \Psi = \Psi^{\bullet}t + B$$
$$B = \beta + \omega\beta^{\circ} = \mathrm{const}$$

Отделяя здесь главные и моментные части, имеем

$$\gamma_1 = (\sin\vartheta\cos\varkappa + \cos\vartheta\sin\varkappa\sin\psi)\sin\varphi - \sin\varkappa\cos\psi\cos\varphi \tag{3.8}$$
$$\gamma_2 = (\sin\vartheta\cos\varkappa + \cos\vartheta\sin\varkappa\sin\psi)\cos\varphi + \sin\varkappa\cos\psi\sin\varphi$$
$$\gamma_3 = \cos\vartheta\cos\varkappa - \sin\vartheta\sin\varkappa\sin\psi$$

$$\gamma_1^{\circ} = (\vartheta^{\circ}\cos\vartheta\cos\varkappa - \varkappa^{\circ}\sin\vartheta\sin\varkappa)\sin\varphi - (\vartheta^{\circ}\sin\vartheta\sin\varkappa - \varkappa^{\circ}\cos\vartheta\cos\varkappa)\sin\varphi\sin\psi - \varkappa^{\circ}\cos\varkappa\cos\varphi\cos\psi + (\varphi^{\circ} + \psi^{\circ}\cos\vartheta)\sin\varkappa\sin\varphi\cos\psi + \varphi^{\circ}\sin\vartheta\cos\varkappa\cos\varphi + (\psi^{\circ} + \varphi^{\circ}\cos\vartheta)\sin\varkappa\cos\varphi\sin\psi \tag{3.9}$$
$$\gamma_2^{\circ} = (\vartheta^{\circ}\cos\vartheta\cos\varkappa - \varkappa^{\circ}\sin\vartheta\sin\varkappa)\cos\varphi - (\vartheta^{\circ}\sin\vartheta\sin\varkappa - \varkappa^{\circ}\cos\vartheta\cos\varkappa)\cos\varphi\sin\psi + \varkappa^{\circ}\cos\varkappa\sin\varphi\cos\psi + (\varphi^{\circ} + \psi^{\circ}\cos\vartheta)\sin\varkappa\cos\varphi\cos\psi - \varphi^{\circ}\sin\vartheta\cos\varkappa\sin\varphi - (\psi^{\circ} + \varphi^{\circ}\cos\vartheta)\sin\varkappa\sin\varphi\sin\psi$$
$$\gamma_3^{\circ} = -(\vartheta^{\circ}\sin\vartheta\cos\varkappa + \varkappa^{\circ}\cos\vartheta\sin\varkappa) - (\vartheta^{\circ}\cos\vartheta\sin\varkappa + \varkappa^{\circ}\sin\vartheta\cos\varkappa)\sin\psi - \psi^{\circ}\sin\vartheta\sin\varkappa\cos\psi$$

Выражения для R_i, P_i $(i = 1, 2, 3)$ получим из соотношения

$$\mathbf{R} + \omega(\mathbf{P} + \mathbf{k}) = H(1 + \omega h)(\gamma + \omega\gamma^{\circ})$$

записав его в координатах и отделив главные и моментные части

$$R_1 = H\gamma_1, \qquad P_1 = hR_1 + H\gamma_1^{\circ} - k_1 \tag{3.10}$$ (123)

С другой стороны, для Ω_i, u_i $(i = 1, 2, 3)$ имеем соотношения (1.1), которые запишем в виде (индекс T означает транспонирование)

$$\Omega = \mathbf{A}\cdot P + C\cdot\mathbf{R},\quad \mathbf{u} = C^{T}\cdot P + \mathbf{B}\cdot\mathbf{R},\quad \mathbf{A} = \|a_{ij}\|_1^3,$$
$$\mathbf{B} = \|b_{ij}\|_1^3,\quad \mathbf{C} = \|c_{ij}\|_1^3$$

Подставляя сюда выражения для $\mathbf{R}$ и $\mathbf{P}$ из (3.10), получаем

$$\Omega = H\mathbf{A}\cdot\gamma^{\circ} + H(\mathbf{C} + h\mathbf{A})\cdot\gamma - \mathbf{A}\cdot\mathbf{k} \tag{3.11}$$
$$\mathbf{u} = H\mathbf{C}^{T}\cdot\gamma^{\circ} + H(\mathbf{B} + h\mathbf{C}^{T})\cdot\gamma - \mathbf{C}^{T}\cdot\mathbf{k} \tag{3.12}$$

Отождествляя выражения для Ω и $\mathbf{u}$, определяемые по формулам (3.5) (3.11) и (3.6), (3.12), получим условия существования ПВ движений тела.

