Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 5, 1984

УДК 531.36

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ НЕАВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

Андреев А. С.

Рассматривается неавтономная система дифференциальных уравнений, допускающая существование предельных к ней систем дифференциальных уравнений. Доказываются теоремы об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения такой системы относительно части переменных при наличии функции Ляпунова со знакопостоянной производной. Получены достаточные условия частичной асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия неавтономной голономной механической системы под действием диссипативных сил с полной и частичной диссипацией. В качестве примеров рассматриваются задачи об асимптотической устойчивости положения равновесия тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в однородном поле тяжести переменной интенсивности, о стабилизации перпендикулярно плоскости орбиты оси симметрии симметричного спутника, центр масс которого остается в точках либрации ограниченной круговой задачи трех тел.

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$x^{\cdot} = X(t, x) \quad (X(t, 0) \equiv 0) \tag{1.1}$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_m, z_1, z_2, \ldots, z_p)$$

$$(m > 0,\ p \geqslant 0,\ n = m + p)$$

Предположим, что вектор-функция $X(t, x)$ определена в области $R^+ \times \Gamma$ ($R^+ = [0, +\infty[$, $\Gamma = \{\|y\| \langle H\rangle 0, \|z\| < +\infty\}$, $\|y\|$ — некоторая норма R^m, $\|z\|$ — в R^p, $\|x\| = \|y\| + \|z\|$), удовлетворяет в этой области условиям z-продолжимости решений [1], условиям (A) из [2], гарантирующим существование и единственность решений (1.1), существование предельных к $X(t, x)$ функций $\varphi(t, x)$, взаимную непрерывность решений исходной системы (1.1) и решений предельных систем

$$x^{\cdot} = \varphi(t, x) \tag{1.2}$$

Относительно используемой ниже скалярной неотрицательной функции $W(t, x)$ ($W(t, 0) \equiv 0$) будем также предполагать, что она удовлетворяет условиям (A). Предельную к $W(t, x)$ функцию обозначим через $\omega(t, x)$ [3].

Будем говорить, что (φ, ω) — предельная пара, если $\varphi(t, x)$ и $\omega(t, x)$ являются предельными к $X(t, x)$ и $W(t, x)$ для одной и той же последовательности $t_n \to +\infty$.

2. Для каждой предельной пары (φ, ω) обозначим через $M^+((\varphi, \omega))$ множество, образуемое непродолжаемыми решениями системы $x^{\cdot} = \varphi(t, x)$, лежащими на всем своем интервале определения на множестве $\{\omega(t, x) = 0, t \in R^+, x \in \Gamma\}$, через $M^+(\{(\varphi, \omega)\})$ — объединение $M^+(\varphi, \omega)$ по всем (φ, ω).

Теорема 2.1. Предположим, что: 1) решение (1.1) из некоторой окрестности Γ_1 точки $x = 0$ ограничены по z; 2) существует y-определенно-положительная функция $V(t, x)$, $V(t, x) \geqslant V_1(\|y\|)$, производная которой в силу (1.1) $V^{\cdot}(t, x) \leqslant -W(t, x) \leqslant 0$; 3) для любой предельной пары

(φ, ω) множество $M^+(\varphi, \omega) \subset \{x : y = 0\}$. Тогда нулевое решение (1.1) асимптотически y-устойчиво.

Доказательство. Из условия 2) следует, что нулевое решение (1.1) y-устойчиво [4]. Пусть $x = x(t, t_0, x_0)$ — решение (1.1) из окрестности $\Gamma(t_0)$ точки $x = 0$, такой, что $\sup(V(t, x)$ при $x \in \Gamma(t) \subset \Gamma_1) \leqslant V_1(H_2)$, $H_2 < H$. В силу условий 1) и 2) теоремы оно будет ограничено при всех $t \geqslant t_0$. Множество предельных точек этого решения $\Omega^+(x(t, t_0, x_0))$ по теореме 2.2 из [3] содержится в $M_*^+(\{(\varphi, \omega)\})$. Но согласно условию 3) теоремы $M_*^+(\{(\varphi, \omega)\}) \subset \{x : y = 0\}$. Следовательно, $\Omega^+(x(t, t_0, x_0)) \subset \{x : y = 0\}$ и $\lim y(t, t_0, x_0) = 0$ при $t \to +\infty$.

