Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 5, 1984

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ В СИСТЕМАХ С НЕУДЕРЖИВАЮЩИМИ СВЯЗЯМИ

Иванов А. П.

Показана возможность распространения на системы с идеальными неудерживающими связями некоторых известных утверждений об устойчивости положения равновесия и периодических решений гамильтоновых систем. В качестве примера рассмотрена задача об устойчивости равновесий и периодических подскакиваний над прямой плоского диска, движущегося в вертикальной плоскости.

1. Рассмотрим механическую систему M с лагранжевыми координатами $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$, стесненную $\nu \leqslant n$ неудерживающими связями $f_k(\mathbf{q}) \geqslant 0$ $(k = 1, \ldots, n)$. Движение такой системы в промежутках между ударами о связи происходит в соответствии с общими принципами механики [1].

Ввиду этого получили развитие методы исследования, основанные на изучении общих свойств движения по поведению системы на конечном интервале времени (см., например, [2]). При этом, однако, затрудняется получение выводов о таких качественных свойствах движения, как его устойчивость. Был предложен [3] метод получения уравнений движения системы с неудерживающей связью для произвольного интервала времени. Показано [4], что такие уравнения можно записать в канонической форме. Перечисленные исследования позволяют распространить на системы с неудерживающими связями некоторые известные результаты и методы теории устойчивости, что и составляет содержание данной работы.

Будем предполагать, что коэффициенты восстановления при ударах о связи равны единице, а функция Лагранжа L системы M имеет вид

$$L = T + U,\ T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{q})\, \dot q_i \dot q_j, \quad U = U(\mathbf{q}), \quad f_\alpha = q_\alpha \geqslant 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, \nu) \tag{1.1}$$

где U, a_{ij} аналитичны в некоторой области D координатного пространства R^n.

Пусть точка $A = \mathbf{q}^\circ \in D$ является положением равновесия системы M. Неудерживающие связи разобьем на следующие три группы: 1) связи $q_1, \ldots, q_{\nu_1}$ в точке A напряжены — $q_\alpha = 0$, и их реакции отличны от нуля, 2) связи $q_{\nu_1+1}, \ldots, q_{\nu_1+\nu_2}$ напряжены, но их реакции равны нулю и 3) связи $q_{\nu_1+\nu_2+1}, \ldots, q_n$ в точке A ослаблены. Примером трех типов связей может служить равновесие на горизонтальной плоскости тяжелого однородного шара, который касается одной вертикальной плоскости, но отдален от другой.

В соответствии с принципом виртуальных перемещений для систем с неудерживающими связями [1] в положении равновесия выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial q_i}\, \delta q_i \leqslant 0 \tag{1.2}$$

Учитывая, что величина δq_i неотрицательна для $i = 1, \ldots, \nu_1 + \nu_2$ и может принимать произвольные значения для $i = \nu_1 + \nu_2 + 1, \ldots$ $\ldots, n$, а величина $\partial U/\partial q_i$ пропорциональна реакции связи [1], получим, что $\partial U/\partial q_i < 0$ при $i = 1, \ldots, \nu_1$ и $\partial U/\partial q_1 = 0$ при $i = \nu_1 + 1, \ldots, n$. Следующая теорема является непосредственным обобщением на системы с неудерживающими связями теоремы Лагранжа — Дирихле.

Теорема 1. Если в точке $A = \mathbf{q}^\circ = (0, \ldots, 0, \overset{\circ}{q}_{\nu_1+\nu_2+1}, \ldots, q_n^\circ)$ функция $U(\mathbf{q}^*)$, где $\mathbf{q}^* = (0, \ldots, 0, |q_{\nu_1+1}|, \ldots, |q_{\nu_1+\nu_2}|, q_{\nu_1+\nu_2+1}, \ldots$ $\ldots, q_n)$, имеет строгий максимум, то это положение равновесия устойчиво по Ляпунову.