Рассмотрим соотношение (3.11). Его левая часть не содержит вековых членов. Для того чтобы и правая его часть не содержала таких членов, необходимо, чтобы выражения (3.9) для γ_1°, γ_2°, γ_3° не содержали вековых членов. Это требование приводит к условиям

$$\psi^{\bullet\circ}\sin\vartheta\sin\varkappa = 0,\qquad \varphi^{\bullet\circ}\sin\vartheta\cos\varkappa = 0$$
$$(\varphi^{\bullet\circ} + \psi^{\bullet\circ}\cos\vartheta)\sin\varkappa = 0,\qquad (\psi^{\bullet\circ} + \varphi^{\bullet\circ}\cos\vartheta)\sin\varkappa = 0$$

которые выполняются в следующих случаях:

$$\text{а) } \varkappa = \varphi^{\bullet\circ} = 0;\quad \text{б) } \vartheta = \varphi^{\bullet\circ} + \psi^{\bullet\circ} = 0;\quad \text{в) } \vartheta = \pi,\quad \varphi^{\bullet\circ} = \psi^{\bullet\circ};\quad \text{г) } \psi^{\bullet\circ} = \varphi^{\bullet\circ} = 0 \tag{3.13}$$

Исследуем ПВ движения в случае а) из (3.13), при этом для простоты вычислений будем считать, что $\varkappa^{\circ} = 0$; тогда оси винтов Λ и Γ совпадают.

Отождествляя выражения (3.5) и (3.11) для Ω_i и (3.6) и (3.12) для u_i $(i = 1, 2, 3)$, получаем следующие девять групп условий существования

для которого Ω_i, u_i имеют выражения

$$(3.20)\qquad \begin{aligned}&\Omega_1 = \psi^{\cdot} \sin\vartheta \sin(\varphi^{\cdot} t + \alpha), \quad u_1 = (\psi^{\cdot\circ} \sin\vartheta + \psi^{\cdot}\vartheta^{\circ} \cos\vartheta) \times\\ &\times \sin(\varphi^{\cdot} t + \alpha)\\ &\Omega_2 = \psi^{\cdot} \sin\vartheta \cos(\varphi^{\cdot} t + \alpha), \quad u_2 = (\psi^{\cdot\circ} \sin\vartheta + \psi^{\cdot}\vartheta^{\circ} \cos\vartheta) \times\\ &\times \cos(\varphi^{\cdot} t + \alpha)\\ &\Omega_3 = \psi^{\cdot} \cos\vartheta + \varphi^{\cdot}, \quad u_3 = \psi^{\cdot\circ} \cos\vartheta - \psi^{\cdot}\vartheta^{\circ} \cos\vartheta\end{aligned}$$

Равенства (3.14) показывают, что в ПВ движении тела вектор гиростатического момента внутренних циклических движений параллелен оси x_3 собственного винтового движения тела. Равенства (3.15) налагают соответствующие ограничения на форму внешней поверхности тела и распределение его массы. Равенствами (3.16) определяются значения кинематических характеристик прецессионно-винтового движения. Уравнение (3.17) показывает, что при изменении угла ϑ и фиксированных значениях остальных параметров ось x_3 описывает цилиндроид. Выражениями (3.18) определяются значения постоянных первых трех интегралов (1.3) для ПВ движений тела.

4. Дадим геометрическую интерпретацию движения тела, описываемого решением (3.20). Для этого представим (3.1) с учетом (3.16) в виде

$$(4.1)\qquad \Omega e^{\omega P}\mathbf{E} = \varphi^{\cdot}\mathbf{E}_3 + \psi^{\cdot} e^{\omega p}\mathbf{\Gamma}, \quad \mathbf{U} = \Omega e^{\omega P}\mathbf{E}, \quad p = \psi^{\cdot\circ}/\psi^{\cdot}$$

где Ω, P, $\mathbf{E}$ — модуль вектора, параметр и единичный вектор винта $\mathbf{U}$, а p — параметр винта $\Psi^{\cdot}\mathbf{\Gamma}$.