Определение. Для некоторой последовательности $t_n \to +\infty$, любых $c \geqslant 0$ и $t \geqslant 0$ определим предельное множество $N(t, c)$ как множество точек $x \in \Gamma$, для которых существует последовательность $x_n \to x$, что $\lim V(t_n + t, x_n) = c$ при $t_n \to +\infty$ и $x_n \to x$.

Теорема 2.2. Предположим, что: 1) решения (1.1) из некоторой окрестности $x = 0$ ограничены по z; 2) существует y-определенно-положительная функция $V(t, x)$, производная которой в силу (1.1) $V^{\cdot}(t, x) \leqslant -W(t, x) \leqslant 0$; 3) для некоторой последовательности $t_n \to +\infty$ предельная пара (φ_0, ω_0) и множество $N(t, c)$ таковы, что при любом $c_0 > 0$ множество $N(t, c_0) \cap \{\omega_0(t, x) = 0\}$ не содержит решений системы $x^{\cdot} = \varphi_0(t, x)$. Тогда нулевое решение (1.1) асимптотически y-устойчиво равномерно по x_0.

Теорема 2.3. Предположим, что: 1) решения (1.1) из некоторой окрестности $x = 0$ ограничены по z; 2) существует функция $V(t, x)$, принимающая в любой малой окрестности $x = 0$ положительные значения, ограниченная в области $V(t, x) \geqslant 0$ и имеющая производную в силу (1.1) $V^{\cdot}(t, x) \leqslant -W(t, x) \leqslant 0$; 3) для некоторой последовательности $t_n \to +\infty$ предельная пара (φ_0, ω_0) и предельное множество $N(t, c)$ таковы, что при любом $c_0 > 0$, $N(t, c_0) \cap \{\omega_0(t, x) = 0\}$ не содержит решений системы $x^{\cdot} = \varphi_0(t, x)$. Тогда нулевое решение (1.1) y-неустойчиво.

Доказательства теорем 2.2 и 2.3 являются модификациями доказательств теорем 3.1 и 3.2 из [5]. Так, при доказательстве теоремы 2.2 показываем, что вдоль любого ограниченного решения (1.1) $x = x(t, t_0, x_0)$ функция $V(t, x(t, t_0, x_0)) \downarrow 0$, что согласно [6] влечет за собой асимптотическую y-устойчивость, равномерную по x_0.

Допустим, что функция $V(t, x)$ удовлетворяет условию Липшица по t и x на каждом компакте $K = [t_0, t_0 + T] \times \Gamma_1$ $(t_0 \geqslant 0, T > 0, \Gamma_1 \subset \Gamma)$. Тогда существует функция $\rho(t, x)$, предельная к $V(t, x)$ в смысле равномерной сходимости при $t_n \to +\infty$ на каждом компакте K [3]. Будем говорить, что (φ, ρ, ω) — предельная совокупность, если $X(t_n + t, x) \to \varphi(t, x)$, $V(t_n + t, x) \to \rho(t, x)$, $W(t_n + t, x) \to \omega(t, x)$ одновременно для некоторой последовательности $t_n \to +\infty$.

Теорема 2.4. Предположим, что: 1) решения (1.1) из некоторой окрестности Γ_1 точки $x = 0$ равномерно ограничены z; 2) существует y-определенно-положительная функция $V(t, x)$, удовлетворяющая условию Липшица по t и x (и, следовательно, допускающая бесконечно малый высший предел), $V_1(\|y\|) \leqslant V(t, x) \leqslant V_2(\|x\|)$, производная которой в силу (1.1) $V^{\cdot}(t, x) \leqslant -W(t, x) \leqslant 0$; 3) для любой предельной совокупности (φ, ρ, ω) множество $\{\rho(t, x) = c > 0\} \cap \{\omega(t, x) = 0\}$ не содержит решений системы $x^{\cdot} = \varphi(t, x)$. Тогда нулевое решение (1.1) равномерно асимптотически y-устойчиво.

Доказательство. Из условий теоремы следует, что нулевое решение (1.1) равномерно y-устойчиво [1], решения (1.1) из $\Gamma_0 = V_2^{-1}(V_1(H_1)) \subset \Gamma_1 (H_1 < H)$ ограничены. По теореме 2.2. получаем, что вдоль каждого решения (1.1) из Γ_0 функция $V(t, x(t, t_0, x_0)) \downarrow 0$. Теорема будет доказана, если покажем, что $V(t, x(t, t_0, x_0)) \to 0$ равномерно по $t_0 \in R^+$ и $x_0 \in \Gamma_0$.

