Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 5, 1984

УДК 531.36

ПРИМЕНЕНИЕ ВТОРОГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА ДЛЯ ОЦЕНОК ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ И ПРИТЯЖЕНИЯ

Веретенников В. Г., Зайцев В. В.

Дается определение области устойчивости расширением свойств определения Ляпунова на множества с немалой мерой. Получены конструктивные теоремы об оценках областей устойчивости и притяжения при помощи некоторого развития второго метода Ляпунова для широкого класса автономных и неавтономных систем, как удовлетворяющих условиям Липшица, так и разрывных. Обычные требования к функциям, при помощи которых исследуются области устойчивости, частично ослабляются. Так, например, не требуется знакоопределенности функций и их производных.

1. Рассмотрим уравнения возмущенного движения вида

$$(1.1) - (1.4) \quad x^{\cdot} = f(x, t), \quad x \in R^n$$

Под системой (1.1) подразумеваем автономную систему с правой частью, равной $f(x)$, для которой вектор-функция $f(x)$ такова, что решение задачи Коши в рассматриваемой области существует, единственно, непрерывно по начальным условиям, исключая сколь угодно малую окрестность особых точек. Для системы (1.2) $f = f(x) \in C(R^n)$, и в силу теоремы Пеано интегральные кривые могут быть продолжены до границы любого компактного множества, возможно, неединственным образом. В системах (1.3) однозначная вектор-функция $f = f(x)$ кусочно-непрерывна. При этом среди систем (1.3) с разрывными однозначными правыми частями рассматриваются лишь такие системы, для которых каждую интегральную кривую можно однозначно продолжить в окрестности любой поверхности разрыва и число таких поверхностей конечно. В системах (1.4) вектор-функция $f = f(x, t)$ такова, что для решений сохраняются свойства решений системы (1.1), оговоренные выше.

Основные используемые обозначения и понятия соответствуют введенным в работе [1]. Кроме того, будем обозначать через D^+V правую верхнюю производную Дини [2, 3]; F — связное подмножество полуоси $[t_0, \infty)$, такое, что $F = [t_0, T] \vee [t_0, \infty)$ $(T = \mathrm{const})$ (при изучении свойств притяжения $F = [t_0, \infty)$), $F_d{}^V = \{x \mid V(x) = d\}$; $H^V_{c(t)} = \{x | x = y(t, t_0, x_0) \wedge \wedge x_0 \in H^V_{c(t_0)} = H_{c_0}{}^V = \{x \mid V(x) \leqslant c_0\}\}$, $c_0 = \mathrm{const}$; $y(t, t_0, x_0)$ — интегральная кривая рассматриваемой системы при начальных условиях x_0, t_0.

Остановимся на анализе оценок областей устойчивости и притяжения, получаемых при помощи функций Ляпунова.

Предположим, что для функции Ляпунова $V \in C^1$ выполнены условия

$$(1.5) \qquad (\exists c)\ (\forall x \in H_c{}^V)\ V^{\cdot}(x) \leqslant 0$$

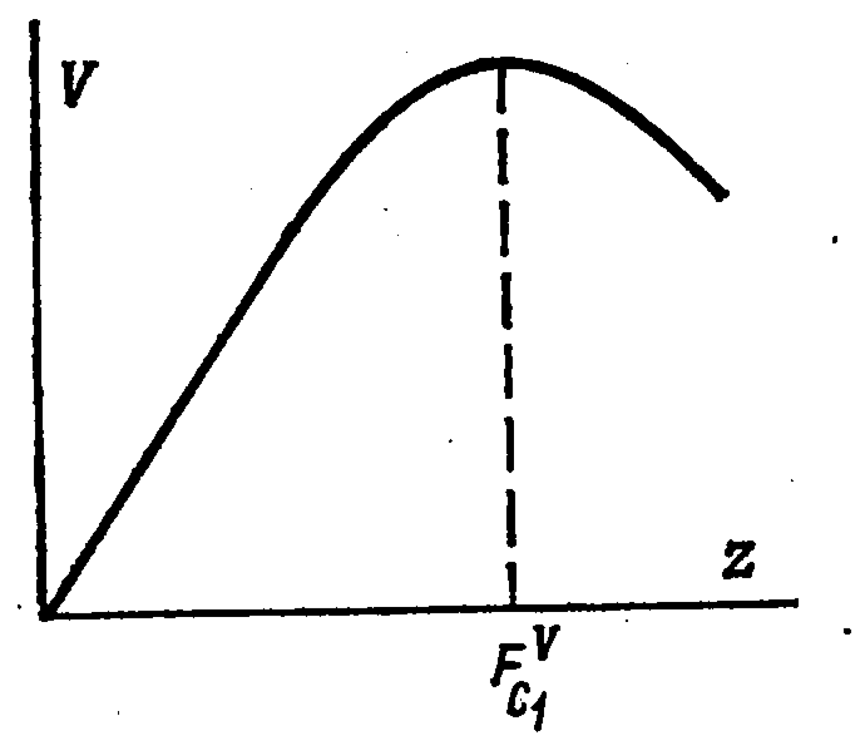
$$(1.6) \qquad (\forall x \in R^n \setminus \theta)\ V(x) > 0, \quad V(\theta) = 0$$

Наиболее удобно оценивать область устойчивости как множество $H_c{}^V$. Однако при выполнении условий (1.5), (1.6) в тех случаях, когда справедлива теорема Ляпунова об устойчивости, следует лишь, что существует некоторая область устойчивости, не обязательно совпадающая с $H_c{}^V$.