Возводя обе части (4.1) в квадрат и отделяя главную и моментную части, находим

$$(4.2)\qquad \Omega^2 = \varphi^{\cdot 2} + \psi^{\cdot 2} + 2\varphi^{\cdot}\psi^{\cdot}\cos\vartheta, \quad P = \frac{(\psi^{\cdot} + \varphi^{\cdot}\cos\vartheta)\psi^{\cdot\circ} - \varphi^{\cdot}\psi^{\cdot}\vartheta^{\circ}\sin\vartheta}{\varphi^{\cdot 2} + \psi^{\cdot 2} + 2\varphi^{\cdot}\psi^{\cdot}\cos\vartheta}$$

Умножая теперь (4.1) скалярно на винты $\mathbf{E}$ и $\mathbf{\Gamma}$ и обозначая через $D = \delta + \omega\delta^{\circ}$ и $\Theta - D = \vartheta - \delta + \omega(\vartheta^{\circ} - \delta^{\circ})$ дуальные углы, образуемые винтом $\mathbf{E}$ с винтами $\mathbf{E}_3$ и $\mathbf{\Gamma}$, получаем

$$\Omega e^{\omega P}\cos D = \varphi^{\cdot} + \psi^{\cdot} e^{\omega p}\cos\Theta, \quad \Omega e^{\omega P}\cos(\Theta - D) = \varphi^{\cdot}\cos\Theta + \psi^{\cdot} e^{\omega p}$$

Отделяя здесь главные и моментные части, находим

$$(4.3)\qquad \begin{aligned}&\cos\delta = (\varphi^{\cdot} + \psi^{\cdot}\cos\vartheta)\Omega^{-1}, \quad \delta^{\circ} = [\varphi^{\cdot}\psi^{\cdot\circ}\sin\vartheta + \psi^{\cdot}(\psi^{\cdot} + \varphi^{\cdot}\cos\vartheta)\vartheta^{\circ}]\Omega^{-2}\\ &\cos(\vartheta - \delta) = (\psi^{\cdot} + \varphi^{\cdot}\cos\vartheta)\Omega^{-1}, \quad \vartheta^{\circ} - \delta^{\circ} = [-\varphi^{\cdot}\psi^{\cdot\circ}\sin\vartheta +\\ &+ \varphi^{\cdot}(\varphi^{\cdot} + \psi^{\cdot}\cos\vartheta)\vartheta^{\circ}]\Omega^{-2}\end{aligned}$$

Эти формулы показывают, что при движении тела дуальные углы, образуемые единичным винтом $\mathbf{E}$ винта $\mathbf{U}$ с винтами $\mathbf{E}_3$ и $\mathbf{\Gamma}$, остаются постоянными. Следовательно, при движении тела ось винта $\mathbf{U}$ будет описывать в теле и неподвижном пространстве однополосные гиперболоиды

$$(4.4)\qquad x_1^2 + x_2^2 - x_3^2\,\mathrm{tg}^2\,\delta = \delta^{\circ 2}, \quad \xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2\,\mathrm{tg}^2(\vartheta - \delta) = (\vartheta^{\circ} - \delta^{\circ})^2$$

При этом неподвижная система координат $O''\xi_1\xi_2\xi_3$ выбрана так, что ось ξ_3 направлена по оси импульсивного винта $\mathbf{Q}$, а за начала O, O'' подвижных и неподвижных осей координат приняты точки пересечения оси дуального угла Θ с осями винтов $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{E}_3$.

Движение тела в жидкости, описываемое решением (3.20), можно представить себе как результат качения подвижного гиперболоида по неподвижному вокруг общей образующей с угловой скоростью Ω и его скольжения вдоль этой образующей со скоростью $P\Omega$. При $c_{ij} \to 0$, $b_{ij} \to 0$ задача о движении тела в жидкости переходит в задачу о движении уравновешенного гиростата, при этом формулы (3.14) — (3.17) приводят к известным соотношениям

$$a_{11} = a_{22},\ a_{13} = a_{23} = 0,\ k_1 = k_2 = 0,$$

$$(C - A)\psi^{\cdot} \cos \vartheta + C\varphi^{\cdot} + k_3 = 0,\quad \psi^{\cdot\circ} = \vartheta^\circ = 0,\quad A = a_{11}^{-1}$$

$$C = a_{33}^{-1}$$

а (4.2) и (4.3) дают

$$\delta^\circ = \vartheta^\circ = 0,\quad \operatorname{tg} \delta = \frac{\psi^{\cdot} \sin \vartheta}{\varphi^{\cdot} + \psi^{\cdot} \cos \vartheta},\quad \operatorname{tg}(\vartheta - \delta) = \frac{\varphi^{\cdot} \sin \vartheta}{\psi^{\cdot} + \varphi^{\cdot} \cos \vartheta}$$

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \operatorname{tg}^2 \delta = 0,\quad \xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2 \operatorname{tg}^2 (\vartheta - \delta) = 0$$

В этом случае движение тела происходит так, что асимптотический подвижный конус катится без скольжения по асимптотическому неподвижному конусу с угловой скоростью Ω, при этом вершины конусов совпадают.