Доказательство. При сделанных предположениях о характере связей система допускает интеграл энергии $E = T - U$. Покажем, что он является положительно-определенным. Для этого достаточно убедиться, что при выполнении условия теоремы функция $U(\mathbf{q})$ имеет в точке A строгий максимум в области $q_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, \nu)$. Последнее утверждение следует из того, что величина

$$U(\mathbf{q}) - U(\mathbf{q}^\circ) = U(\mathbf{q}^*) - U(\mathbf{q}^\circ) + \sum_{i=1}^{\nu_1} q_i \left.\frac{\partial U}{\partial q_i}\right|_{\mathbf{q}^*+\mu(\mathbf{q}-\mathbf{q}^*)}, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant 1$$

при $\mathbf{q} \neq \mathbf{q}^\circ$ отрицательна. Таким образом, функция E удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об устойчивости [5], и теорема доказана.

Установим необходимые условия устойчивости в случае, когда $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 0$. Для этого наряду с системой M рассмотрим вспомогательную систему M_1 с $n - 1$ степенью свободы и функцией Лагранжа $L_1 = L(0, q_2, \ldots, q_n, 0, q_2^{\boldsymbol\cdot}, \ldots, q_n^{\boldsymbol\cdot})$.

Теорема 2. Если положение равновесия $A_1 = (q_2^\circ, \ldots, q_n^\circ)$ системы M_1 неустойчиво, то неустойчиво и положение равновесия $A = (0, q_2^\circ, \ldots$ $\ldots, q_n^\circ)$ системы M.

Доказательство. Сделаем в системе M замену переменных по формулам (1.2)

$$\mathbf{q} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{Q}), \quad \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n), \quad \mathbf{Q} = (Q_1, \ldots, Q_n)$$

где $\varphi_1 = Q_1$, а функции φ_j представляют собой решение задачи Коши

$$(1.3) \qquad \sum_{i=2}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{\varphi}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial Q_1} = -a_{1j}(\boldsymbol{\varphi}), \quad \varphi_j|_{Q_1=0} = Q_j \quad (j = 2, \ldots, n)$$

Записанная в новых переменных функция Лагранжа (1.1) не содержит произведений $Q_1^{\boldsymbol\cdot} Q_k^{\boldsymbol\cdot}$ $(k = 2, \ldots, n)$ [4]. Уравнения движения принимают вид

$$(1.4) \qquad a_{11} q_1^{\boldsymbol{\cdot\cdot}} + a_{11}^{\boldsymbol\cdot} q_1^{\boldsymbol\cdot} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = F_1, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_k^{\boldsymbol\cdot}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (k = 2, \ldots, n)$$

где $F_1 = 0$ при $q_1 \neq 0$, а при $q_1 = q_1^{\boldsymbol\cdot} = 0$ функция F_1 определяется так, чтобы обратить обобщенное ускорение $q_1^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}$ в возможное [1]; как можно убедиться, $F_1 = \max\{0, -\partial L/\partial q_1\}$. Вторая группа уравнений (1.4) не содержит величины $q_1^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}$. ∎

Поскольку $\partial U/\partial q_1|_A < 0$, то найдется такая окрестность V точки фазового пространства $(A, \mathbf{0})$, в которой $\partial L/\partial q_1 < 0$. В области V первое из уравнений (1.4) можно удовлетворить полагая $q_1 \equiv 0$. Тогда вторая группа этих уравнений представляет собой уравнения движения системы M_1 и траектории системы M_1 в области V одновременно являются и траекториями системы M, для которых $q_1 = 0$, откуда и следует утверждение теоремы.

Следствие. Представим в окрестности точки $A = \mathbf{q}^\circ$ функцию $U(\mathbf{q})$ в виде ряда

$$(1.5)\qquad U = Rq_1 + U_m + U_{m+1} + \ldots, \quad m \geqslant 2$$

где U_m — однородный полином степени m от $(\mathbf{q} - \mathbf{q}^\circ)$, $R = \partial U/\partial q_1|_A < 0$. Если при $q_1 = 0$ функция определена отрицательно (может принимать положительные значения), то положение равновесия A устойчиво по Ляпунову (неустойчиво).

Утверждение о неустойчивости здесь основывается на результатах работы [6].