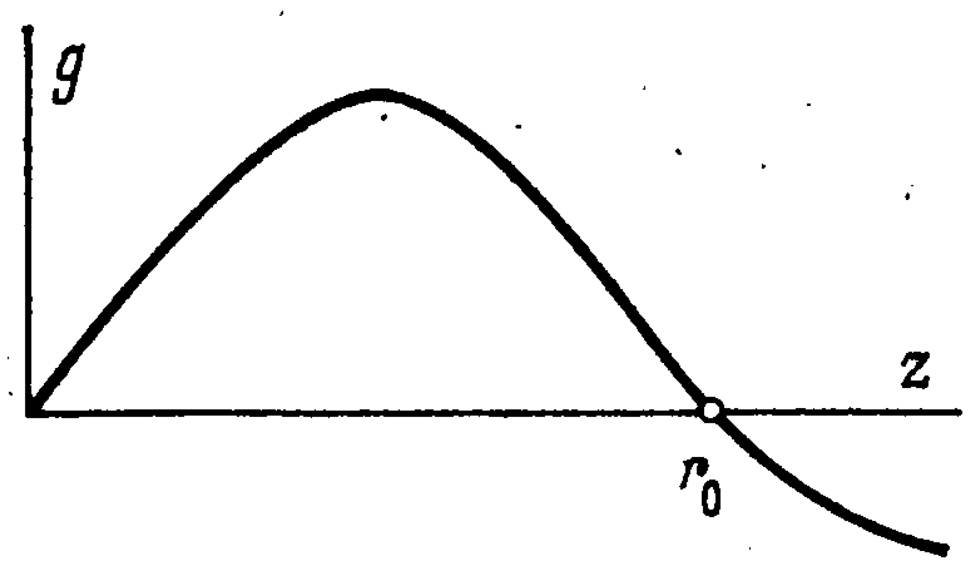
Например, может существовать система вида (1.1), имеющая на некоторой поверхности $F_{c_1}{}^V$ особые точки. Для такой системы можно построить функцию Ляпунова V, для которой множество $F_{c_1}{}^V$ — поверхность уровня. Поведение такой функции V аналогично изображенному на фиг. 1, где $z = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. В этом случае $(\forall x \in F_{c_1}{}^V)$ $V^{\cdot}(x) = 0$ и система (1.1) может быть такой, что $(\forall x \in R^n \setminus \theta \setminus F_{c_1}{}^V)$ $V^{\cdot}(x) < 0$. Например, в случае $n = 2$ для системы

$$x^{\cdot} = -g(z)\,x,\ y^{\cdot} = -g(z)\,y,\ \ z = x^2 + y^2$$

с функцией $g = g(z)$, качественное поведение которой характеризуется графиком, изображенным на фиг. 2 (одной из возможных является функция $g = -z^2 + zr_0$), при функции Ляпунова $V = e^{-az}(1 - e^{-az})$, где $a = \ln 2/r_0$, $r_0 = \arg_z[V(z) = c_1]$, область $H_{c_1}{}^V$ $(c > c_1)$ не является областью устойчивости. Подобная ситуация имеет место и в случае, когда поверхность $F_{c_1}{}^V$ — предельный цикл системы (1.1).



Фиг. 1



Фиг. 2

Для систем вида (1.2), несмотря на выполнение для функции Ляпунова $V(x)$ условия

$$(\exists c > 0)\ (\forall x \in H_c{}^V \setminus \theta)\ V^{\cdot}(x) < 0$$

множество $H_c{}^V$ может не быть не только областью притяжения, но и областью устойчивости [4]. При этом мера mes_{R^n} множества, где правая часть системы $f(x) \notin C^\infty$, равна нулю.

Аналогично для систем вида (1.3) при выполнении условия

$$(1.7)\qquad (\forall x \in H_c{}^V \setminus \theta)\ D^+V(x) < 0$$

множество $H_c{}^V$ не обязательно является областью устойчивости.

Как показано в работах [5, 6], для систем вида (1.4) множество $H_c{}^V$ при выполнении условия (1.7) также не обязательно является областью притяжения.

Для оценки области устойчивости и притяжения введем специальные функции Ляпунова.

Определение 1. Будем называть функцией типа Ляпунова функцию $V(x)$, удовлетворяющую на множестве $G \in K$ условиям (2.2), 1°—4°, 6°—8° работы [1], а также приведенному выше условию (1.6).

Определение 2. Будем называть строгой функцией типа Ляпунова функцию, являющуюся функцией типа Ляпунова на любом подмножестве $G_1 \in K$ из области определения $V(x)$.

Будем также рассматривать функции типа Ляпунова (и строгие функции типа Ляпунова) на более широком классе множеств. Если функция типа Ляпунова $V(x)$ определена на каждом из множеств G_i $(i = 1, 2, \ldots)$ $G_i \in K$, таком, что $\lim G_i = G$ при $i \to \infty$, то $V(x)$ на G будет задаваться как функция, получаемая непрерывным продолжением на последовательности $\{G_i\}$.

Функция $V(x)$, изображенная на фиг. 3, не будет строгой функцией типа Ляпунова, так как она не является функцией типа Ляпунова на множестве G_1.

Условие (1.6) для функций типа Ляпунова $V(x)$ не обязательно. Достаточно требовать, чтобы в точке θ функция $V(x)$ имела абсолютный минимум.

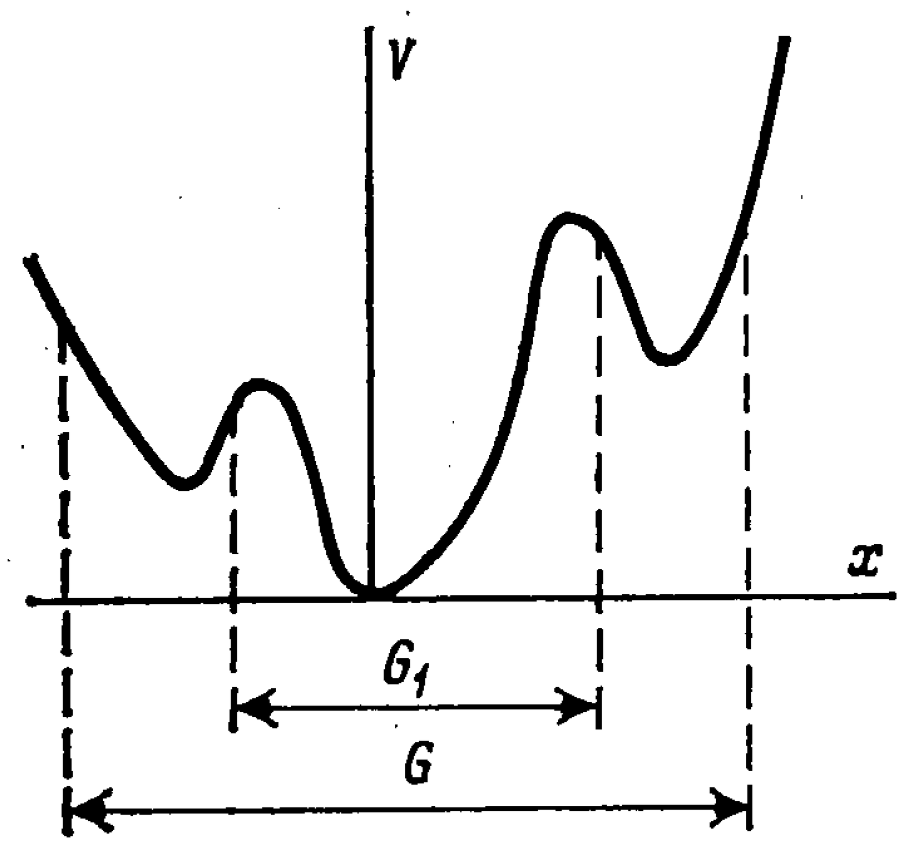
Условие (1.6) для строгих функций типа Ляпунова можно заменить на требование, чтобы

$$\theta = \arg \min_{x \in D_V} V(x) = \arg \operatorname{loc} \min_{x \in D_V} V(x) = \arg \operatorname{abs} \operatorname{loc} \min_{x \in D_V} V(x)$$

(т. е. θ — точка единственного локального минимума, совпадающего с глобальным), D_V — область определения функции V.

