Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 5, 1984

УДК 531.36

ПРИМЕНЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ К НЕКОТОРЫМ СТОХАСТИЧЕСКИМ ЗАДАЧАМ ДИНАМИКИ ВИБРОУДАРНЫХ СИСТЕМ

Ковалева А. С.

Движение некоторых виброударных систем при случайном возмущении, отличном от белого шума, исследуется при помощи предельных теорем о сходимости решений стохастических дифференциальных уравнений к диффузионному процессу. Эти результаты, первоначально полученные для гладких систем [1, 2], обобщены на системы с разрывными и импульсными правыми частями [3—5] путем аппроксимации разрывных функций сходящейся последовательностью гладких функций. Излагается аналогичный подход для виброударных систем. Строятся области устойчивости возмущенного движения.

Известны аналитические выражения плотности вероятности и дисперсий координаты и скорости для линейных систем, возбуждаемых белым шумом, при упругом ударе [6, 7]. Для более сложных систем при помощи метода негладких преобразований [8] построены уравнения ФПК, характеризующие распределение энергии колебаний [9, 10]. Основные результаты также получены для систем, возбуждаемых белым шумом.

1. Рассмотрим квазиконсервативную виброударную систему. Уравнение движения и условие удара об односторонний ограничитель имеют вид

$$x^{\cdot\cdot} + \Omega^2 x = \varepsilon g(t, x, x^{\cdot}, \varepsilon) \tag{1.1}$$

$$x = \Delta,\ x_+^{\cdot} = -Rx_-^{\cdot},\ R = 1 - \varepsilon^2 r,\ r = \text{const} = O(1) \tag{1.2}$$

Здесь Δ — величина зазора $(\Delta > 0)$ или натяга $(\Delta < 0)$, $x_-^{\cdot}$ и $x_+^{\cdot}$ — значения скорости до и после удара, ε — малый параметр. Кусочно-непрерывная функция g характеризует дополнительные неконсервативные члены и при фиксированных x, $x^{\cdot}$ представляет собой измеримый случайный процесс.

При $\varepsilon = 0$ порождающая консервативная система имеет общий интеграл [7]

$$x(t) = -J(\omega)\,\chi(\psi, \omega),\quad \omega = 2\pi/T \tag{1.3}$$

$$\chi(\psi, \omega) = T^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\Omega^2 - k^2\omega^2)^{-1} e^{ik\psi}, \qquad \psi = \omega(J)(t - t_0)$$

Здесь $\chi(\psi, \omega)$ — периодическая функция Грина [11], T — период между соударениями, J — ударный импульс, t_0 — фаза удара. Функция $\chi(\psi, \omega)$ непрерывна, а первая ее производная терпит разрыв при $\psi = 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \ldots$. Связь между частотой движения и импульсом дается условием удара

$$\begin{aligned} &\Delta \neq 0:\ x(t_0) = \Delta,\ J(\omega) = \Delta/\chi(0, \omega) = -2\Omega\,\mathrm{tg}\,(\pi\Omega/\omega) \\ &\Delta = 0:\ \omega = 2\Omega \end{aligned} \tag{1.4}$$

Считая возмущения малыми, а удар — близким к упругому, можем предположить, что в квазиконсервативной виброударной системе характер движения сохраняется и режим близок к одноударному T-периодическому. Тогда для исследования возмущенного движения можно использовать методы анализа систем, близких к консервативным.

Приведем систему (1.1) к стандартной форме при помощи процедуры, предложенной в [12]. Вводя новые переменные импульс — фаза

(1.5) $$x = -J\chi(\psi, \omega),\quad x^{\cdot} = -J\omega\chi_{\psi}(\psi, \omega)$$

после преобразований получим уравнения, аналогичные приведенным в [12]

(1.6) $$J^{\cdot} = -4\varepsilon g(t, -J\chi, -J\omega\chi_{\psi}, \varepsilon)\,\omega\chi_{\psi}$$
$$\psi^{\cdot} = \omega(J)\,[1 + 4\varepsilon J^{-1} g(t, -J\chi, -J\omega\chi_{\psi}, \varepsilon)\,(J\chi)_J]$$