2. Исследуем теперь устойчивость периодических движений системы (1.1), состоящих из участков, на которых связи $q_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, \nu)$ ослаблены, и ударов о связь $q_1 \geqslant 0$. Движения такого рода рассматриваются в теории виброударных систем [2]. Основная техническая трудность при исследовании таких систем состоит в том, что вследствие ударных взаимодействий обобщенные скорости являются разрывными функциями времени и при обычном определении [5] возмущенное движение описывается уравнениями, правые части которых представляют собой разрывные функции возмущений (см. [3]). Возможность регуляризации уравнений возмущенного движения при введении в (1.1) канонического формализма показана в [4]. Ниже приводится общая процедура получения для решений указанного типа гамильтониана возмущенного движения в виде аналитической функции возмущений.

Используя замену (1.2), выберем обобщенные координаты так, чтобы в (1.1) $a_{1k} \equiv 0$ $(k = 2, \ldots, n)$, и определим движение системы M с помощью вспомогательной системы M^*, свободной от связи $q_1 \geqslant 0$ и имеющей функцию Лагранжа $L^*(\mathbf{q}, \mathbf{q}^*) = L(|q_1|, q_2, \ldots, q_n, \mathbf{q}^\cdot)$. Для траекторий $\mathbf{q}(t)$ и $\mathbf{q}^*(t)$ систем M и M^* выполняются соотношения [4]:

$$q_1(t) = |q_1^*(t)|, \quad q_i(t) = q_i^*(t) \quad (i = 2, \ldots, n)$$

что позволяет установить эквивалентность систем M и M^* с точки зрения устойчивости их частных решений.

Полагая

$$p_k = \frac{\partial L^*}{\partial q_k^\cdot}, \quad H = \sum_{k=1}^{n} q_k^\cdot p_k - L^*$$

запишем уравнения движения системы M^* в канонической форме

$$(2.1)\qquad \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \quad \frac{\partial H}{\partial q_1}\Big|_{q_1=0} = \min\left\{0, \frac{\partial H}{\partial q_1}\Big|_{q_1=+0}\right\}$$

Поскольку функция Гамильтона H не зависит от времени явно, она является интегралом движения, имеющим смысл полной механической энергии E. Допустим, что для значений E из некоторого интервала, содержащего точку E_0, система (2.1) допускает частные решения вида

$$(2.2)\qquad q_1 = \overset{\circ}{q}_1(t, E), \quad p_1 = \overset{\circ}{p}_1(t, E), \quad q_k = \overset{\circ}{q}_k, \quad p_k = \overset{\circ}{p}_k \quad (k = 2, \ldots, n)$$

где функции $\overset{\circ}{q}_1$, $\overset{\circ}{p}_1$ — решения системы

$$(2.3)\qquad q_1^\cdot = \frac{\partial H^\circ}{\partial p_1}, \quad p_1^\cdot = -\frac{\partial H^\circ}{\partial q_1}, \quad H^\circ = H(q_1, q_2^\circ, \ldots, q_n^\circ, p_1, p_2^\circ, \ldots, p_n^\circ)$$

имеющие по t период $\tau(E)$. Обозначим через $t_1(E) \leqslant t_2(E) \leqslant \ldots$ $\ldots \leqslant t_k(E) = t_1(E) + \tau(E)$ нули функции $q_1^\circ(t, E)$ за период. Будем предполагать, что выполнены соотношения

$$(2.4) \qquad \frac{t_i(E) - t_1(E)}{t_i(E_0) - t_1(E_0)} = \frac{T(E)}{T(E_0)} \quad (i = 2, \ldots, k)$$

Перейдем в системе (2.3) к переменным «действие — угол» по формулам

$$(2.5) \qquad q_1 = Q(w, I) = q_1^\circ\left(\frac{w}{2\pi}\tau(s), s\right), \quad p_1 = P(w, I) = p_1^\circ\left(\frac{w}{2\pi}\tau(s), s\right)$$

где q_1°, p_1° определены в (2.2), а $s = s(I)$ — решение дифференциального уравнения

$$\frac{ds}{dI} = \frac{2\pi}{\tau(s)}, \quad s(I_0) = E_0$$

Замена (2.5) — каноническая, 2π-периодическая по w.