Для этого вначале выведем следующий вспомогательный результат. Пусть $(\varphi_0, \rho_0, \omega_0)$ — произвольная предельная совокупность. Тогда вдоль каждого решения $x = \psi(t, t_0, x_0)$, $x_0 \in \Gamma_0$ системы $x^\cdot = \varphi_0(t, x)$ функция $\rho_0(t, \psi(t, t_0, x_0)) \downarrow 0$.

Повторяя рассуждения теоремы 3.3 из [3], находим

$$\rho_0(t, \psi(t, t_0, x_0)) - \rho_0(t_0, x_0) \leqslant -\int_0^t \omega_0(\tau, \psi(\tau, t_0, x_0))\, d\tau \leqslant 0$$

Отсюда следует, что нулевое решение системы $x^\cdot = \varphi_0(t, x)$ y-устойчиво и ее решения из Γ_0 ограничены.

Система, предельная к $x^\cdot = \varphi_0(t, x)$, будет предельной к (1.1) так же, как функции, предельные к $\rho_0(t, x)$ и $\omega_0(t, x)$, будут предельными к $V(t, x)$ и $W(t, x)$. Поэтому из условия 3) имеем, что если $(\varphi', \rho', \omega')$ — предельная совокупность к $(\varphi_0, \rho_0, \omega_0)$, то множество $\{\rho'(t, x) = c_0 > 0\} \cap \cap \{\omega'(t, x) = 0\}$ не содержит решений системы $x^\cdot = \varphi'(t, x)$. Отсюда и из теоремы 2.2. следует $\rho_0(t, \psi(t, t_0, x_0)) \downarrow 0$.

Теперь допустим противное: $V(t, x(t, t_0, x_0)) \to 0$ при $t \to +\infty$ неравномерно по $t_0 \in R^+$ и $x_0 \in \Gamma_0$, т. е. существует $\varepsilon_0 > 0$, такое, что для последовательности $T_n \to +\infty$ найдется последовательность (t_n, x_n), $t_n \geqslant 0$, $x_n \in \Gamma_0$ для которой $V(t_n + T_n, x(t_n + T_n, t_n, x_n)) \geqslant \varepsilon_0$. При этом, очевидно, что для $t, t_n \leqslant t_n + T_n$

(2.1) $\qquad V(t, x(t, t_n, x_n)) \geqslant \varepsilon_0$

Используя компактность Γ_0, выберем подпоследовательность $\{x_k\}$, чтобы $x_k \to x_0^* \in \Gamma_0$. Последовательность $\{t_k\}$ не может быть ограниченной, иначе это противоречило бы свойству $V(t, x(t, t_0, x_0^*)) \downarrow 0$, непрерывности решений (1.1) от начальных условий и непрерывности $V(t, x)$.

Пусть $t_k \to +\infty$. Выберем $\{t_j\} \subset \{t_k\}$, чтобы $X(t_j + t, x) \to \varphi_0(t, x)$, $V(t_j + t, x) \to \rho_0(t, x)$, $W(t_j + t, x) \to \omega_0(t, x)$. Последовательность решений (1.1) $x_j(t) = x(t_j + t, t_j, x_j)$ будет сходиться равномерно по $t \in \in [0, T]$ $(T > 0)$ к решению $x = \psi(t, 0, x^*)$ системы $x^\cdot = \varphi_0(t, x)$. В силу (2.1) $V(t_j + t, x_j(t)) \geqslant \varepsilon_0$ при $t \in [0, T_j]$. Отсюда, переходя к пределу при $t_j \to +\infty$, получим, что $\rho(t, \psi(t, 0, x^*)) \geqslant \varepsilon_0 > 0$ для всех $t \geqslant 0$, а это противоречит полученному выше свойству $\rho(t, \psi(t, 0, x_0^*)) \downarrow 0$. Таким образом, $V(t, x(t, t_0, x_0)) \to 0$ равномерно по (t_0, x_0), что доказывает теорему.