Отметим, что согласно теории выпуклых функций [7], свойства (2.2), 4°, 8°, работы [1] для строгих функций типа Ляпунова выполнены, если функция строго выпукла или строго квазивыпукла.

Из определения 1 следует, что функции типа Ляпунова могут задаваться поверхностями уровня и произвольной строго монотонной функцией $R^{+1} \to R^{+1}$, определяемой на произвольной кривой, пересекающей поверхности уровня лишь в одной точке.



Фиг. 3

Поверхности уровня функций типа Ляпунова являются границами областей и для различных значений $V(x)$ удовлетворяют следующим свойствам (свойствам П): не пересекаются, не касаются одна другой, стягиваются в θ, имеют меру (mes_{R^n}), равную нулю, заполняют все рассматриваемое множество.

Любая функция Ляпунова в некоторой, хотя, может быть, и малой, окрестности θ является функцией типа Ляпунова. Однако для всей области определения последнее совсем не обязательно, хотя среди функций Ляпунова можно выделить класс функций, являющихся функциями типа Ляпунова, [например определенно-положительные квадратичные формы, являющиеся строгими функциями типа Ляпунова.

Функции Ляпунова, удовлетворяющие теореме Красовского — Барбашина, об устойчивости в целом, также будут функциями типа Ляпунова (не обязательно строгими).

При исследовании устойчивости в целом свойство бесконечно большого предела для функций типа Ляпунова не обязательно.

Многие применяемые в теории устойчивости функции Ляпунова [3—6, 8—21] не являются функциями типа Ляпунова во всей области определения. Например, функции Ляпунова, содержащие члены вида

$$e^{\varphi(x)}, \sum_{i,j} a_{ij} (\cos mx)^i (\sin px)^j \, (m, p, a_{ij} = \mathrm{const})$$

где $\varphi(x)$ не является функцией типа Ляпунова, а также функции Ляпунова с различными комбинациями интегралов от нелинейностей, совсем не обязательно будут функциями типа Ляпунова.

В работе [1] функции типа Ляпунова применялись для исследования устойчивости компактных множеств. Если же множество не ограничено, то поверхности уровня функций типа Ляпунова, согласно алгоритму построения, определенному леммой работы [1], не замкнуты. В этом смысле функции типа Ляпунова могут не быть функциями Ляпунова, обладающими замкнутыми поверхностями уровня.

Далее будем рассматривать только строгие функции типа Ляпунова, для простоты употребляя термин функции типа Ляпунова.

Лемма 1. Пусть существует функция типа Ляпунова $V(x) \in C^1$. Тогда для интегральных кривых системы (1.1) справедливы следующие утверждения:

из условия

$$(\forall c, c_1 : c > c_1 > 0)\ (\forall x \in H_c^V \setminus H_{c_1}^V)\ V^{\cdot}(x) < 0$$

следует

$$(\forall x_0 \in H_c^V \setminus H_{c_1}^V) \Rightarrow \lim_{t \to \infty} x(t, t_0, x_0) \in H_{c_1}^V$$

из условия

$$(\forall c, c_1 : c > c_1 > 0)\ (\forall x \in H_c^V \setminus \operatorname{int} H_{c_1}^V)\ V^{\cdot}(x) < 0$$

следует

$$(\forall x_0 \in H_c^V \setminus H_{c_1}^V) \Rightarrow (\exists T : t_0 \leqslant T < \infty)(\forall t \geqslant T)\, x(t, t_0, x_0) \in \in \operatorname{int} H_{c_1}^V$$

из условия

$$(\forall c, c_1 : c > c_1 > 0)\ (\forall x \in H_c{}^V \setminus H_{c_1}{}^V)\ V^{\cdot}(x) \leqslant 0$$

следует

$$(\forall c_0 : c_1 \leqslant c_0 \leqslant c)(\forall x_0 \in H_{c_0}^V) \Rightarrow (\forall t \in F)\, x(t, t_0, x_0) \in \operatorname{int}_1 H_{c_0}^V$$

Доказательство леммы очевидно.

Выполнение свойств, вытекающих из леммы 1, как правило, требуется при решении различных прикладных задач.

Отметим также, что при использовании функций типа Ляпунова единым подходом исследуются задачи устойчивости в малом, с конечными областями устойчивости, в целом и на множествах [1].

Введем теперь определение области устойчивости. Из определения устойчивости по Ляпунову следует, что для устойчивых решений выполняется свойство

$$(\exists \varepsilon_0)(\forall \varepsilon < \varepsilon_0)(\exists \delta > 0)(\forall x(t_0) \in \operatorname{int} S_\delta) \Rightarrow \Rightarrow (\forall t \in F)\, x(t, t_0, x_0) \in \operatorname{int}_1 S_\varepsilon$$

Для решений систем (1.1), (1.4) при любом $\varepsilon > 0$ существует $\delta_{\max}$, обладающее таким свойством при фиксированном ε. Выберем достаточно малое $\varepsilon < \varepsilon_0$ и рассмотрим взаимно-однозначное соответствие: $S_\varepsilon \leftrightarrow S_{\delta_{\max}}$. Будем непрерывно увеличивать ε. Соответствующее $\delta_{\max}$ также непрерывно увеличивается, если в рассматриваемой области система устойчива. Граница области устойчивости определяется нарушением взаимно-однозначного соответствия $S_\varepsilon(t) \leftrightarrow S_{\delta_{\max}}(t)$.

При выполнении этого соответствия в области устойчивости по классификации В. В. Немыцкого существуют особые точки типа центров, обобщенных центров и центрофокусов [19].

Из нарушения соответствия в окрестности ϑ некоторой поверхности следует неодносвязность множества ω-предельных точек для точек из ϑ. Неодносвязность множества ω-предельных точек для точек множества $G \in K$ не означает, что G не является областью устойчивости.

Определение 3. Назовем множество поверхностей $\{\Omega\} = Q$ покрывающим множество $G \in K$, если множество Q удовлетворяет свойствам П на G.

