

$$v^{\circ}(r, \varphi, z) = \frac{1}{\ln a (\kappa_1^2 + \kappa_2^2)} \int_{\sigma} e^{i\alpha z} K_{21}^1(r, 1, \alpha, a) [e^{i\varphi} U^*(a, 1, \alpha) + e^{-i\varphi} U^*(a, -1, \alpha)] d\alpha + v^*(r, \varphi, z)$$

$$w^{\circ}(r, \varphi, z) = - \frac{1}{\ln a} \int_{\sigma} \kappa_2^{-2} e^{i\alpha z} \left\{ y_1(\alpha, r) W^*(a, 0, \alpha) + \frac{i\alpha}{\kappa_1^2 + \kappa_2^2} y_2(\alpha, r) [e^{i\varphi} U^*(a, 1, \alpha) + e^{-i\varphi} U^*(a, -1, \alpha)] \right\} da + w^*(r, \varphi, z)$$

Следует отметить, что вблизи боковой поверхности шахты составляющие поля перемещений, вызываемые влиянием соседних шахт и самой шахтой, относятся, как  $1 : \ln a$ .

Система шахт малого радиуса  $a$ , пронизывающих упругое пространство, вызывает возмущение волнового поля упругой среды порядка  $1/\ln a$ . Этот вклад зависит как от числа шахт в системе, так и от их расположения.

Автор благодарит В. А. Бабешко за внимание к работе и ценные советы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ворovich И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974. 295 с.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1965. 203 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию  
12.VII.1982

УДК 531/539

### К ВОПРОСУ О ВОЗМОЖНОСТИ НЕОБРАТИМЫХ КВАЗИСТАТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В МАКРОСИСТЕМЕ

Вакуленко А. А.

В термодинамике довольно долго рассматривались только такие системы, при квазистатических<sup>1</sup> процессах в которых текущее макросостояние системы практически не зависит от предшествующей истории изменения внешних параметров. Отсутствие «памяти» характерно для квазистатических процессов в газах и обычных жидкостях, равно как и для обратимых процессов в любой системе. Но квазистатичность (равновесность) процесса не всегда означает отсутствие «памяти», и тем самым, близость процесса к обратимому. С формальной точки зрения это связано с тем, что не всякая дифференциальная форма является точным дифференциалом (интегрируемой формой).

Рассмотрим какую-либо достаточно простую термодинамическую систему, полный набор внешних параметров которой образует конечное множество переменных величин. Обозначим эти параметры через  $a_1, a_2, \dots, a_n$  и условимся, что для системы в термостате в их число входит и температура термостата. Тогда полнота этой системы  $a_i$  внешних параметров означает, что всегда, когда каждый из них является заданной функцией времени на интервале  $-\infty < \tau < t$ , определенными в момент  $t$  будут и все внутренние параметры  $\xi_{\alpha}$  рассматриваемой термодинамической системы. Пусть функции  $a_i = a_i(t)$  можно задать так, что для каждого  $t \in (-\infty, \infty)$  и каждого из параметров  $\xi_{\alpha}$  справедливо соотношение вида

$$(1) \quad \frac{d\xi_{\alpha}}{dt} = \sum_{k=1}^n C_{\alpha k} \frac{da_k}{dt}$$

где  $C_{\alpha k}$  — некоторые функции параметров  $\xi_{\alpha}, a_k$  и, возможно, других характеристик траектории процесса в пространстве состояний системы. При надлежащем условии ограниченности функций  $C_{\alpha k}$  из (1) следует, что с фиксированием в любой момент

<sup>1</sup> Принятое здесь определение квазистатического процесса соответствует общепринятому (например [1—5]), обратимость процесса понимается в узком смысле [5].

времени всех внешних параметров;  $da_k/dt = 0$  при  $t \geq t_0$  (и для всех  $k = 1, 2, \dots, n$ ) неизменным при  $t \geq t_0$  будет и состояние системы. Это означает, что каждое из состояний системы в процессе есть состояние равновесия. Для того чтобы процесс был не только равновесным, но и обратимым, нужно, чтобы при фиксированном начальном состоянии системы текущие значения всех ее параметров состояния зависели только от текущих значений внешних параметров:  $\xi_\alpha = \xi_\alpha(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , а это вытекает из соотношений (1) только в том случае, если функции  $C_{\alpha k}$  удовлетворяют определенного рода дополнительным условиям. Так, если коэффициенты  $C_{\alpha k}$  в (1) — дифференцируемые функции только от  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , формы (1) будут точными дифференциалами некоторых функций этих же аргументов лишь при условии, что  $\partial C_{\alpha k}/\partial a_l = \partial C_{\alpha l}/\partial a_k$  для всех  $k, l = 1, 2, \dots, n$ .