Теорема 2.5. Предположим, что: 1) существует y-определенно-положительная функция $V(t, x)$, $V(t, x) \geqslant V_1(\| y \|)$ с производной в силу (1.1) $V^\cdot(t, x) \leqslant -W(t, x) \leqslant 0$; 2) $V(t, x)$ такова, что существует $N > 0$, что при любом $\delta > 0$ для любой последовательности $\{x_n\}$, такой, что $\| y_n \| \geqslant \delta$ и $\| z_n \| \to +\infty$, $\underline{\lim}\, V(t, x_n) \geqslant N$ равномерно по t; 3) для любой предельной пары (φ, ω) множество $M^+((\varphi, \omega)) \subset \{x : y = 0\}$. Тогда нулевое решение (1.1) асимптотически y-устойчиво.

Доказательство. Пусть $x = x(t, t_0, x_0))$, $x_0 \in \Gamma(t_0)$ $(\Gamma(t) : \sup (V_1(t, x)$ при $x \in \Gamma(t)) < \inf(N, V_1(H_1))$, $H_1 < H)$ — решение (1.1). Тогда $V(t,$

$x(t, t_0; x_0)) \leqslant V_0 = V(t_0, x_0)) < N$. Если допустить, что существует последовательность $t_n \to +\infty$, для которой $\| z(t_n, t_0, x_0)\| \to +\infty$ и $\| y(t_n, t_0, x_0)\| \geqslant \delta_0 > 0$, то неравенство $V(t_n, x(t_n, t_0, x_0)) \leqslant V_0 < N$ будет противоречить условию 2) теоремы. Если же $\| z(t_n, t_0, x_0)\|$ ограничено, то множество предельных точек $\Omega^+(x(t, t_0, x_0))$ будет непусто. В силу условия 3) на основании теоремы 2.1 из [3] имеем $\Omega^+(x(t, t_0, x_0)) \subset \subset \{x : y = 0\}$. Следовательно, и когда $\| z(t_n, t_0, x_0)\|$ ограничено, $\lim y(t_n, t_0, x_0) = 0$ при $t_n \to +\infty$.

Аналогично доказывается следующая

Теорема 2.6. Предположим, что: 1) существует функция $V(t, x)$, принимающая в сколь угодно малой окрестности $x = 0$ положительные значения, ограниченная в области $V(t, x) \geqslant 0$, с производной в силу (1.1) $V^{\boldsymbol{\cdot}}(t, x) \geqslant W(t, x) \geqslant 0$ и такая, что равномерно по t — $\overline{\lim}\, V(t, x) \leqslant 0$ при $\| z \| \to +\infty$; 2) существует последовательность $t_n \to +\infty$, для которой предельное множество $N(t, c)$ и предельная пара (φ_0, ω_0) таковы, что для любого $c_0 > 0$ множество $N(t, c_0) \cap \{\omega_0(t, x) = 0\}$ не содержит решений системы $x^{\boldsymbol{\cdot}} = \varphi_0(t, x)$. Тогда нулевое решение (1.1) y-неустойчиво.

Приведенные теоремы развивают и обобщают теоремы об асимптотической устойчивости и неустойчивости по части переменных при наличии функции Ляпунова со знакопостоянной производной [5—9].

3. Рассмотрим механическую систему с зависящими от времени связями, описываемую уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{\boldsymbol{\cdot}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q \tag{3.1}$$

$$q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)^T, \quad L = L_2 + L_1 + L_0$$

$$L_2 = {}^1/_2\, (q^{\boldsymbol{\cdot}})^T A\, (t, q)\, q^{\boldsymbol{\cdot}}, \quad L_1 = B^T(q)\, q^{\boldsymbol{\cdot}}, \quad L_0 = L_0(t, q)$$

$$(\| q \|^2 = q_1^2 + q_2^2 + \ldots + q_n^2)$$

$Q(t, q, q^{\boldsymbol{\cdot}})$ — равнодействующая обобщенных гироскопических и диссипативных сил, $Q^T \cdot q^{\boldsymbol{\cdot}} \leqslant 0$; $\partial L / \partial q \equiv 0$, $Q \equiv 0$ при $q^{\boldsymbol{\cdot}} = q = 0$, так что система имеет нулевое положение равновесия $q^{\boldsymbol{\cdot}} \equiv q \equiv 0$.