Определение 4. Назовем областью устойчивости множество $D_0(t)$: $: (\forall t \in F)\ [D_0(t) \in D_1 \wedge D_0(t),\ D_1 \in K]$ и будем называть систему устойчивой на D_0, если существует множество поверхностей $Q(t)$, покрывающих $D_0(t)$, такое, что интегральные кривые для $\forall t \in F$ не выходят из $D_0(t)$, а также

$$(\forall t \in F)(\forall \beta \in Q(t))(\exists \psi \in Q(t))\, \operatorname{int}_1 \psi \subset \operatorname{int}_1 \beta$$

$$(\forall x_0 \in \operatorname{int} \psi) \Rightarrow (\forall \tau \geqslant t)\, x(\tau, t, x_0) \in \operatorname{int}_1 \beta \wedge$$

$$\wedge \{(\forall \beta_1, \beta_2 \in Q(t))\, \operatorname{int}_1 \beta_1 \subset \operatorname{int}_1 \beta_2 \wedge \operatorname{int}_1 \beta_1 \not\supset \operatorname{int}_1 \beta_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists \psi_1, \psi_2 \in Q(t))(\forall \psi_3 \in Q(t))\, \operatorname{int}_1 \psi_1 \subset \operatorname{int}_1 \psi_3 \subset \operatorname{int}_1 \psi_2 \wedge$$

$$\wedge \operatorname{int}_1 \psi_2 \not\subset \operatorname{int}_1 \psi_3 (\exists x_0 \in \operatorname{int} \psi_3)(\exists \tau > t)\, x(\tau, t, x_0) \notin \operatorname{int}_1 \beta_1$$

Отметим, что в определении 4 вместо S_ε, S_δ используется более общая форма множеств — поверхности β, ψ, не зависящие от времени; множество Q зависит от времени, так как граница области может зависеть от времени; множество D_1 не зависит от времени.

Отметим, что если у системы существует область устойчивости, то решение $x = \theta$ устойчиво по Ляпунову.

Определение 5. Будем называть D_0 областью притяжения, если D_0 — область устойчивости и система обладает свойством притяжения на D_0.

Лемма 2. Системы (1.1) — (1.4) устойчивы на множестве D_0 тогда и только тогда, когда выполняется соответствие $\beta \leftrightarrow \psi_{\max}$ на всем множестве D_0. (Здесь β и $\psi_{\max}$ — соответствующие поверхности в определении 4.)

Доказательство необходимости. Пусть система устойчива на D_0. Тогда $(\forall\beta \in Q)(\exists\psi)$, такое, что $(\forall\beta_1\colon \operatorname{int}_1\beta_1 \subset \operatorname{int}_1\beta \wedge \beta_1 \neq \beta)$ — соответствующая поверхность $\psi_1 \subset \operatorname{int}_1\psi$. Интегральные кривые, начинающиеся в $\operatorname{int}\psi_1$, не достигают β. С другой стороны

$$(\forall\beta_2 \in Q\colon \operatorname{int}_1\beta_2 \supset \operatorname{int}_1\beta \wedge \beta_2 \neq \beta)(\exists\psi_2)$$

такое, что существуют интегральные кривые, начинающиеся в ψ_2 и в некоторый момент времени не принадлежащие множеству $\operatorname{int}_1\beta$. Таким образом, имеет место соответствие $\beta \leftrightarrow \psi_{\max}$.

Доказательство достаточности очевидно.

2. Рассмотрим ряд теорем об оценках областей устойчивости и притяжения.

Теорема 1. а) Пусть существует функция типа Ляпунова $V(x)$, такая, что для решений систем (1.1) — (1.4) выполнено условие (1.5) ($V(x) \in C^1$) или условие

(2.1) $$(\forall x \in H_c^V)\, D^+ V(x) \leqslant 0$$

Тогда H_c^V — область устойчивости.

б) Пусть существует функция типа Ляпунова $V(x)$, такая, что для решений систем (1.1), (1.2) выполнено условие (1.7) или при $V(x) \in C^1$ условие

(2.2) $$(\forall x \in H_c^V \setminus \theta)\, V^{\cdot}(x) < 0$$

Тогда H_c^V — область притяжения.

Если для систем (1.3) выполнено условие (1.7) и в некоторой окрестности $\vartheta(S)$ любой поверхности разрыва справедливо неравенство

$$(\forall x \in \vartheta(S))\, D^+V(x) < -\beta < 0 \quad (\beta = \text{const})$$

то H_c^V — область притяжения.

Доказательство. В силу свойств функций типа Ляпунова из условия (2.1) следует, что интегральные кривые не могут пересекать поверхностей уровня $V(x)$ изнутри наружу. Отсюда следует, что множество H_c^V — область устойчивости.

Для доказательства свойства притяжения выберем произвольную точку $x_0 \in H_c^V$ и рассмотрим функцию $V(x(t, t_0, x_0)) = \Phi(t)$. В силу условия (1.7) функция $\Phi(t)$ $(t \geqslant t_0)$ убывающая. По теореме о производной монотонной функции [3] будем иметь

(2.3) $$\Phi(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi^{\cdot}(\tau)\, d\tau + \eta(t)$$

где функция $\Phi^{\cdot}$ определена почти всюду, $\eta(t)$ — убывающая функция.

Для любой последовательности $\{t_j\}$, где каждое t_j берется из области определения $\Phi^{\cdot}$ такой, что $\lim_{j\to\infty} t_j = \infty$, выполнено условие

(2.4) $$\underline{\lim}_{j\to\infty} D^+\Phi(t_j) = 0$$

Действительно, предположим противное, т. е.

$$\underline{\lim}_{j\to\infty} D^+\Phi(t_j) = -\alpha < 0 \quad (\alpha = \text{const})$$

Тогда существует подпоследовательность $\{t_{j_i}\}$: $\lim_{j_i \to \infty} t_{j_i} = \infty$, для которой $D^+\Phi(t_{j_i}) < -\alpha + \varepsilon < 0$ ($\varepsilon = \text{const}$) для достаточно большого номера j_i. Тогда и функция $\Phi^\cdot$ такова, что $\Phi^\cdot(t_{j_i}) < -\alpha + \varepsilon < 0$. При этом неравенство

$\Phi^\cdot(t_{j_i}) < -\alpha + \varepsilon + \varepsilon_1 < 0$ ($\varepsilon_1 = \text{const}$) справедливо почти всюду в некоторой окрестности точки t_{j_i}. Так как поведение функции на множестве нулевой меры не влияет на интеграл Лебега, то первое слагаемое в правой части (2.3) неограниченно убывает с возрастанием t. Поэтому существует конечное время T: $T > t_0$, $\Phi(T) < 0$. Но этого быть не может. Следовательно, для любой последовательности $\{t_j\}$, выбираемой вне некоторого множества меры нуль (мера Лебега), справедливо условие (2.4).