Еще в начале нашего века Каратеодори обращал внимание специалистов на то, что из равновесности процесса не следует, вообще говоря, его обратимость [1]: «Вполне допустимо, притом физически, что в природе есть вещества, которые нельзя считать составной частью какой-либо простой системы. Так было бы, например, если бы внутреннее трение рассматриваемого вещества, которое является функцией скорости деформации, не стремилось к нулю при квазистатических изменениях состояния. Действительно, силы, производящие работу, не были бы тогда сравнимы с силами, обеспечивающими равновесие; внешнюю работу  $A$  нельзя было бы представить в виде пфаффовской формы». Имеется в виду, что дифференциальная форма

$$dA = \sum_i P_i(a_k) da_i$$

определяющая элементарную работу внешних сил, может быть не линейной, а только однородной функцией первой степени по  $da_i$ , а ее коэффициенты — однородными функциями нулевой степени по  $da_i$ ; в частности, вида

$$dA = \sum_i P_i \left( a_k, \frac{a_k}{|a_k|} \right) da_i$$

Подобным образом форма  $dA$  связана с изменениями внешних параметров, например в случае системы, которую представляет груз на плоскости при действии сил сухого трения. Детальнее этот пример обсуждался Л. И. Седовым [2]. Примером системы, равновесность процесса в которой не обязательно влечет его обратимость, могут служить также почти все из известных сейчас моделей упругопластической сплошной среды [3]. Необходимость различать равновесные и обратимые процессы отмечались и в других работах Л. И. Седова.

Тем не менее утверждение об обратимости любого квазистатического процесса можно встретить не только в старых, но и во многих современных изданиях и работах [4—6]. Законность такого отождествления обычно считается очевидной, однако известны и попытки его обосновать. Отправной точкой при этом всегда служит в той или иной форме так называемое нулевое (или общее) начало термодинамики — постулат о том, что при фиксировании всех внешних условий система со временем приходит в состояние термодинамического равновесия. Утверждается, что это состояние вполне определяется фиксированными значениями внешних параметров [4, 5], откуда следует в свою очередь, что в равновесном процессе с заданным начальным состоянием системы текущее ее состояние зависит только от текущих значений внешних параметров — следовательно, процесс обратим.

Нетрудно видеть, однако, что в этих рассуждениях кроме «нулевого» начала термодинамики дополнительно неявно предполагается, что состояние системы, устанавливающееся при неизменных внешних условиях, не зависит от того, как изменялись внешние параметры до их фиксирования. Для систем, рассматривавшихся в термодинамике в период ее становления, такое предположение имеет некоторые основания. Несомненно, что в газе или жидкости с достаточно малой вязкостью тепловое движение частиц успевает за время приближения к состоянию термодинамического (статистического) равновесия «стереть» все, что в равновесном состоянии могло бы остаться от состояний до фиксирования внешних условий. Но в настоящее время не приходится сомневаться и в том, что с процессами в твердых телах дело может обстоять иначе.

Рассмотрим, например, процесс деформации металлического моно- или поликристалла. В обычных лабораторных опытах тело («образец») находится в условиях термостата, наряду с температурой которого роль внешних параметров играют подходящие макрохарактеристики геометрии тела (компоненты тензора макродеформации).

Как бы медленно ни изменять эти геометрические внешние параметры, при монотонном ходе процесса неизбежно наступит момент, когда в решетке кристалла начнут перемещаться дислокации, обуславливая появление и развитие пластической деформации. Если в некоторый момент хода этого процесса снова фиксировать все внешние параметры и поддерживать их неизменными, то со временем прекратится и перемещение микродефектов — установится новое равновесное распределение в теле (и притом, вообще говоря, установится сравнительно быстро: когда тело в исходном состоянии обладает стабильной структурой и достаточно медленны изменения внешних параметров до их полного фиксирования, времена релаксации измеряются малыми долями секунды [7, 8]). Как показывают результаты экспериментов, это новое состояние равновесия пластически деформированного образца существенно зависит от траектории процесса в пространстве внешних параметров. Изучение этой зависимости является по существу одной из основных задач теории пластичности, и в этом направлении накоплено много экспериментальных данных [9].

Известны и другие примеры процессов в твердых телах, для которых, какими бы медленными изменениями внешних параметров они ни вызывались, характерна существенная «память», и тем самым, такие процессы, несмотря на их медленность, существенно необратимы. В комментариях Д. В. Сивухина [5] к книге [4] утверждается, что эти процессы все же нельзя считать равновесными.

Рассмотрим вкратце аргументы [5], на основании которых делается этот вывод.

1) Утверждается, что в некоторых из этих процессов (например, при намагничивании ферромагнетика) состояния системы не являются состояниями «истинного» равновесия, а метастабильные, т. е. при наложении возмущений система не возвращается с их затуханием в исходное состояние, а оказывается в другом равновесном состоянии.

