УДК 539.3 : 534.1

ВЛИЯНИЕ УЗКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ШАХТ НА ВОЛНОВОЕ ПОЛЕ, ВОЗБУЖДАЕМОЕ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛОЙ В УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Суворова Т. В.

Рассматривается задача теории упругости о возбуждении волнового поля в пространстве, ослабленном системой цилиндрических шахт малого радиуса с жесткими стенками, сосредоточенной силой, приложенной в некоторой точке пространства вне шахт и изменяющейся по гармоническому закону. Решение этой задачи строится по принципу суперпозиции решений следующих задач: о неосесимметричных колебаниях упругого пространства под действием осциллирующей сосредоточенной силы (задача 1); о волновом поле, возникающем в упругом пространстве, пронизанном системой узких шахт, колеблющихся под действием приложенным к их стенкам гармонически изменяющихся напряжений (задача 2).

Излагаемый ниже метод применим также для исследования поля перемещений в упругом пространстве, снабженном системой упругих цилиндрических включений малого диаметра, либо системой шахт, заполненных жидкостью или вязкоупругой средой.

1. Рассмотрим задачу 1. Методом интегральных преобразований с использованием принципа излучения [1] получим формулы, описывающие волновое поле в пространстве, возбуждаемое сосредоточенной силой $\mathrm{X}e^{-i\omega t}$ ($\mathrm{X} = \{X_1, X_2, X_3\}$, ω — частота колебаний), приложенной к точке пространства с цилиндрическими координатами r_0, φ_0, z_0. Амплитудные значения составляющих вектора перемещений $\mathrm{u}^* = \{u^*, v^*, w^*\}$ в цилиндрических координатах имеют вид

(1.1)
$$u^*(r, \varphi, z) = \varkappa_3 \int_\sigma e^{i\alpha(z-z_0)} \sum_{m=1,2} (-1)^m \{[K_{0m}\cos\varphi - K_{2m}\cos(2\psi+\varphi)]X_1 +$$
$$+ [K_{0m}\sin\varphi + K_{2m}\sin(2\psi+\varphi)]X_2 - 2K_{1m}\cos(\psi-\varphi)X_3\}\, d\alpha$$
$$v^*(r, \varphi, z) = \varkappa_3 \int_\sigma e^{i\alpha(z-z_0)} \sum_{m=1,2} (-1)^m \{[K_{2m}\sin(2\psi+\varphi) - K_{0m}\sin\varphi]X_1 +$$
$$+ [K_{0m}\cos\varphi + K_{2m}\cos(2\psi+\varphi)]X_2 - 2K_{1m}\sin(\psi-\varphi)X_3\}\, d\alpha$$
$$w^*(r, \varphi, z) = \varkappa_3 \int_\sigma e^{i\alpha(z-z_0)} \sum_{m=1,2} (-1)^m \{K_{1m}(\cos\varphi X_1 + \sin\psi X_2) +$$
$$+ (\delta_{2m}\varkappa_2^2 - \alpha) K_0(R\sigma_m) X_3\}\, d\alpha$$
$$K_{0m} = [\alpha^2 + (-1)^m\varkappa_2^2]\, K_0(R\sigma_m), \quad K_{1m} = i\alpha\sigma_m K_1(R\sigma_m)$$
$$K_{2m} = \sigma_m^2 K_2(R\sigma_m), \quad \sigma_m = (\alpha^2 - \varkappa_m^2)^{1/2}, \quad m = 1, 2$$
$$\varkappa_1^2 = \rho\omega^2/(\lambda + 2\mu), \quad \varkappa_2^2 = \rho\omega^2/\mu, \quad \varkappa_3 = -1/(2\pi\varkappa_2^2)$$
$$e^{i\psi} = -r/Re^{i(\varphi-\varphi_0)} + r_0/R, \quad R = [r_0^2 + r^2 - 2r_0 r\cos(\varphi - \varphi_0)]^{1/2}$$

Здесь ρ — плотность упругой среды, λ, μ — постоянные Ламе, δ_{tm} — символ Кронекера, $K_n(x)$ — функция Макдональда. Соотношения (1.1) записаны в безразмерном виде, перемещения отнесены к линейной единице, усилия — к модулю сдвига μ. Контур интегрирования σ выбирается в соответствии с условиями излучения [1]. Он расположен на вещественной оси, отклоняясь от нее в положительную полуплоскость, обходя точки ветвления подынтегральной функции $-\varkappa_1$, $-\varkappa_2$, в отрицательную полуплоскость — обходя точки ветвления $\varkappa_1$, $\varkappa_2$.