Условие (2.4) означает, что $x(t_j, t_0, x_0) \to \theta$ для решений систем (1.1), (1.2), так как $D^+V(x) = 0$ только в точке $x = \theta$.

Для решений систем (1.3) приведенное доказательство также справедливо в силу того, что по условию теоремы на каждой из поверхностей разрыва отсутствуют ω-предельные точки.

Теорема 1 не справедлива для систем вида (1.2) — (1.4) для оценок областей устойчивости, если вместо функций типа Ляпунова взять функции Ляпунова, для которых не выполняются определения 1, 2.

Теорема 2. Пусть существует функция типа Ляпунова $V(x) \in C^1$, такая, что для решений систем (1.1), (1.2) выполнены условия (1.5) и для некоторой функции типа Ляпунова $W(x) \in C^1$ на множестве $M = \{x \mid V^\cdot(x) = 0\}$ выполнено условие $W^\cdot(x) \neq 0$ $(\forall x \in M)$.

Тогда H_c^V — область притяжения.

Доказательство. Пусть существует ω-предельное множество $\lambda^+(H_c^V)$ для точек из H_c^V. Можно показать, что в силу условий (1.5) $\lambda^+(H_c^V)$ может быть только подмножеством из M. Доказательство того, что множество M не содержит ω-предельных точек, может быть проведено аналогично доказательству свойств притяжения в теореме 1.

Теорема 2 обобщает на системы (1.2) теорему Красовского — Барбашина [5, 8] в форме, использованной в [3] при изучении свойств слабого притяжения.

Теорема 3. Пусть существуют функции типа Ляпунова $V(x) \in C^1$ и $V_1(x)$, такие, что для решений системы (1.4) выполнено условие

$$(\forall x \in H_c^V \setminus \theta) \quad 0 > -V_1(x) \geqslant \sup_{t \in F} V^\cdot(x) \tag{2.5}$$

Тогда H_c^V — область притяжения.

Доказательство. Согласно теореме 1, рассматриваемая система устойчива. Выберем произвольное $x_0 \in H_c^V$. В силу свойств решений системы (1.4) $V(x(t, t_0, x_0)) \in C_t(F)$.

Предположим противное. Пусть интегральная кривая $x(t, t_0, x_0)$ не достигает некоторой поверхности уровня $F_{c_1}^V$ $(0 < c_1 \leqslant V(x_0) \leqslant c)$. Тогда

$$V(x(t, t_0, x_0)) - V(x_0) = \int_{t_0}^{t} V^\cdot(\tau, t_0, x_0)\, d\tau \tag{2.6}$$

Обозначим $\max\limits_{x \in H_{c_1}^V} V_1(x) = a$ $(a > 0)$; из (2.6) получим

$$V(x(t, t_0, x_0)) \leqslant -a(t - t_0) + V(x_0)$$

где первое слагаемое в правой части неограниченно убывает при возрастании t. Поэтому для произвольного значения $c_1 : c > c_1 > 0$ существует конечное время T, при котором все интегральные кривые, начинающиеся в H_c^V, переходят в $H_{c_1}^V$. Отсюда и следует свойство притяжения.

Теорема 3 справедлива, если выполнено условие (1.5) или (2.1) и выполняется, начиная с некоторого $T < \infty$ $(\forall t \geqslant T)$, условие (2.5). Эта теорема также справедлива, если в условии (2.5) использовать правую верхнюю производную Дини.

Рассмотрим ряд следствий из теоремы 3.

Следствие 1. Пусть существуют функции типа Ляпунова $V(x)$ и $V_1(x)$, такие, что выполнено условие (2.1) и существует измеримое множество F_1, состоящее из конечного или счетного числа интервалов, для которого

а) $(\exists M : \infty > M \geqslant 0)\ \mathrm{mes}_{R^1} F_1 < M$

б) $0 \geqslant -V_1(x) \geqslant \sup\limits_{F \setminus F_1} D^+V(x)$

Тогда H_c^V — область притяжения для системы (1.4).

Следствие 2. Если существуют функции типа Ляпунова $V(x)$, $V_1(x)$, $V_2(x)$ и множества F_1, F_2, состоящие из счетного числа интервалов, такие, что

а) $F = F_1 \bigcup F_2$

б) $(\forall i)\ (\forall c_i, d_i : [c_i, d_i] \subset F_1)\ (\exists a_i, b_i : [a_i, b_i] \subset F_2 \bigwedge a_i > d_i \bigwedge$
$\bigwedge b_i - a_i \geqslant d_i - c_i)\ [(c_{i+1} > c_i) \Rightarrow (a_{i+1} > a_i)] \bigwedge \{[c_{i+1}, d_{i+1}] \bigcap$
$\bigcap [c_i, d_i] \doteq \phi \Rightarrow [a_i, b_i] \bigcap [a_{i+1}, b_{i+1}] = \phi\} \bigwedge$

в) $\bigwedge \{(\forall x \in H_c^V)\ 0 \geqslant -V_1(x) \geqslant \max\limits_{t \in [a_i, b_i]} D^+V(x)\} \bigwedge$

г) $\bigwedge \{(\forall x \in H_c^V \setminus \theta)\ \max\limits_{t \in [c_i, d_i]} D^+V(x) < V_2(x)\}$

д) $(\forall x \in H_c^V)\ V_1(x) \geqslant V_2(x)$

а также

$$(\forall x \in H_c^V)\ (\forall t \in F)\ (\exists L\colon\ 0 \leqslant L < \infty)\ |f(x, t)| < L \tag{2.7}$$

Тогда множество $H_d^V \subset H_c^V$, для которого $(\forall t \in F)\ H^V_{c_0(t)} \subset H_c^V$: $c_0(t_0) = d$, является областью притяжения.

На основании следствий 1, 2 при исследовании асимптотической устойчивости удается отказаться как от знакоопределенности самих функций, так и от знакоопределенности их производных.