Допустим, что $L_0(t, 0) \equiv 0$, $\partial L / \partial t \geqslant 0$, так что для производной функции $L_2 - L_0$ имеем

$$(L_2 - L_0)^{\boldsymbol{\cdot}} = -\partial L / \partial t + Q^T \cdot q^{\boldsymbol{\cdot}} \leqslant Q^T \cdot q^{\boldsymbol{\cdot}}$$

Допустим также, что величины $A(t, q)$, $\partial A / \partial t$, $\partial A / \partial q$, $\partial B / \partial q$, $\partial L_0 / \partial q$, Q ограничены и удовлетворяют условиям Липшица по всем своим переменным. Тогда предельные к (3.1) уравнения существуют и имеют вид [3]

$$A_*^T q^{\boldsymbol{\cdot\cdot}} + \{(q^{\boldsymbol{\cdot}})^T C_* q^{\boldsymbol{\cdot}}\} + \{D_*^T q^{\boldsymbol{\cdot}}\} + F_* = Q_* \tag{3.2}$$

$$F_*(t, q) = \lim_{t_n \to +\infty} \frac{\partial L_0}{\partial q}(t_n + t, q)$$

Для удобства обозначим через $\beta_1(t)$ функцию, такую, что $\beta_1(t) \geqslant 0$, $\beta_1(t) \geqslant \beta_0 > 0$ при $t \in [t_n, t_n + \nu]$ ($\nu > 0$, $t_n \to +\infty$, $t_{n+1} - t_n \leqslant \leqslant \rho = \mathrm{const}$, $\beta_2(t)$ — функцию, такую, что $\beta_2(t) \geqslant 0$, $\beta_2(t) \geqslant \beta_0 > 0$ при $t \in [t_n, t_n + \nu]$ ($\nu > 0$, $t_n \to +\infty$, условие $t_{n+1} - t_n \leqslant \rho$ не выполнено).

Теорема 3.1. Предположим, что: 1) функция $V = -L_0(t, q)$ определенно положительна по $q_1, q_2, \ldots, q_m$ $(m < n)$; 2) движения (3.1) из некоторой окрестности $q^{\boldsymbol{\cdot}} = q = 0$ ограничены по $q_{m+1}, \ldots, q_n$; 3) вне множества $\{q_1 = q_2 = \ldots = q_m = 0\}$ нет положений равновесия, и это свойство невырожденное, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $\| \partial L_0/\partial q \| \geqslant \delta$ при $q_1^2 + q_2^2 + \ldots + q_m^2 \geqslant \varepsilon$; 4) диссипативные силы таковы, что $Q^T \cdot q^{\cdot} \leqslant -\alpha(\| q^{\cdot} \|)$. Тогда нулевое положение равновесия (3.1) асимптотически устойчиво по $q^{\cdot}, q_1, q_2, \ldots, q_m$.

Теорема 3.2. Предположим, что: 1) функция $V = -L_0(t, q)$ определенно положительна по $q_1, q_2, \ldots, q_m$ $(m < n)$; 2) движения (3.1) из некоторой окрестности $q^{\cdot} = q = 0$ равномерно ограничены по $q_{m+1}, \ldots, q_n$; 3) на множестве $L_0(t, q) < 0$ нет положений равновесия (3.1), и это свойство невырожденное, т. е. при любом $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $\| \partial L_0/\partial q \| \geqslant \delta$ при $L_0(t, q) \leqslant -\varepsilon$; 4) диссипативные силы таковы, что $Q^T \cdot q^{\cdot} \leqslant -\beta_1(t)\, \alpha(\| q^{\cdot} \|)$. Тогда нулевое положение равновесия (3.1) равномерно асимптотически устойчиво по $q^{\cdot}, q_1, q_2, \ldots, q_m$.

Если $Q^T \cdot q^{\cdot} \leqslant -\beta_2(t)\, \alpha(\| q^{\cdot} \|)$, то $q^{\cdot} = q = 0$ асимптотически устойчиво по $q^{\cdot}, q_1, q_2, \ldots, q_m$ равномерно по $(q_0, q_0^{\cdot})$.

Доказательства теорем 3.1 и 3.2 следуют из теорем 2.1, 2.2, 2.4. Теорема 2.5 позволяет заменить условие ограниченности решений в теореме 3.1 на условия относительно $L_0(t, q)$.