Связь $\omega(J)$ дается условием (1.4); производная $(J\chi)_J$ вычисляется с учетом зависимости χ от $\omega(J)$. Правые части уравнений (1.6) периодичны по ψ с периодом 2π. После подстановки (1.5) в (1.4) условия удара преобразуются в условия разрыва импульса: в момент удара, при $\psi = 2\pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, $J_+ = RJ_-$, т. е. при $R = 1 - \varepsilon^2 r$

(1.7) $$J_+ - J_- = -\varepsilon^2 r J_-,\quad \psi = 2\pi k$$

Условие разрыва (1.7) можно внести в первое из уравнений (1.5) при помощи δ-функции [13]. Учитывая зависимость $\psi(t)$, получим с точностью до членов $O(\varepsilon^2)$

(1.8) $$J^{\cdot} = -4\varepsilon g\omega\chi_{\psi} - \varepsilon^2 r \sum_{(k)} \omega(J_k)\, J_k \delta(\psi - 2\pi k)$$
$$\psi^{\cdot} = \omega(J)\,[1 + 4\varepsilon J^{-1} g\,(J\chi)_J]$$
$$g = g(t, -J\chi, -J\omega\chi_{\psi}, \varepsilon),\quad J_k = J_-\,|_{\psi = 2\pi k}$$

Неизохронность системы, т. е. зависимость частоты ω от импульса J обычно осложняет вычислительную процедуру. В дальнейшем будем считать зазор малым, $\Delta = \varepsilon^2\Delta_1$, что, не нарушая качественных представлений о характере решения, существенно упрощает вычисления, так как порождающая система становится изохронной, $\omega = \omega_0 = 2\Omega$.

Введем замену

(1.9) $$x = x_1 + \varepsilon^2\Delta_1;$$
$$x_1 = -J\chi^{\circ}(t - \varphi),\quad x_1^{\cdot} = -J\chi_t^{\circ}(t - \varphi)$$

где $\chi^{\circ}(t) = \chi(2\Omega t, 2\Omega)$ и при $0 \leqslant t \leqslant \pi/\Omega$ [11]

(1.10) $$\chi^{\circ}(t) = (2\Omega)^{-1} \sin \Omega t,\quad \chi_t^{\circ} = {}^1/_2 \cos \Omega t$$

Заменой (1.9) исходное уравнение приводится к стандартной форме

(1.11) $$J^{\cdot} = -4\varepsilon\,[g - \varepsilon\Delta_1\Omega^2]\,\chi_t^{\circ}(t - \varphi) - \varepsilon^2 r \sum_{(k)} J_k \delta(t - \varphi - kT),\quad T = \pi/\Omega$$
$$\varphi^{\cdot} = -4\varepsilon J^{-1}\,[g - \varepsilon\Delta_1\Omega^2]\,\chi^{\circ}(t - \varphi)$$

Правые части уравнений (1.11) периодичны по t с периодом $T = \pi/\Omega$. Для анализа полученных уравнений можно воспользоваться результатами работ [3—5].

2. Пусть система изохронна и $g = g_1(t, x, x^{\cdot}) + \varepsilon g_2(t, x, x^{\cdot})$, так что

(2.1) $$J^{\cdot} = -\varepsilon^2 r \sum_{(k)} J_k \delta(t - \varphi - kT) + \varepsilon G_{11}(t, J, \varphi) + \varepsilon^2 G_{21}(t, J, \varphi)$$
$$\varphi^{\cdot} = \varepsilon G_{12}(t, J, \varphi) + \varepsilon^2 G_{22}(t, J, \varphi)$$

(2.2) $$G_{j1} = -4g_j(t, -J\chi^{\circ}(t - \varphi), -J\chi_t^{\circ}(t - \varphi))\,\chi_t^{\circ}(t - \varphi)$$
$$G_{j2} = -4J^{-1} g_j(t, -J\chi^{\circ}(t - \varphi), -J\chi_t^{\circ}(t - \varphi))\,\chi^{\circ}(t - \varphi)$$
$$j = 1, 2$$

Пусть функции g_1, g_2 непрерывны вместе со своими производными по x, $x^{\cdot}$ и при фиксированных x, $x^{\cdot}$ представляют собой измеримые случайные процессы, удовлетворяющие условию сильного перемешивания [1], причем $Mg_1 = 0$.