На цилиндрической поверхности S малого радиуса a с центральной осью, параллельной оси z и проходящей через точку (b, γ, z_0), преобразование Фурье от составляющих вектора перемещений определяются формулами

(1.2)
$$u^*(r, \varphi, z) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} u^*(r, p, z)\, e^{ip\varphi}$$

(1.3)
$$U^*(r, p, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} u^*(r, p, z)\, e^{-i\alpha z}\, dz$$

(1.4)
$$U^*(b, \pm 1, \alpha)\,|_{r,\varphi\in S} = \varkappa_3 e^{-i\alpha z_0} \sum_{m=1,2} (-1)^m [(K_{0m} - K_{2m}e^{\pm 2i\theta}X_1) \mp$$

$$\mp i\,(K_{0m}+K_{2m}\,e^{\pm 2i\theta})\,X_2-2K_{1m}e^{\mp i\theta}X_3]$$

$$V^*(b,\pm 1,\alpha)\,|_{r,\,\varphi\in S}=\pm iU^*(b,\pm 1,\alpha)\,|_{r,\,\varphi\in S}$$

$$W^*(b,0,\alpha)\,|_{r,\,\varphi\in S}=\varkappa_3 e^{-i\alpha z_0}\sum_{m=1,2}(-1)^m\,[K_{1m}\,(\cos\theta X_1+\sin\theta X_2)+$$

$$+(\delta_{2m}\varkappa_2^2-\alpha)\,K_0\,(R\sigma_m)],\; e^{i\theta}=-\,be^{i(\gamma-\varphi_0)}/R+bR$$

$$W^*(b,\pm p,\alpha)\,|_{r,\,\varphi\in S}=O\,(a^p),\quad p\geqslant 1$$

$$U^*(b,0,\alpha)\,|_{r,\,\varphi\in S}=O\,(a),\quad U^*(b,\pm p,\alpha)\,|_{r,\,\varphi\in S}=O\,(a^{p-1}),\quad p\geqslant 1$$

$$V^*(b,0,\alpha)_{r,\,\varphi\in S}=O\,(a),\quad V^*(b,\pm p,\alpha)\,|_{r,\,\varphi\in S}=O\,(a^{p-1}),\quad p\geqslant 1$$

Формулы (1.4) выведены из (1.1) с использованием теоремы сложения для модифицированных функций Бесселя и их асимптотики при малом аргументе [2].

2. Задача 2 описывается уравнением Ламе в цилиндрической системе координат [3] и граничными условиями

$$\mathbf{q}\,(r,\varphi,z)\,e^{-i\omega t}\,|_{r,\,\varphi\in S_j}=\mathbf{q}_j\,(a,\varphi,z)\,e^{-i\omega t},\quad j=1,2,\ldots,N \tag{2.1}$$

где $\mathbf{q}_j\,(a,\,p,\,z)=\{q_j,\,p_j,\,\tau_j\}$ — амплитудное значение вектора напряжений на боковой поверхности S_j j-й шахты, $a\ll 1$ — радиус шахт, N — число шахт в системе. Образующие шахт и ось z параллельны. Положение шахт в системе определяется расстоянием между центрами i-й и j-й шахты b_{ij} и углом между полярной осью и перпендикуляром, соединяющим центры шахт γ_{ij}.

Так как режим колебаний предполагается установившимся, в дальнейшем будем оперировать только с амплитудными значениями соответствующих функций.