Теорема 3.3. Предположим, что в условиях 1) — 3) теоремы 3.1 выполнено также условие 2′) для любого $\delta > 0$ $\underline{\lim}\,(-L_0(t, q)) = N > 0$ при $q_1^2 + q_2^2 + \ldots + q_m^2 \geqslant \delta > 0$ и $q_{m+1}^2 + q_{m+2}^2 + \ldots + q_n^2 \to +\infty$ равномерно по t. Тогда нулевое решение (3.1) устойчиво по $q^{\cdot}$, асимптотически устойчиво по $q_1, q_2, \ldots, q_m$. Если правые части (3.1), разрешенные относительно $q^{\cdot\cdot}$, будут ограниченными, то $q^{\cdot} = q = 0$ будет асимптотически устойчиво и по $q^{\cdot}$.

В предыдущих теоремах предполагалось, что квадратичная часть функции Лагранжа L_2 определенно положительна по всем скоростям, как это и бывает в большинстве случаев. Однако иногда исследование свойств движений механической системы удобно вести в системе координат, в которой L_2 вырождается, не являясь при всех значениях координат определенно-положительной по всем скоростям [10]. Вопросы устойчивости в этих случаях подробно рассмотрены в [11].

Допустим, что $L_2(t, q, q^{\cdot})$ является определенно-положительной по $q_1^{\cdot}, q_2^{\cdot}, \ldots, q_k^{\cdot}$ $(k < n)$ при $q_1 = q_2 = \ldots = q_m = 0$ и определенно-положительной по всем скоростям при $q_1^2 + q_2^2 + \ldots + q_m^2 \geqslant \delta > 0$. Тогда $L_2(t, q, q^{\cdot}) \to +\infty$ при $q_1^2 + q_2^2 + \ldots + q_m^2 \geqslant \delta$ и $(q_{k+1}^{\cdot})^2 + (q_{k+2}^{\cdot})^2 + \ldots + (q_n^{\cdot})^2 \to +\infty$ равномерно по t. Отсюда на основании теоремы 2.5 имеем следующий результат.

Теорема 3.4. В рассматриваемом случае при условиях 1) — 4) теоремы 3.1. нулевое положение равновесия (3.1) устойчиво по $q_1^{\cdot}, q_2^{\cdot}, \ldots, q_k^{\cdot}$ и асимптотически устойчиво по $q_1, q_2, \ldots, q_m$.

Замечание 3.1. Соответствующим образом теоремы 3.1—3.4 могут быть распространены и на случай систем с частичной диссипацией. Например, теоремы 3.1, 3.3, 3.4 остаются справедливыми, если вместо условий 3), 4) выполнены условия: 3′) $Q^T \cdot q^{\cdot} \leqslant -\alpha\left(((q_i^{\cdot})^2 + (q_{i+1}^{\cdot})^2 + \ldots + (q_j^{\cdot})^2)^{1/2}\right)$ $(1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n)$; 4)′ движения предельных систем (3.2), вдоль которых $q_i^{\cdot} \equiv q_{i+1}^{\cdot} \equiv q_{i+2}^{\cdot} \equiv \ldots \equiv q_j^{\cdot} \equiv 0$, содержатся в множестве $\{q_1 = q_2 = \ldots = q_m = 0\}$.

Пример 3.1. В [12, 7, 9] рассмотрена задача о частичной асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия тяжелой материальной точки, движущейся по поверхности $z = (1 + x^2)\, y^2$. В дополнение к полученным в этих работах результатам на основании теоремы 3.3 и замечания 3.1 можно вывести, что положение равновесия $x^{\cdot} = y^{\cdot} = x = y = 0$, устойчивое по $x^{\cdot}$, $y^{\cdot}$ и y, будет асимптотически устойчиво по $y^{\cdot}$ и y под действием сил Q_x и Q_y, таких, что $Q_x x^{\cdot} + Q_y y^{\cdot} \leqslant -\beta_1(t)\, \alpha(| y^{\cdot} |)$.