Заметим, что такая ситуация возможна в любой системе, для которой заданным внешним параметрам соответствует не обязательно одно состояние равновесия. А системы этого типа с давних пор рассматриваются в термодинамике — достаточно вспомнить классическую термодинамическую теорию фазовых переходов, в соответствии с которой возможность фазового перехода при данных внешних условиях как раз и означает неединственность состояния равновесия при этих условиях. Основные положения термодинамики, в том числе и «нулевое» начало, не регламентирует единственности равновесия, достигаемого системой при неизменных внешних условиях, а поэтому нет и оснований усложнять определение равновесного процесса добавочным требованием устойчивости равновесий в таком процессе.

2) Утверждается, что неравновесность необратимых процессов может маскироваться медленностью приближения к равновесию: при малости времени протекания процесса по сравнению с временем релаксации неравновесие «не успевает» проявиться и процесс выглядит равновесным, хотя в действительности таковым не является.

Справедливость этого утверждения бесспорна, но оно скорее свидетельствует не в пользу основного тезиса работы [5], а в пользу «законности» понятия равновесного необратимого процесса. Действительно, при построении рациональной теории всегда приходится чем-то пренебрегать, а когда времена, за которые заметно изменяется состояние системы в изучаемом процессе, во много раз меньше времени релаксации, при описании этого процесса естественно пренебречь прежде всего релаксацией, т. е. считать процесс равновесным.

Кроме того, возникает вопрос о процессах, в которых заметные изменения состояния системы происходят за времена, сравнимые со временем релаксации или даже существенно его превышающие. Примером может служить уже упоминавшийся процесс достаточно медленной деформации твердого тела.

3) Утверждается, что такие процессы, как намагничивание ферромагнетика и процессы пластической деформации всегда неравновесны еще и потому, что изменения внешних параметров при любой медленности связаны со скачкообразными изменениями внутренних параметров.

4) Утверждается, что и медленное перемещение груза по плоскости при действии сил сухого трения не может служить примером равновесного необратимого процесса, ибо в реальных условиях всегда происходит с конечной скоростью. Противоположное же мнение об этих примерах других авторов в [5] объявляется «абсолютизацией идеализированных моделей».

Что касается примера с сухим трением, то нужно иметь в виду, что в макроскопических опытах не обнаруживается вполне отчетливой ненулевой нижней границы воз-

возможных скоростей — эта граница оказывается размытой, причем тем в большей мере, чем точнее измерения. Вообще же замечание об идеализированных моделях и указывает на главный источник недоразумений, ибо все аргументы в [5] сводятся в конце концов к тому, что во избежание «абсолютизации» моделей якобы нужно всегда считаться с релаксацией, какой бы малой или медленной она ни была, всегда учитывать «скачкообразность» изменений микроструктуры при пластической деформации кристаллического тела и т. д.

Напомним в связи с этим, что наука всегда имеет дело с моделями. Приближенные модели нередко строятся путем отбрасывания второстепенных эффектов в «более точных» моделях (например, переход от трехмерной теории упругости к двумерной теории оболочек). Однако такой прием возможен не всегда: долгое время, скажем, модели статистического ансамбля в статистической механике строились не только без учета квантовых эффектов, но и вообще без представления о существовании таких эффектов.

Модель всегда имеет пределы применимости, всегда можно указать на практике случаи, когда она не верна. Более того, действительность никогда точно не согласуется с моделью, даже если модель выражает фундаментальные законы. Например, на практике нет условий, в которых точно выполнялся бы первый закон Ньютона.

Термодинамика, как и всякая наука, имеет дело с моделями и только с ними. Нельзя считать, например, что идеальная жидкость — модель, а вязкая жидкость — сама реальность. И то и другое — идеализированные модели разной степени подробности и с разными областями применения. Даже основные понятия термодинамики, например адиабатическая изоляция или равновесие, — сильно идеализированные представления: адиабатическая изоляция предполагает полное отсутствие теплопроводности и излучения, равновесие реальной системы всегда только кажущееся (тяжелые частицы распадаются на более легкие, флуктуируют внутренние поля и т. д.).

Как и для любых других моделей, построение моделей с необратимыми квазистатическими процессами связано с идеализацией. Эта идеализация делает теорию рациональной и в своей области вполне приемлемым образом соответствующей опыту. По силе используемых предположений она нисколько не превосходит других идеализаций, давно ставших классическими и привычными. В этом можно убедиться при анализе любого из процессов рассматриваемого типа.