Следствие 3. Пусть для правых частей системы (1.4) выполнено условие (2.7), а также существуют функции типа Ляпунова $V(x)$, $V_1(x) \in C^1$ и непрерывная функция $\eta(t)$, такие, что $(\forall t \in F)\ (\forall x \in H_c^V)\ V^{\cdot}(x) \leqslant$ $\leqslant \eta(t)\ V_1(x)$ и, кроме того, выполняется одно из условий

а) $(\forall t \in F)\ \eta(t) \leqslant 0 \bigwedge \lim_{t\to\infty} \eta(t) < 0$

б) $(\forall t \in F)\, |\eta(t)| < M < \infty \bigwedge (\forall t \in F \setminus F_1 : \mathrm{mes}_{R^1} F_1 <$
$< M_1 < \infty)\ \eta(t) < 0$

в) $(\forall t \in F)\ |\eta(t)| < M < \infty \bigwedge \lim_{t\to\infty} \eta(t) = \eta_0 < 0$

г) $(\exists \{T_i\} : \bigcup\limits_i [T_i, T_{i+1}] = F,\ i = 1, 2, \ldots, \bigwedge T_1 = t_0 \bigwedge (\forall i) T_{i+1} -$
$- T_i \leqslant \tau < \infty) \bigwedge (\forall t \in F)\, |\eta(t)| < M < \infty \bigwedge (\exists q > 0)\, q < 2M\tau$
$(\exists a)\ (\forall x \in H_c^V)\ aV(x) > V_1(x)$

$$(\forall t \in [T_i, T_{i+1}])\, (\forall x \in H_c^V)\, |V_1^{\cdot}(x)| \leqslant \frac{V_1(x) \ln k}{\tau} \bigwedge \tag{2.8}$$
$$\bigwedge \int\limits_{T_i}^{T_{i+1}} \eta(t)\, \mathrm{d}t \leqslant -q < 0 \bigwedge 1 < k \leqslant \frac{2M\tau}{2M\tau - q}$$

Тогда для случая а) множество H_c^V — область притяжения; для случая б) областью притяжения для системы (1.4) является множество $H_{c_1}^V$, где $c_1 = c/\exp(aMM_1)$, $(\forall x \in H_c^V)\ aV(x) > V_1(x)$; для случаев в) и г) максимальное множество $H_{c_0}{}^V : (\forall t \in F)\, H^V_{c_0(t)} \subset H_c{}^V$ также является областью притяжения для системы (1.4).

Доказательство. Утверждение следствия при выполнении условия а) следует из теорем 1, 2. При выполнении условия б) на основании теоремы сравнения, полученной в [22], функция $V(x(t, t_0, x_0))$ для решений $x(t, t_0, x_0)$, находящихся во множестве $H_c{}^V$, не может возрастать по норме быстрее решений уравнения $y^{\cdot} = aMy$ на интервале времени, равном M_1. Тогда

$$y = y(0) \exp[aM(t - t_0)] \leqslant y(0) \exp(aMM_1)$$

Отсюда заключаем, что утверждение следствия при выполнении условия б) также справедливо.

Доказательство утверждения следствия при выполнении условия в) следует из справедливости утверждений следствия при выполнении условий а) и б).

Для доказательства утверждения следствия при выполнении условия г) докажем, что справедливы следующие утверждения:

1) для любого i на отрезке $[T_i, T_{i+1}]$ $(\exists H_{c_2}{}^V)$

$$(\forall t \in [t_0, T_{i+1}])\, H^V_{c_2(t)} \subset H_c{}^V$$

2) существует конечное T, такое, что ни одна интегральная кривая, находящаяся в $H_{c_2}{}^V$ на отрезке времени $[t_0, T]$, не покинет $H_c{}^V$ и при $(\forall t \geqslant T)$;

3) множество $H_{c_2}{}^V$ не может содержать никаких ω-предельных точек, кроме $x = \theta$.

Докажем утверждение 1). В силу теоремы сравнения [22] функция $V(x(t, t_0, x_0))$ для $x(t, t_0, x_0) \in H_c{}^V$ и $t \in [T_i, T_{i+1}]$ не может возрастать быстрее, чем решение оптимизационной задачи

$$\sup\nolimits_{\eta(t)} V(y(T_{i+1}))$$

где $y(T_{i+1})$ — решение дифференциального уравнения $y^{\cdot} = \eta(t)\, ay$ в момент времени T_{i+1}, $y(T_{i+1}) = y(T_{i+1}, T_i, y_0)$; $y_0 = V(x(T_i, t_0, x_0))$ для $x_0 \in H_c{}^V$ и функции $\eta(t)$, удовлетворяющей ограничению (2.8).

Поэтому существует конечное L, такое, что $V(x(t, t_0, x_0)) \leqslant \leqslant V(x_0) \exp L$ для $t \in [T_i, T_{i+1}]$, и, следовательно, справедливо утверждение 1).

В силу ограничения (2.8) на любом интервале времени $[T_i, T_{i+1}]$ имеем

$$V(x(T_{i+1}, t_0, x_0)) - V(x(T_i, t_0, x_0)) = \int\limits_{T_i}^{T_{i+1}} V^{\cdot}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{A_i^+} V_1(x)\, \eta(t)\, dt + \int\limits_{A_i^-} V_1(x)\, \eta(t)\, dt \leqslant V_1(x(T_i, t_0, x_0))\, \eta_i^+ k +$$

$$+ V_1(x(T_i, t_0, x_0))\, \eta_i^-/k = V_1(x(T_i, t_0, x_0))\, (\eta_i^+ k + \eta_i^-/k) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{[-4Mq\tau(M\tau + \eta_i^-) + q^2\eta_i^-]\, V_1(x(T_i, t_0, x_0))}{2M\tau(2M\tau - q)} < 0$$

Здесь

$$A_i^+ = \{t \mid t \in [T_i, T_{i+1}] \wedge \eta(t) \geqslant 0\}, \quad A_i^- = \{t \mid t \in [T_i, T_{i+1}] \wedge$$

$$\wedge\, \eta(t) < 0\}, \quad \eta_i^+ = \int\limits_{A_i^+} \eta(t)\, dt, \quad \eta_i^- = \int\limits_{A_i^-} \eta(t)\, dt$$

Из полученного неравенства очевидно существование некоторого T, такого, что все множество $H_{c_2}{}^V$ не может выйти из $H_c{}^V$. Следовательно, утверждение 2) справедливо.

Доказательство утверждения 3) следует из выполнения условия (2.8). Действительно, $(\forall i)$ на отрезке $[T_i,\ T_{i+1}]$ при $T_i > T$ система не только не выходит из $H_c{}^V$, но и для некоторого подынтервала времени $[t_i,\ t_{i+1}]$ выполняется $(\forall t \in [t_i,\ t_{i+1}])$ неравенство $\eta(t) \leqslant 0$. Кроме того, этот интервал можно выбрать так, что

$$V(x(T_i,\ t_0,\ x_0)) \leqslant V(x(t_i,\ t_0,\ x_0)) < V(x(T_{i+1},\ t_0,\ x_0))$$

Дальнейшее доказательство утверждения 3) и следствия очевидно.