Обозначим $z = (J, \varphi)$ и введем в рассмотрение моментные характеристики

$$B_j(t, s, z) = M \sum_{r=1}^{2} \frac{\partial G_{1j}(t, z)}{\partial z_r} G_{1r}(s, z) \tag{2.3}$$

$$a_{ij}(t, s, z) = MG_{1i}(t, z) G_{1j}(s, z), \quad A = \{a_{ij}\}, \quad i, j = 1, 2$$

Пусть выполнены перечисленные условия относительно функций g_1, g_2 и равномерно по z, t_0 существуют пределы

$$\lim_{\theta\to\infty} \frac{1}{\theta} \int_{t_0}^{\theta+t_0} MG_{2j}(t, z)\, dt = \bar{G}_{2j}(z) \tag{2.4}$$

$$\lim_{\theta\to\infty} \frac{1}{\theta} \int_{t_0}^{\theta+t_0} dt \int_{t_0-\theta}^{t} B_j(t, s, z) = \bar{B}_j(z), \qquad j = 1, 2$$

$$\lim_{\theta\to\infty} \frac{1}{\theta} \int_{t_0}^{\theta+t_0} dt \int_{t_0}^{\theta+t_0} A(t, s, z) = \bar{A}(z)$$

Тогда [1—5] решение системы (2.1) слабо сходится к решению системы уравнений Ито

$$\begin{aligned} dJ^\circ &= [\bar{G}_{21}(J^\circ, \varphi^\circ) + \bar{B}_1(J^\circ, \varphi^\circ) - rT^{-1}J^\circ]\, d\tau + \\ &+ \sigma_{11}(J^\circ, \varphi^\circ)\, dw_1 + \sigma_{12}(J^\circ, \varphi^\circ)\, dw_2 \\ d\varphi^\circ &= [\bar{G}_{22}(J^\circ, \varphi^\circ) + \bar{B}_2(J^\circ, \varphi^\circ)]\, d\tau + \sigma_{21}(J^\circ, \varphi^\circ)\, dw_1 + \\ &+ \sigma_{22}(J^\circ, \varphi^\circ)\, dw_2 \\ \sigma\sigma' &= \bar{A}, \qquad \tau = \varepsilon^2 t, \qquad 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

где $w = \{w_1, w_2\}$ — двумерный стандартный винеровский процесс.

Если $g_j(t, x, x^\cdot) = g_j(x, x^\cdot)\, \xi_j(t)$, где $\xi_j(t)$ — стационарные случайные процессы с достаточно быстро убывающими корреляционными функциями, то можно убедиться, что $\bar{B} = \bar{B}(J)$, $\bar{A} = \bar{A}(J)$, т. е. коэффициенты уравнений (2.5) не зависят от φ и первое из уравнений (2.5) отделяется.

3. Соотношения (2.1)—(2.5) имеют общий характер. Применим их для решения некоторых задач динамики виброударных систем.

1°. Рассмотрим систему с параметрическим возмущением, линейную в промежутках между ударами. Ее движение описывается уравнением

$$x^{\cdot\cdot} + \Omega^2 (1 + \varepsilon\xi(t))\, x + 2\varepsilon^2 b x^\cdot = 0 \tag{3.1}$$

и условиями удара (1.2). Будем считать зазор малым, $\Delta = \varepsilon^2 \Delta_1$. Тогда заменой (1.9) уравнение (3.1) приводится к виду (1.11).

В большинстве задач важно знать поведение среднеквадратичного значения переменной J. Вводя новую переменную $y = J^2$, преобразуем систему (1.11) к виду

$$\begin{aligned} y^\cdot &= -8\varepsilon y \Omega^2 \xi(t) \chi^\circ(t - \varphi)\, \chi_t^\circ(t - \varphi) - 8\varepsilon^2 \Big\{[2by\chi_t^\circ(t - \varphi) - \\ &- \Omega^2 \Delta_1 y^{1/2}]\, \chi_t^\circ(t - \varphi) + \frac{r}{4} \sum_{(k)} y_k \delta(t - \varphi - kT)\Big\} \\ \varphi^\cdot &= -4\varepsilon\Omega^2 \xi(t) [\chi^\circ(t - \varphi)]^2 - 4\varepsilon^2 [2b\chi_t^\circ(t - \varphi) - \\ &- \Omega^2 \Delta_1 y^{-1/2}]\, \chi^\circ(t - \varphi) \end{aligned} \tag{3.2}$$