5. Исследуем устойчивость движения (3.19) в случае, когда

$$a_{11} = a_{22},\quad a_{13} = a_{23} = 0 \tag{5.1}$$

При выполнении условий (5.1) удвоенная кинетическая энергия системы дается с учетом (3.15) выражением

$$\begin{gathered} 2T = a_{11}(P_1^2 + P_2^2) + a_{33}P_3^2 + b_{11}(R_1^2 + R_2^2) + b_{33}R_3^2 + \\ + 2c_{11}(P_1R_1 + P_2R_2) + 2c_{33}P_3R_3, \\ c_{11} = c + a_{11}\nu,\quad c_{33} = c + a_{33}\mu + c',\quad b_{11} = b + a_{11}\nu^2 \end{gathered} \tag{5.2}$$

Такой вид имеет кинетическая энергия тела, форма и распределение массы в котором не меняются при повороте тела вокруг оси x_3 на угол $\pi/2$. Примером такого тела может служить корабельный винт с четырьмя лопастями.

При условиях (5.1) уравнения (1.2) допускают первый интеграл $P_3 = \text{const}$. Представим выражение (5.2) с учетом (3.15) и интегралов (1.3) в виде

$$\begin{gathered} 2T = a_{11}[(P_1 + \nu R_1)^2 + (P_2 + \nu R_2)^2] + a_{33}P_3^2 + 2(c' + a_{33}\mu)P_3R_3 + \\ + (b_{33} - b)R_3^2 - 2ck_3R_3 + (b + 2ch)H^2 = \text{const} \end{gathered} \tag{5.3}$$

Найдем значения переменных $L_i = P_i + \nu R_i$ $(i = 1, 2)$, для которых T имеет стационарное значение при условии, что P_3 рассматривается как параметр. Из (5.3) получаем уравнения

$$\frac{\partial T}{\partial L_i} = a_{ii}L_i = 0\ (i = 1, 2),\quad \frac{\partial T}{\partial R_3} = (c' + a_{33}\mu)P_3 + (b_{33} - b)R_3 - ck_3 = 0 \tag{5.4}$$

Для решения (3.19) имеем

$$L_1 = P_1 + \nu R_1 = 0,\quad L_2 = P_2 + \nu R_2 = 0,\quad P_3 + \mu R_3 = 0$$

Подставляя в (5.4) $P_3 = -\mu R_3$, находим из этих уравнений

$$L_1 = P_1 + \nu R_1 = 0,\ L_2 = P_2 + \nu R_2 = 0,\ R_3 = ck_3(b_{33} - b - a_{33}\mu^2 - c'\mu)^{-1} \tag{5.5}$$

Эти выражения для L_1, L_2, R_3 совпадают с соответствующими выражениями, получаемыми из (3.19). Отсюда следует, что для решения (3.19) интеграл $T = \text{const}$ имеет стационарное значение, если его рассматривать как функцию переменных L_1, L_2, R_3, считая P_3 параметром.

Требование положительной определенности второй вариации

$$\delta^2 T = a_{11}[(\delta L_1)^2 + (\delta L_2)^2] + (b_{33} - b)(\delta R_3)^2$$

приводит к неравенству $b_{33} > b$, которое в силу теоремы Рауса является достаточным условием устойчивости ПВ движений (3.19) по отношению к величинам L_1, L_2, P_3, R_3, для которых имеют место соотношения (5.1).

Отметим, что для случая уравновешенного гиростата $c_{ij} = b_{ij} = 0$ $(i, j = 1, 2, 3)$, а потому с учетом (3.15) имеем $b = -a_{11}\nu^2 < 0$, и условие $b_{33} > b$ выполняется.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стеклов В. А.* О движении твердого тела в жидкости. Харьков: 1893. 234 с.
2. *Харламов П. В.* О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью.— ПМТФ, 1963, № 4, с. 17—29.
3. *Диментберг Ф. М.* Теория винтов и ее приложения. М.: Наука, 1978. 327с.
4. *Добронравов В. В.* Основы механики неголономных систем. М.: Выс. школа, 1970. 270 с.

Москва

Поступила в редакцию 15.VII.1983