Пример 3.2. Рассмотрим твердое тело с одной неподвижной точкой и центром масс, лежащим на одной из главных осей инерции — оси x, находящееся в однородном поле тяжести переменной интенсивности $g = g(t) \geqslant g_0 > 0$ под действием момента сил сопротивления среды $\mathbf{M} = -k(t)\omega^{\alpha}\omega_0$ (ω — угловая скорость тела, ω_0 — соответствующий единичный вектор). Положение тела относительно инерциальной системы координат будем определять углами Эйлера θ, φ, ψ. Функция Лагранжа

$$
\begin{aligned}
L &= L_2 + L_0,\ 2L_2 = A\,\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2 = \\
&= A\,(\psi^{\cdot}\sin\theta\sin\varphi + \theta^{\cdot}\cos\varphi)^2 + \\
&+ B\,(\psi^{\cdot}\sin\theta\cos\varphi - \theta^{\cdot}\sin\varphi)^2 + C\,(\varphi^{\cdot} + \psi^{\cdot}\cos\theta)^2 \\
L_0 &= -\,mg\,(t)\ (1 + \sin\theta\sin\varphi)
\end{aligned}
$$

где A, B, C — главные центральные моменты инерции, m — масса, $x_0 > 0$ — координата центра тяжести тела. Тело имеет положение равновесия, при котором ось x тела направлена вертикально вниз

$$
\theta^{\cdot} = \varphi^{\cdot} = \psi^{\cdot} = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \frac{3\pi}{2}, \quad \psi = 0 \tag{3.4}
$$

Из теоремы 3.2 следует, что при условиях $g^{\cdot}(t) \leqslant 0$, $k(t) = \beta_1(t)$ (т. е. $k(t)$ — функция типа $\beta_1(t)$) (3.4) равномерно асимптотически устойчиво по $\theta^{\cdot}$, $\varphi^{\cdot}$, $\psi^{\cdot}$, θ, φ. В более общем случае возьмем в качестве функции Ляпунова $V = L_2/g(t) + mx_0(1 + \sin\theta\sin\varphi)$. Ее производная

$$
\begin{aligned}
V^{\cdot} &= (-\,2k\,(t)\,g\,(t)\,\omega^{\alpha+1} - g^{\cdot}(t)\,(A\,\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2))/2g^2(t) \leqslant \\
&\leqslant -\,\beta_1(t)\,\omega^{\alpha+1}
\end{aligned}
$$

при малых ω_x, ω_y, ω_z, если выполнены условия

$$
\begin{aligned}
&|\,g^{\cdot}(t)\,| \leqslant M,\ k\,(t) = \beta_1(t)\ (0 < \alpha < 1) \\
&2k\,(t)\,g\,(t) + g^{\cdot}(t)\,(A,\ B,\ C) \geqslant \beta_1(t)\ (\alpha = 1)
\end{aligned}
$$

Используя теорему 2.4, получаем, что при этих условиях положение равновесия (3.4) равномерно асимптотически устойчиво по $\theta^{\cdot}$, $\varphi^{\cdot}$, $\psi^{\cdot}$, θ, φ.

Пример 3.3. Рассмотрим движение динамически симметричного спутника, центр масс которого остается в одной из точек либрации ограниченной круговой задачи трех тел [13]. Обозначим, как и в [13]: O_1xyz — система координат, вращающаяся с угловой скоростью Ω вокруг оси z, ось x системы проходит через притягивающие центры M_1 и M_2 с имасами m_1 и m_2, точка O_1 совпадает с центром масс m_1 и m_2, x_1 и x_2 — координаты M_1 и M_2; x, y, $z = 0$ — координаты центра масс спутника, $\mu_i = fm_i$, $r_i^2 = (x - x_i)^2 + y^2$ $(i = 1, 2)$, $A = B$, C — главные центральные моменты инерции спутника θ, φ, ψ — углы Эйлера, вводимые обычным образом.

Игнорируя циклическую координату φ, определим функцию Рауса

$$
\begin{aligned}
&R = R_2 + R_1 - W \\
&2R = A\,(\theta^{\cdot 2} + \psi^{\cdot 2}\sin^2\theta) + 2A\Omega\psi^{\cdot}\sin^2\theta + \\
&+ 2c\psi^{\cdot}\cos\theta + A\Omega^2\sin^2\theta + 2c\Omega\cos\theta - \\
&- 3\,(C - A)\sin^2\theta\sum_{i=1}^{2}\mu_i\,((x - x_i)\sin\psi - y\cos\psi)^2/r_i^5)
\end{aligned}
$$

$\partial W/\partial\theta = \partial W/\partial\psi = 0$ при $\theta = 0$, так что спутник имеет стационарные движения [13]

$$
\theta^{\cdot} = \theta = 0,\ \varphi^{\cdot} = \mathrm{const} \tag{3.5}
$$

в которых ось симметрии спутника перпендикулярна плоскости орбиты.