Решение (2.2) при $E = E_0$ примет вид

$$(2.6) \qquad I = I_0, \quad w = w_0 + \frac{2\pi}{\tau(E_0)} t, \quad q_k = q_k^\circ, \quad p_k = p_k^\circ \quad (k = 2, \ldots, n)$$

Поставим вопрос об устойчивости решения (2.6) по отношению к возмущениям переменных q_k, p_k $(k = 2, \ldots, n)$ и переменной действия I.

В силу (2.4) расположение нулей функции $Q(w, I)$, определенной в (2.5), не зависит от I, поэтому справедливо соотношение

$$(2.7) \qquad Q(w, I) = Q(w, I_0) \cdot F(w, I), \quad F(w, I) > 0$$

поэтому величина $|q_0|$, входящая в выражение функции Гамильтона H, оказывается в силу замены (2.5) аналитической функцией I при $I = I_0$. Наличие в исследуемом движении ударных взаимодействий приводит лишь к отсутствию гладкости по переменной w. Это обстоятельство, однако, не препятствует применению для решения поставленного вопроса об устойчивости известных алгоритмов аналитической теории возмущений (см. [7, 8]).

3. В качестве примера рассмотрим движение тяжелого плоского диска в верхней половине некоторой вертикальной плоскости. Пусть OXY и $O'X'Y'$ — системы координат: в плоскости движения и связанная с диском; ось OX совпадает с прямой, ограничивающей движение диска, OY вертикальна, точка O' совпадает с прямой центром тяжести диска. Выпуклая кривая, являющаяся границей диска, может быть задана аналитической функцией $f(\alpha)$, значение которой представляет собой расстояние от точки O' до касательной к этой кривой, образующей с осью $O'X'$ угол α.

За лагранжевы координаты примем $q_1 = y - f(\alpha)$, $q_2 = \alpha$, где x, y — координаты точки O' в системе OXY, α — угол между OX и $O'X'$. Функция Лагранжа имеет вид

$$(3.1) \qquad L = T + U, \; T = \frac{m}{2}\{[q_1^{\cdot} + f'(q_2) q_2^{\cdot}]^2 + q_3^{\cdot 2}\} + \\ + \frac{F}{2} q_2^{\cdot 2}, \; U = -mg[q_1 + f(q_2)]$$

где m и J — масса диска и его момент инерции относительно точки O', g — ускорение свободного падения.

Заметим, что переменная q_3 — циклическая, а в уравнениях Лагранжа эта переменная отделяется от q_1, q_2. Следовательно, координата $q_3 = x$ изменяется как линейная функция времени, что является следствием равенства нулю горизонтальных составляющих силы тяжести и ударных сил. В дальнейшем будем изучать лишь поведение переменных q_1, q_2.

Положениями равновесия системы в пространстве координат q_1, q_2 являются точки $q_1 = 0$, $q_2 = a$, если $f'(a) = 0$. Если диск не является кругом с центром тяжести в геометрическом центре, то в силу сделанного предположения об аналитичности $f(\alpha)$ эти положения изолированы.

Согласно доказанным в п. 1 предложениям, для устойчивости этих положений равновесия необходимо и достаточно, чтобы точка a была минимумом функции $f(\alpha)$.

Положения равновесия являются порождающими точками для семейств периодических движений, представляющих собой подскакивания с неизменным значением коодинаты q_2, равном a. Для исследования устойчивости таких решений применим процедуру, описанную в п. 2.