В соответствии с (2.1) обозначим

$$\begin{aligned} G_{11} &= -8y\Omega^2 \xi(t)\, \zeta_1(t - \varphi) \\ G_{12} &= -4\Omega^2 \xi(t)\, \zeta_2(t - \varphi) \\ G_{21} &= -8\, [2by\zeta_3(t - \varphi) - \Omega^2 \Delta_1 y^{1/2} \chi_t^\circ(t - \varphi)] \\ G_{22} &= -4\, [2b\zeta_1(t - \varphi) - \Omega^2 \Delta_1 y^{-1/2} \chi^\circ(t - \varphi)] \\ \zeta_1(t) &= \chi^\circ(t)\, \chi_t^\circ(t), \quad \zeta_2(t) = [\chi^\circ(t)]^2, \quad \zeta_3(t) = [\chi_t^\circ(t)]^2 \end{aligned} \tag{3.3}$$

В силу (1.10) функции ζ_j $(j = 1, 2, 3)$ непрерывны и

$$\zeta_1(t) = (8\Omega)^{-1}\sin 2\Omega t, \quad \zeta_2(t) = (8\Omega^2)^{-1}(1 - \cos 2\Omega t)$$
$$\zeta_3(t) = {}^1/_8(1 + \cos 2\Omega t), \quad 0 \leqslant t < \infty$$

Пусть $\xi(t)$ — стационарный случайный процесс с достаточно быстро убывающей корреляционной функцией и спектральной плотностью $S(\lambda)$. Тогда, вычисляя коэффициенты уравнений (2.5) по формулам (2.4), получим

$$\overline{G}_{21} = -2by^\circ, \quad \overline{B}_1 = {}^1/_2\Omega^2 S(2\Omega)\, y^\circ$$
$$a_{11} = {}^1/_2\Omega^2 (y^\circ)^2 S(2\Omega), \quad a_{12} = 0$$

Следовательно, процессу y° соответствует линейное уравнение Ито

$$dy^\circ = \beta y^\circ d\tau + a_{11}{}^{1/2} dw \tag{3.4}$$
$$\beta = {}^1/_2\Omega^2 S(2\Omega) - 2(b + r\pi^{-1}\Omega)$$

Из (3.4) сразу следует условие устойчивости в среднеквадратичном: $\beta < 0$. Более слабое условие устойчивости по вероятности получено в [9] для систем, возмущаемых белым шумом.

Заметим, что при $r = 0$ получим известное условие устойчивости системы без ограничителя [1, 2]; если $\xi(t) = 0$ и $b = -b_1 < 0$, то получим условия гашения неустойчивых колебаний при неупругом ударе

$$r < \pi\Omega^{-1} \mid b \mid \tag{3.5}$$

совпадающее с установленным в [9].

2°. Движение виброударной системы, возбуждаемой случайной силой, описывается уравнением

$$x^{\cdot\cdot} + 2\varepsilon^2 b x^\cdot + \Omega^2 x = \varepsilon\xi(t) \tag{3.6}$$

и условиями удара (1.2); $\xi(t)$ — стационарный случайный процесс с достаточно быстро убывающей корреляционной функцией и спектральной плотностью $S(\lambda)$. Считая зазор малым, $\Delta = \varepsilon^2\Delta_1$ и положив в (1.9) $J = y^{1/2}$, приведем (3.6) к виду

$$y^\cdot = -2\varepsilon^2 r \sum_{(k)} y_k \delta(t - \varphi - kT) + \varepsilon G_{11} + \varepsilon^2 G_{21}$$
$$\varphi^\cdot = \varepsilon G_{12} + \varepsilon^2 G_{22}$$
$$G_{11} = -8y^{1/2}\xi(t)\,\chi_t{}^\circ(t - \varphi), \quad G_{12} = -4y^{-1/2}{}^2\xi(t)\,\chi^\circ(t - \varphi)$$

функции G_{21}, G_{22} совпадают с вычисленными в п. 1°.