3. *Примеры*. 1°. Рассмотрим свободное твердое тело, на которое действует момент внешних сил сопротивления. В предположениях работы [20] динамические уравнения Эйлера запишем в виде

$$I_i \frac{d\omega_i}{dt} + (I_{i+2} - I_{i+1})\,\omega_{i+1}\omega_{i+2} = -\varkappa(t)\,|\omega|^{\alpha-1}\,\omega_i$$
$$(i = 1,\ 2,\ 3;\ i + 3 = i)$$

где I_i — моменты инерции тела относительно главных центральных осей инерции, а ω_i — проекции угловой скорости тела на те же оси.

Для невозмущенного движения $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$.

Рассмотрим функцию типа Ляпунова вида

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} I_i\omega_i^2; \quad V^{\cdot} = -\varkappa(t)\Bigl(\sum_{i=1}^{3}\omega_i^2\Bigr)^{(\alpha+1)/2}$$

Если при $t \geqslant t_0$ выполнено условие

(3.1) $$(\exists\delta)(\forall t \in F)\ \varkappa(t) \geqslant \delta > 0$$

то система равномерно устойчива в целом. Если выполняется неравенство $(\forall t \in F)$ $\varkappa(t) \geqslant 0$, причем $\varkappa(t) = 0$ на множестве F_1, таком, что $\mathrm{mes}_{R^1} F_1 < M < \infty$, $M = \mathrm{const}$, то система устойчива в целом. Если выполнено неравенство $|\varkappa(t)| < M < \infty$ и вне некоторого множества F_0 выполнено условие (3.1) и $\mathrm{mes}_{R^1} F_0 < M < \infty$, то система также устойчива в целом.

2°. Исследуем устойчивость движения в вертикальной плоскости динамически и геометрически симметричного твердого тела в жидкости. Уравнения возмущенного движения в рассматриваемом случае можно представить в виде [23]

(3.2) $$(1 + k_1)\,V^{\cdot} = C_x{}^V V + C_x{}^\beta\beta + C_x{}^\alpha\alpha + C_x{}^\omega\omega$$
$$(1 + k_2)\,\alpha^{\cdot} = C_y(\alpha) + C_y{}^\omega\omega + C_y{}^\beta\beta + C_y{}^V V$$
$$(1 + k_3)\,\rho_z\,\omega^{\cdot} = m_z(\alpha) + m_z{}^\omega\,\omega + m_z{}^\beta\,\beta, \quad \beta^{\cdot} = \omega$$

Здесь V — модуль скорости, α — угол атаки, β — угол скольжения, ω — угловая скорость, $C_x{}^V$, $C_x{}^\beta$, $C_x{}^\alpha$, $C_x{}^\omega$, $C_y(\alpha)$, $C_y{}^\omega$, $C_y{}^\beta$, $C_y{}^V$, $m_z(\alpha)$, $m_z{}^\omega$, $m_z{}^\beta$ — гидродинамические коэффициенты, ρ_z — безразмерный момент инерции относительно оси z, k_1, k_2, k_3 — коэффициенты присоединенных масс.

Коэффициенты $C_y(\alpha)$ и $m_z(\alpha)$ с достаточной точностью можно аппроксимировать зависимостями

$$m_z(\alpha) = m_z{}^\alpha\,\alpha + m_1\alpha^3, \quad C_y(\alpha) = C_y{}^\alpha\,\alpha + C_1{}^\alpha\alpha^3$$

Для уравнений (3.2) в выбранной области изменения гидродинамических коэффициентов существует три особых точки: неустойчивое начало координат и две устойчивые симметричные относительно начала координат.

В дальнейшем переменные V, α, ω, β будем обозначать соответственно x_i $(i = 1, \ldots, 4)$.

Вероятностным подходом, описанным в [1], получено, что при $t \in [t_0,\ T]$ множество $H_{c_0}^{V(x,a)}$ переходит в множество $H_{c_0/\eta(t)}^{V(x,a)} = \{x \mid V(x,\ a) \leqslant c_0/\eta(t)\}$. При этом выполнено неравенство

$$(\forall t \in F)(\forall x \in \vartheta(F_{c(t)}^{V(x,\,a)}) : c(t_0) = c_0)\ \frac{d}{dt}(V(x,\ a)\,\eta(t)) \leqslant 0$$

Для конкретных числовых значений гидродинамических коэффициентов уравнений (3.2) оптимизировалась мера множества $H_{c/\eta(T)}^{V(x,a)}$. Получены следующие результаты.

При выборе функции $V(x, a)$ в виде

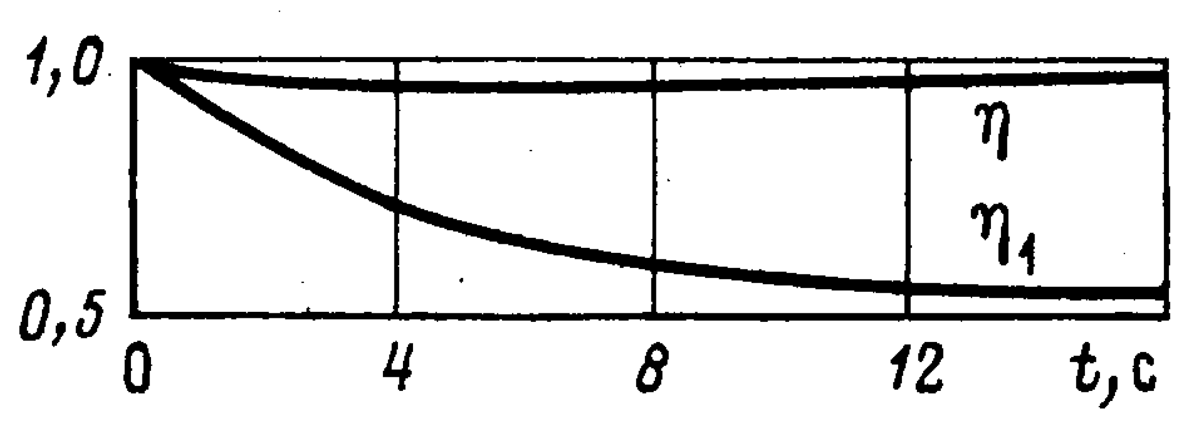
$$V(x, a) = \sum_{i=1}^{4} a_i x_i^2 \tag{3.3}$$

и значений a_i из интервалов: $a_1 \in [0, 1, 6]$, $a_2 = 1$, $a_3 = [0, 1, 1]$, $a_4 \in [1, 3]$, а значения $c_0 = 0, 12$, на ЭВМ получена с вероятностью 0,999 оптимальная функция $\eta(t)$, приведенная на фиг. 4.