Поскольку в функции Лагранжа (3.1) коэффициент при $q_1^{\bullet}$, $q_2^{\bullet}$ отличен от нуля, для получения канонической формы уравнений движения необходимо провести редуцирующую замену переменных (1.2), которая имеет здесь вид $q_1 = Q_1$, $q_2 = \varphi(Q_1, Q_2)$, где функция φ — решение задачи Коши

(3.2) $$\frac{\partial\varphi}{\partial Q_1} = -G(\varphi), \quad \varphi|_{Q_1=0} = Q_2, \quad G = \frac{mf'}{J + mf'^2}$$

В новых переменных лагранжиан (3.1) имеет вид

$$L = \frac{mD(\varphi)}{2} Q_1^{\bullet 2} + \frac{J\bar{\varphi}^2}{2D(\varphi)} Q_2^{\bullet 2} - [Q_1 + f(\varphi)]mg, \quad Q_1 \geqslant 0$$

$$D = \frac{J}{J + mf'^2}, \quad \bar{\varphi} = \frac{\partial\varphi}{\partial Q_2}$$

Уравнения движения вспомогательной системы M^* имеют каноническую форму (2.1) с функцией Гамильтона вида

(3.3) $$H = \frac{1}{2mD(\psi)} P_1^2 + \frac{D(\psi)}{2J\bar{\psi}^2} P_2^2 + [|Q_1| + f(\psi)]mg,$$

$$\psi = \varphi(|Q_1|, Q_2), \quad \bar{\psi} = \frac{\partial\psi}{\partial Q_2}$$

Упомянутым выше периодическим движениям диска соответствуют частные решения системы (2.1), (3.3) вида

(3.4) $$\bar{Q}_1 = \frac{t}{2}\left[2\left(\frac{2E}{m}\right)^{1/2} - g|t|\right], \quad \bar{Q}_2 = a, \quad \bar{P}_1 = (2Em)^{1/2} - |t|mg,$$
$$\bar{P}_2 = 0$$
$$-\frac{\tau}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\tau}{2}, \quad \tau = \frac{4}{g}\left(\frac{2E}{m}\right)^{1/2}$$

где τ — период рассматриваемого движения (т. е. промежуток времени между k-м и $(k+2)$-м соударениями, $k = 1, 2, \ldots$), E — постоянная энергии. Формулы (2.5) перехода к переменным «действие — угол» принимают вид

(3.5) $$Q_1 = \frac{2}{gm^2}\left(\frac{3gm^2}{2\pi^2} I\right)^{2/3} w(\pi - |w|), \quad P_1 = 2\left(\frac{3gm^2}{2\pi^2} I\right)^{1/3}\left(\frac{\pi}{2} - |w|\right)$$
$$-\pi \leqslant w \leqslant \pi$$

Замена 2π-периодична по w.

Решения (3.4) запишутся так:

$$I = I_0, \quad w = w_0 + \frac{mg}{2}\left(\frac{3gm^2}{2\pi^2} I_0\right)^{-1/3} t, \quad Q_2 = a, \quad P_2 = 0$$

Возмущенное движение запишем в переменных ξ, η, r, которые определим следующим образом

(3.6) $$\xi = Q_2 - a, \quad \eta = P_2, \quad r = I - I_0$$

и представим гамильтониан (3.3) и функцию ψ в виде степенных рядов

(3.7) $$H = H_2 + \ldots + H_m + \ldots$$

$$H_2 = h_{002}r + H_2^\circ, \quad H_2^\circ = h_{200}\xi^2 + h_{020}\eta^2$$

$$H_m = \sum_{\nu+\mu+\rho=m} h_{\nu,\mu,\rho}(w)\,\xi^\nu\eta^\mu r^{\rho/2}, \quad h(w+2\pi) = h(w)$$

$$h_{200} = \frac{mf''(a)\psi_1^2}{2}\left[g + \frac{f''(a)}{J}\bar{P}_1^2\right], \quad h_{020} = \frac{1}{2J\psi_1^2}$$

$$h_{002} = \frac{\pi g}{2}\left(\frac{m}{2E_0}\right)^{1/2}, \quad E_0 = \frac{\pi^2}{2m}\left[\frac{3m^2g}{2\pi^2}I_0\right]^{2/3}$$

(3.8) $$\psi = a + \psi_1(Q_1^\circ)\,\xi + \psi_2(Q_1^\circ)\,\xi^2 + \ldots$$

Функции ψ_k в разложении (3.8) можно определить раскладывая $G(\psi)$ в ряд по степеням $(\psi - a)$ и подставляя (3.8) в уравнение (3.2). Последовательно получаем

(3.9) $$\psi_1 = \exp\left(-\frac{f''(a)m}{J}|Q_1^\circ|\right), \quad \psi_2 = \frac{f'''(a)}{2f''(a)}(\psi_1^2 - \psi_1)$$

и т. д., где Q_1° определяется формулой (3.5) при $I = I_0$, при этом $Q_1^\circ = \bar{Q}_1$.