Диффузионное уравнение для предельного процесса y° имеет вид

$$dy^\circ = (\overline{G}_{21} + \overline{B}_1 - 2r\pi^{-1}\Omega y^\circ)\, d\tau + \sigma_{11}(y^\circ)\, dw$$

Здесь по-прежнему $\overline{G}_{21} = -2by^\circ$, а величины $\overline{B}_1$, σ_{11}, вычисленные по (2.4), имеют вид

$$\overline{B}_1 = \frac{64}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4k^2}{(4k^2-1)^2} S(k\omega), \quad \sigma_{11}{}^2 = a_{11} = \overline{B}_1 y_0 \tag{3.7}$$

Если $S(\lambda)$ — дробно-рациональная функция, причем время корреляции процесса $\xi(t)$ значительно меньше $T = \pi\Omega^{-1}$, то, суммируя ряд (3.7) [11] и учитывая, что $\omega = 2\Omega$, получим

$$\overline{B}_1 \approx 4S(\Omega)$$

Для момента $m = M(y^\circ)^2$ получим линейное уравнение, имеющее стационарное решение

$$\overline{m} = 2S(\Omega)\,[b + r\pi^{-1}\Omega]^{-1}$$

Как видим, рассеяние энергии при ударе ($r \neq 0$) уменьшает интенсивность колебаний при широкополосном случайном воздействии и при выполнении условия (3.5) способствует гашению неустойчивых колебаний в системе без ограничителя.

Замечания. 1°. Изложенная процедура остается справедливой и для систем с дополнительными степенями свободы, динамику которых можно описать уравнениями

$$x^{\cdot\cdot} + \Omega^2 x = \varepsilon g(t, \tau, x, x^{\cdot}, \varepsilon)$$

$$y^{\cdot} = \varepsilon Y(t, \tau, x, x^{\cdot}, \varepsilon), \quad y \in R_n, \ \tau = \varepsilon^2 t$$

и условием удара $x = \Delta$, $x_+^{\cdot} = -Rx_-^{\cdot}$, $R = 1 - \varepsilon^2 r$. Здесь функция Y удовлетворяет всем требованиям, перечисленным в п. 2.

2°. Случай двустороннего ограничителя рассматривается аналогично; в выражении общего интеграла консервативной системы (1.3) и в замене (1.5) функция χ заменяется периодической функцией Грина второго рода [11]

$$\chi_{2T} = T^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [-(2k-1)^2 \omega^2 + \Omega^2]^{-1} e^{(2k-1)i\psi}$$

Автор благодарит В. Ф. Журавлева за критические замечания и обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хасьминский Р. З.* Предельная теорема для решений дифференциальных уравнений со случайной правой частью.— Теория вероятностей и ее применение, 1966, т. 11, № 3, с. 444—462.
2. *Стратонович Р. Л.* Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961. 558 с.
3. *Kushner H. J.* Diffusion approximation to output processes of nonlinear systems with wide-band inputs and applications.— IEEE Trans. Inform. Theory. 1980, v. 26, No. 6, p. 715—725.
4. *Kushner H. J., Ju T. Y. W.* Diffusion approximations for nonlinear phase locked loop-type systems with wide band inputs.— J. Math. Anal. Appl., 1982, v. 86, No. 2, p. 518—541.
5. *Kushner H. J.* Jump-diffusion approximations for ordinary differential equations with wide-band random right hand sides.— SIAM J. Control and Optimiz., 1979, v. 17, No. 6, p. 729—744.
6. *Бабицкий В. И., Коловский М. З.* Колебания линейной системы с ограничителями при случайных нагрузках.— Инж. ж. МТТ, 1967, № 3, с. 147—151.
7. *Бабицкий В. И.* Теория виброударных систем. М.: Наука, 1978. 352 с.
8. *Журавлев В. Ф.* Метод анализа виброударных систем при помощи специальных функций.— Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 2, с. 30—34.
9. *Диментберг М. Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980. 368 с.
10. *Диментберг М. Ф., Меняйлов А. И.* Случайные колебания одномассовой виброударной системы.— Докл. АН СССР, 1978, т. 238, № 2, с. 285—288.
11. *Розенвассер Е. Н.* Колебания нелинейных систем. М.: Наука, 1969. 576 с.
12. *Бабицкий В. И., Ковалева А. С., Крупенин В. Л.* Исследование квазиконсервативных виброударных систем методом усреднения.— Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 1, с. 41—49.
13. *Кеч В., Теодореску П.* Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.: Мир, 1978. 518 с.

Москва

Поступила в редакцию 23.VI.1983