Функция R_2 определенно положительна только по θ, но $R_2 \to +\infty$ при $|\sin\theta| \geqslant \delta > 0$ и $|\psi^{\cdot}| \to +\infty$. Функция $W - W_0$ определенно положительна по θ в случае прямолинейной точки либрации, если

$$
\begin{aligned}
&c\Omega - A\Omega^2 > 0\quad (C > A) \\
&c\Omega - A\Omega^2 + 3\ \ (C - A)\ (\mu_1/r_1^3 + \mu_2/r_2^3) > 0\ \ (C < A)
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

в случае треугольной точки либрации, если

$$
\begin{aligned}
&c\Omega - A\Omega^2 + (C - A)\ y^2\,(2\mu_1 + 2\mu_2 + d)/r^5 > 0\ \ (C < A) \\
&c\Omega - |\,A\Omega^2 - (C - A)\ y^2\,(2\mu_1 + 2\mu_2 - d)\,/\,r^5\,| > 0\ \ (C > A) \\
&(d = ((\mu_1 + \mu_2)^2 + 3\,(\mu_1 - \mu_2)^2)^{1/2})
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

Из уравнений движения можно найти, что при условиях (3.6) и (3.7) в области $\{0 < \theta < \pi\}$ не существует движений, вдоль которых $\theta = \text{const}$ или $\psi = \text{const}$.

Применяя теорему 3.4 с замечанием 3.1, получаем следующий результат. Если на спутник действуют диссипативные силы с моментами, такими, что

$$Q_\varphi = 0, \quad Q_\theta\theta^\cdot + Q_\psi\psi^\cdot \leqslant -\beta_1(t)(\theta^\cdot)^\alpha \quad (\leqslant -\beta_1(t)\sin^2\theta\,(\psi^\cdot)^\alpha)$$

то множество стационарных движений (3.5) асимптотически устойчиво по θ относительно возмущенных движений спутника с начальными условиями, удовлетворяющими (3.6) или (3.7).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Озиранер А. С.*, *Румянцев В. В.* Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных.— ПММ, 1972, т. 36, вып. 2, с. 364—384.
2. *Arstein* Z. Topological dynamics of an ordinary differential equations.— J. Different. Equat., 1977, v. 23, No. 2, p. 216—223.
3. *Андреев А. С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы.— ПММ, 1984, т. 48, вып. 2, с. 225—232.
4. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных.— Вестн. МГУ. Сер. матем., механ. астрон., физ., хим., 1957, № 4, с. 9—16.
5. *Андреев А. С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости неавтономных систем.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 5, с. 796—805.
6. *Озиранер А. С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных.— ПММ, 1973, т. 37, вып. 4, с. 659—665.
7. *Румянцев В. В.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости движения по отношению к части переменных.— ПММ, 1971, т. 35, вып. 1, с. 138—143.
8. *Андреев А. С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости по части переменных.— Докл. АН УзССР, 1982, № 5, с. 9—12.
9. *Hatvani L.* On the partial asymptotic stability by Luapunov function with semidefinite derivative.— MTA Számitástechn. és automatiz. kut. intéz. közl., 1982, No. 26, p. 85—88.
10. *Roche N.*, *Peiffer K.* Le théorème de Lagrange — Dirichlet et la deuxième méthode de Liapunoff.— Ann. Soc. Sci. Bruxelles. Ser. 1, 1967, v. 81, No. 1, p. 19—33.
11. *Румянцев В. В.* Некоторые задачи об устойчивости движения по отношению к части переменных.— В кн.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М.: Наука, 1972, с. 429—436.
12. *Peiffer K.*, *Rouche N.* Liapunov's second method applied to partial stability.— J. Mec., 1968, v. 8, No. 2, p. 323—334.
13. *Румянцев В. В.* Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами в точках либрации.— Publs Inst. Math., nov. sec., 1974, t. 17, p. 139—148.

Ташкент

Поступила в редакцию
22.XI.1983