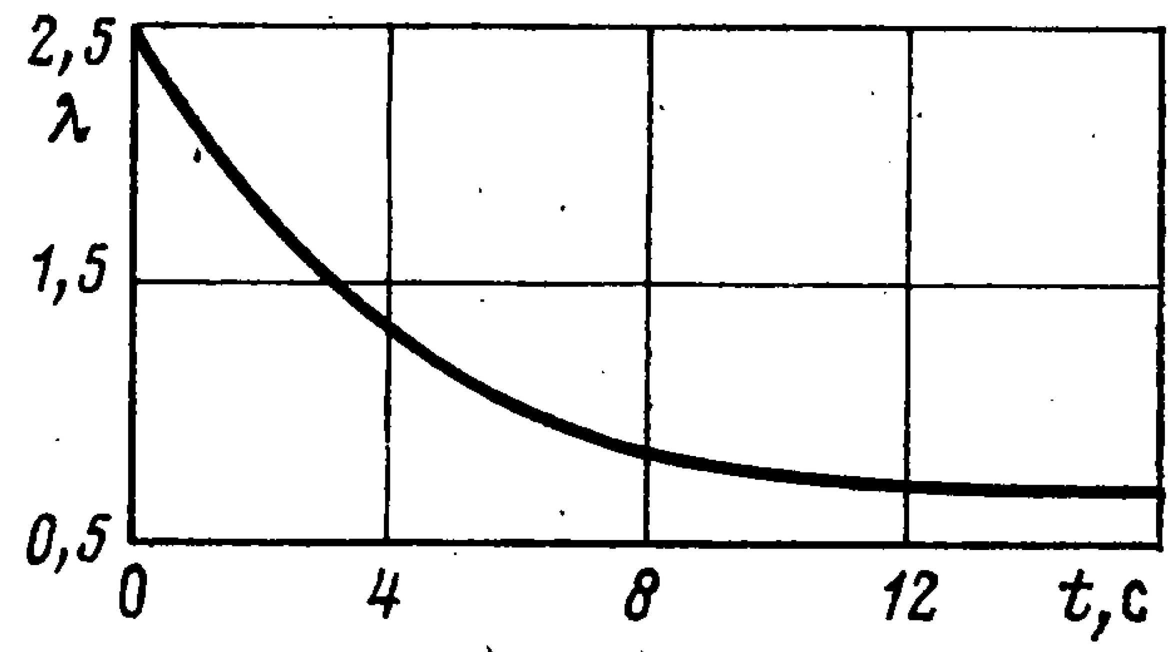
По сравнению с выбором функции типа Ляпунова вида

$$V(x, a) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \tag{3.4}$$

и соответствующей ей функции $\eta_1(t)$ (фиг. 4) изменение меры множества $H_{c/\eta(T)}^{V(x,a)}$ характеризуется графиком, изображенным на фиг. 5, где показана зависимость отношения $\lambda = \mathrm{mes}_{R^3} H^V_{c/\eta(t)} / \mathrm{mes}_{R^3} H^V_{c/\eta_1(t)}$ от t.



Фиг. 4



Фиг. 5

Как следует из графика фиг. 5, мера множества $H^V_{c/\eta(T)}$ для функции (3.3) по сравнению с (3.4) уменьшилась приблизительно в три раза.

Аналогично можно провести построение функции $\eta(t)$, отвечающей условиям сформулированных теорем и удовлетворяющей условию

$$(\forall c_1)(\forall t \in F)(\forall x \in H^V_{c_0} \setminus H^V_{c_1}) \ \frac{d}{dt}(V(x, a)\,\eta(t)) \leqslant 0$$

Отметим, что использованные в определении области устойчивости поверхности ψ и β при решении различных прикладных задач дают возможность провести анализ эволюции множеств, т. е. рассмотреть следующие вопросы: 1) при заданном множестве G_1 оценить множество G_0, начинаясь в котором интегральные кривые не выходят из G_1 за конечное время T; 2) при заданном множестве G_0 найти множество G_1, в котором остаются интегральные кривые, начинающиеся в G_0; 3) получить аналитические оценки областей притяжения.

Решение второй задачи приведено во втором примере.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Веретенников В. Г., Зайцев В. В.* Необходимые и достаточные условия устойчивости в большом.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 5, с. 753—761.
2. *Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу М.: Мир, 1979. 587 с.
3. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.
4. *Bhatia N. P., Szego G. P.* Dynamical Systems: Stability Theory and Applications.— Berlin — Heidelberg — N. Y.: Springer, 1967. 416 p.
5. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211с.
6. *Матросов В. М.* Об устойчивости движения.— ПММ, 1962, т. 26, вып. 5, с. 885—895.
7. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.
8. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 223с.
9. *Yoshizawa T.* Stability Theory and the Existance of Periodic solutions and Almost Periodic Solutions.— N. Y.: Springer 1975. 233 p.
10. *Анапольский Л. Ю., Иртегов В. Д., Матросов В. М.* Способы построения функций Ляпунова.— В кн.: Итоги науки и техники. Общая механика. Т. 2. М.: ВИНИТИ, 1975, с. 3—112.

11. *Румянцев В. В.* Метод функций Ляпунова в теории устойчивости движения.— В кн.: Механика в СССР за 50 лет. Т. 1. М.: Наука, 1968, с. 7—66.
12. *Grujic L. T.* Novel Development of Lyapunov Stability of Motion.— Internat. J. Control, 1975, v. 22, No. 4, p. 525—549.
13. *Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978. 400 с.
14. *Зубов В. И.* Методы А. М. Ляпунова и их применение. Л.: Изд-во ЛГУ, 1957. 241 с.
15. *La Salle J. P.* Stability Theory for Ordinary Differential Equations.— J. Differ. Equat., 1968, v. 4, No. 1, p. 57—65.
16. *Шестаков А. А.* Признаки устойчивости множеств относительно неавтономной дифференциальной системы.— Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 6, с. 1079—1090.
17. *Малышев Ю. В.* Устойчивость множеств для неавтономных систем.— Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 5, с. 818—826.
18. *Шестаков А. А., Меренков Ю. Н.* О локализации предельного множества в неавтономной дифференциальной системе с помощью функций Ляпунова.— Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 11, с. 2017—2028.
19. *Немыцкий В. В.* Топологическая классификация особых точек и обобщенные функции Ляпунова.— Дифференц. уравнения, 1967, т. 3, № 3, с. 359—370.
20. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1971. 312с.
21. *Андреев А. С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости неавтономных систем.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 5, с. 796—805.
22. *Кордуняну К.* Применение дифференциальных неравенств в теории устойчивости.— Ann. Stiint. Univ., Iasi. Sec. 1, 1960, t. 6, No. 1, p. 47—58.
23. *Пантов Е. Н., Махин Н. Н., Шереметов Б. Б.* Основы теории движения подводных аппаратов. Л.: Судостроение, 1973. 211с.

Москва

Поступила в редакцию
28.IV.1983