Согласно общему методу приведения к нормальной форме [9], рассмотрим сначала линейную систему с гамильтонианом H_2° и независимой переменной w. Для построения фундаментальной матрицы решений $X(t)$ можно воспользоваться следующими несложными рассуждениями.

В промежутках между ударами величина $q_2 = \alpha$ изменяется по известному закону (линейному, так как момент силы тяжести относительно точки O' равен нулю). Переменные q_2 и ξ связаны соотношением $q_2 = a + \psi_1(Q_1^\circ)\,\xi + O(\xi^2, r)$. Отсюда можно найти решение для ξ, η в промежутке между ударами. Поскольку переменная $\eta = P_2$ при ударе остается непрерывной, [10], то это решение продолжается по непрерывности и на процесс удара и необходимость в применении метода припасовывания отпадает.

В результате вычислений для $X(w)$ на промежутке $[0, \pi]$ получаем выражение

(3.10) $$X(w) = |x_{ij}| \; (i, j = 1, 2), \quad x_{11} = (1 + \varkappa_0\bar{w})/\psi_1$$

$$x_{12} = \bar{w}/(J\psi_1), \quad x_{21} = J\psi_1[\varkappa_0 - \varkappa(1 + \varkappa_0\bar{w})], \quad x_{22} = \psi_1(1 - \varkappa\bar{w})$$

$$\bar{w} = \frac{2}{\pi g}\left(\frac{2E_0}{m}\right)^{1/2} w, \quad \varkappa = \varkappa(w) = -\frac{f''(a)}{J}P_1^\circ(w), \quad \varkappa_0 = \varkappa(0)$$

где P_1° определяется формулой (3.5) при $I = I_0$, а ψ_1 — формулой (3.9).

Замечая, что коэффициенты функции H_2° являются π-периодическими функциями w, запишем характеристическое уравнение в виде

$$\det\|X(\pi) - \rho E_2\| = \rho^2 - (2 - 8k)\rho + 1 = 0, \quad \text{где } k = \frac{m}{J}hf''(a)$$

а h — высота подскока в периодическом движении. Решая это уравнение, получим необходимое условие устойчивости

(3.11) $$0 < k < 1/2$$

и найдем мультипликаторы $\rho_{1,2} = \exp(\pm\pi i\lambda)$.

Отметим, что величина $f''(a)$ представляет собой разность между радиусом кривизны в точке диска с $q_2 = a$ и расстоянием от этой точки до точки O'. В частности, если диск представляет собой неоднородный круг радиуса R, у которого расстояние между геометрическим центром и центром тяжести равно ε, то условие (3.11) означает, что в периодическом движении центр тяжести ниже геометрического центра и $mJ^{-1}h\varepsilon < 1/2$.

В случае однородного диска, имеющего форму эллипса с полуосями $a_1 > a_2$, условие (3.11) означает, что соударения происходят по оси a_2 и $h < a_2 (a_1^2 + a_2^2)/[8 (a_1^2 - a_2^2)]$.

Исследование устойчивости в нелинейной постановке проведем на основании анализа форм H_3, H_4 в разложении (3.7).

При $k = {}^3/_8$ характеристический показатель λ связан с частотой периодического движения $\omega = 2$ резонансным соотношением третьего порядка $3\lambda = \omega$. Проведенные расчеты показывают, что если при этом $f'''(a) \neq 0$, то исследуемое периодическое движение неустойчиво.