Так, процесс пластической деформации на микроуровне действительно связан со «скачками»: перемещаясь в кристалле, дислокации преодолевают разного рода препятствия — «барьеры Пайерлса», частицы примесей, дислокации «леса», причем переход через препятствие обычно связан с возбуждением частиц в некоторой его окрестности. Но размеры этих препятствий измеряются десятками ангстрем («барьер Пайерлса» обычно преодолевается не весь сразу), а при достаточно медленном деформировании тела одновременно переходит через препятствия всегда малая часть общего числа дислокаций, участвующих в процессе. В результате связанные с этими переходами возбуждения атомных частиц фактически локализуются в микроскопических областях, случайным образом распределенных в теле на больших по сравнению с их размерами расстояниях одно от другого, и на макросостояниях тела практически не сказываются.

Это следует и из известной формулы Орована, связывающей скорость макродеформации со средней в данный момент скоростью дислокаций в образце при простом его растяжении или чистом сдвиге:  $de/dt = \rho_* b v_*$  ( $\rho_*$  — плотность движущихся дислокаций,  $b$  — модуль их вектора Бюргерса). Эксперимент всегда можно провести так, чтобы в каждый момент процесса и с любой заданной точностью было  $de/dt \simeq 0$ . Тогда и  $v_* \simeq 0$ , а это означает, что скачок скорости элемента дислокации всегда сопровождается таким же, но противоположного знака скачком скорости других элементов дислокационного ансамбля (возможно, других элементов той же дислокации). Такие «взаимно погашающиеся» скачки не могут сообщить результирующего импульса образцу, и в опытах обнаруживаются в сущности только тогда, когда скорость макродеформации недостаточно мала при данной точности измерений. Но и в этих случаях они проявляются как малые скачки значения случайной функции, т. е. как типичные флуктуации.

В опытах над монокристаллами иногда бывают различимы щелчки и потрескивания в образце в ходе процесса, но они связаны не с элементарными актами пластической деформации, а с образованием «двойников», «полос сброса» и т. п. сравнительно больших дефектов решетки из-за затрудненности, наоборот, обычных механизмов пластической деформации в определенных случаях [8]. При медленном деформиро-

вании металлов с типичными для них кубическими кристаллическими решетками такие дефекты не образуются и на микроуровне происходят только отмеченные малые скачки, случайным образом локализованные в теле и во времени. Нет никаких оснований считать, что при описании процессов пластической деформации пренебрежение этими флуктуациями является большей идеализацией, чем заложенная в самом понятии термодинамического равновесия.

Не противоречит эта идеализация и законам термодинамики, равно как и вообще ничему, кроме некоторой традиции. Впрочем, имеется и другая традиция, восходящая к Каратеодори и другим ученым (так, Сен-Венан еще в 1871 г. отчетливо указал на равновесность процессов пластической деформации в определенных условиях [9]). Сейчас известен целый ряд конкретных моделей макросистем, в которых возможны квазистатические необратимые процессы. Эти модели уже включены в изложение термодинамики на современном уровне и широко используются для решения различных теоретических и прикладных задач.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Carathéodory C.* Untersuchungen über die Grundlagen der Thermodynamik. — *Math. Ann.* 1909, v. 67, N. 3, S. 355—386. — Рус. перев.: Каратеодори К. Об основах термодинамики. — В кн.: Современное развитие физики. М.: Наука, 1964, с. 167—222.
2. *Седов Л. И.* Очерки, связанные с основами механики и физики. — В кн.: Проблемы математики и механики. М.: Знание, 1983. 64 с.
3. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1, 2, 4-е изд. М.: Наука, 1983. Т. 1. 528 с.; 1984. Т. 2. 560 с.
4. *Леонтович М. А.* Введение в термодинамику. Статистическая физика. М.: Наука, 1983. 416 с.
5. *Сивухин В. Д.* Примечания редактора — в кн.: Леонтович М. А. Введение в термодинамику. Статистическая физика. М.: Наука, 1983, с. 390—413.
6. Обратимый процесс. — В кн.: Физический энциклопедический словарь. М.: Сов. энциклопедия, 1983, с. 477.
7. *Гиндин И. А., Неклюдов И. М.* Физика программного упрочнения. Киев: Наук. думка, 1979. 182 с.
8. *Хоңикомб Р.* Пластическая деформация металлов. М.: Мир, 1972. 408 с.
9. *Вакуленко А. А., Качанов Л. М.* Теория пластичности. — В кн.: Механика в СССР за 50 лет. Т. 3. М.: Наука, 1972, с. 79—119.

Ленинград

Поступила в редакцию  
10.IV.1984

Технический редактор *В. М. Пахомова*

Сдано в набор 25.05.84      Подписано к печати 23.07.84      Т-13166      Формат бумаги 70×108<sup>1/2</sup>  
Высокая печать      Усл. печ. л. 16,8      Усл. кр.-отг. 37,1 тыс.      Уч.-изд. л. 17,0      Бум. л. 6,0  
Тираж 2183 экз.      Зак. 222

Издательство «Наука», 103717, ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21  
2-я типография издательства «Наука», 121099, Москва, Шубинский пер., 10