Для остальных значений k из интервала $(0, {}^1/_2)$ решение вопроса об устойчивости зависит от параметров

$$\varkappa_1 = \left(\frac{J}{m}\right)^{1/2} \frac{f'''(a)}{[f''(a)]^2}, \quad \varkappa_2 = \frac{J}{m} \frac{f^{\mathrm{IV}}(a)}{[f''(a)]^3}$$

при $k = {}^1/_4$ (нет резонанса четвертого порядка $4\lambda = \omega$) в общем случае невырожденности нормальной формы имеет место устойчивость рассматриваемых движений.

В частности, вычисления, проделанные для неоднородного круглого диска и однородного эллипса ($\varkappa_1 = 0$), показывают, что в этих случаях решения (3.4) устойчивы при всех значениях k из интервала $(0, {}^1/_2)$.

4. Обратимся теперь к более общему случаю, когда функция Лагранжа имеет вид

$$L' = T' + U', \quad T' = T_2 + T_1 + T_0, \quad U' = U'(\mathbf{q}), \quad q_i \geqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, \nu) \tag{4.1}$$

где коэффициенты форм T_i $(i = 0, 1, 2)$ не зависят от времени.

Поскольку система (4.1) допускает интеграл энергии $E = T_2 - T_0 - U'$, то для устойчивости ее положения равновесия достаточно выполнения условий теоремы 1 для функции $U = T_0 + U'$. Также справедливой остается и теорема 2. Следствие из этой теоремы в приведенной выше форме оказывается, вообще говоря, неверным, так как приведенная система M_1 при указанных условиях может оказаться устойчивой за счет гироскопических сил, порождаемых T_1.

Для вывода уравнений движения системы (4.1) при $\nu = 1$ воспользуемся тем фактом, что эта система динамически эквивалентна системе M вида (1.1) с $n = k + 1$ и может быть получена из нее посредством игнорирования циклической переменной q_n [11]. Сделаем в системе M редуцирующую замену по формулам (1.2), в которых φ_i не зависят от Q_n $(i = 2, \ldots, n-1)$. Так как коэффициенты a_{ij} не зависят от q_n, то такое решение задачи Коши (1.3) существует, причем $q_n = \varphi_n = Q_n + F(Q_1, \ldots, Q_{n-1})$. Подставляя в (1.1) вместо $\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\boldsymbol{\cdot}}$ функции $\varphi, \varphi^{\boldsymbol{\cdot}}$, получим выражение функции Лагранжа в новых переменных, в котором исчезли произведения $Q_1^{\boldsymbol{\cdot}} Q_i^{\boldsymbol{\cdot}}$ $(i = 2, \ldots, n)$, а переменная Q_n — циклическая. Переходя, как в п. 2, к вспомогательной системе M^* посредством замены в лагранжиане $Q_1 \to |Q_1|$ и исключая затем циклическую переменную Q_n, можно окончательно получить уравнения движения системы (4.1) в форме (2.1).

Автор благодарит А. П. Маркеева за внимание к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Суслов Г. К.* Теоретическая механика. М.— Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.
2. *Кобринский А. А., Кобринский А. Е.* Двумерные виброударные системы: Динамика и устойчивость. М.: Наука, 1981. 335 с.
3. *Журавлев В. Ф.* Уравнения движения механических систем с идеальными односторонними связями.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 5, с. 781—788.
4. *Иванов А. П., Маркеев А. П.* О динамике систем с односторонними связями.— ПММ, 1984, т. 48, вып. 4, с. 632—636.
5. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.— Л.: Гостехиздат, 1950. 472 с.
6. *Козлов В. В., Паламодов В. П.* Об асимптотических решениях уравнений классической механики.— Докл. АН СССР, 1982, т. 263, № 2, с. 285—289.
7. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 167 с.
8. *Маркеев А. П.* К задаче об устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем.— ПММ, 1970, т. 34, вып. 6, с. 997—1004.
9. *Брюно А. Д.* Неустойчивость в системе Гамильтона и распределение астероидов.— Матем. сб., 1970, т. 83, № 2, с. 273—312.
10. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1960. 487 с.
11. *Журавлев В. Ф.* О некоторых свойствах гироскопических систем в связи с концепцией потенциала Герца в механике.— Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 2, с. 15—19.

Москва

Поступила в редакцию 15.VII.1983