Применяя к уравнениям Ламе интегральное преобразование Фурье и удовлетворяя условиям (2.1), приходим к формулам, описывающим поле смещений $\mathbf{u}=\{u,\,v,\,w\}$

$$\mathbf{u}\,(r,\,\varphi,\,z)=\sum_{p=-\infty}^{\infty}e^{ip\varphi}\int_{\sigma}e^{i\alpha z}\,\underline{K}\,(r,\,p,\,\alpha,\,a)\,\mathbf{Q}_1\,(a,\,p,\alpha)\,d\alpha+ \tag{2.2}$$

$$+\sum_{j=2}^{N}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im\psi}\int_{\sigma}e^{i\alpha z}\,K\,(\rho_j,\,m,\,\alpha,\,a)\,\mathbf{Q}_j\,(a,\,m,\,\alpha)\,d\alpha$$

$$\mathbf{q}\,(a,\,\varphi,\,z)=\sum_{p=-\infty}^{\infty}\mathbf{q}\,(a,\,p,\,z)\,e^{ip\varphi} \tag{2.3}$$

$$\mathbf{Q}_j\,(a,\,p,\,\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\alpha z}\,\mathbf{q}_j\,(a,\,p,\,z)\,dz$$

$$\rho_j=(r^2+b_{1j}^2-2rb_{1j}\cos\varphi)^{1/2},\quad e^{\pm i\psi}=(re^{\pm i\varphi}-b_{1j})/\rho_j$$

$$K\,(r,\,p,\,\alpha,\,a)=F\,(r,\,p,\,\alpha)\,C\,(a,\,p,\,\alpha) \tag{2.4}$$

$$F\,(r,\,p,\,\alpha)=\{F_{ij}\},\; i,\,j=1,\,2,\,3$$

$$F_{11}=\partial R_{p1}/\partial r,\; F_{21}=ip/rR_{p1},\; F_{31}=-i\alpha R_{p1}$$

$$F_{1j}=\alpha mR_{(p+m)2},\; F_{2j}=-imF_{1j},\; F_{33}=im\sigma_2R_{p2},\; m=(-1)^j,\; j=1,\,2$$

$$C^{-1}\,(a,\,p,\,\alpha)=\{G_{ij}\}\,|_{r=a},\; i,\,j=1,\,2,\,3$$

$$G_{11}=2\partial^2R_{p1}/\partial r^2-(\lambda+\mu)\,\varkappa_1^2R_{p1}/\mu;\; G_{21}=-2i\alpha\partial R_{p1}/\partial r$$

$$G_{31}=2ip/r\,(\partial R_{p1}/\partial r-R_{p1}/r);\; G_{1j}=2m\alpha\partial R_{(p+m)2}/\partial r$$

$$G_{2j}=im\,[mp\sigma_2/rR_{p2}-(\alpha^2+\sigma_2^2)\,R_{(p+m)2}]$$

$$G_{3j}=i\alpha\sigma_2R_{(p+2m)2},\; j=2,\,3;\; R_{mn}=K_m\,(\sigma_nr),\; n=1,\,2$$

Элементы матрицы $C\,(a,\,p,\,\alpha)$ при малом a и $p>1$ имеют следующее асимптотическое поведение:

$$C_{i2}\,(a,\,p,\,\alpha)=O\left(\frac{a^{p+1}}{p!\,2^{p-1}}\right);\quad i=1,2,3 \tag{2.5}$$

$$C_{ij}\,(a,\,p,\,\alpha)=O\left(\frac{a^{p}}{p!\,2^{p-1}}\right);\quad j=1,3,\quad i=1,2,3$$

Члены бесконечных рядов формул (2.2) на основании (2.4), (2.5) убывают как $a^p/2^{p-1}p!$, поэтому достаточно рассматривать лишь первые гармоники $p=0,\,\pm 1$, при этом элементы матриц $K\,(r,\,0,\,\alpha,\,a)=\{K_{ij}^{\circ}\}$, $K\,(r,\,\pm 1,\,\alpha,\,a)=\{K_{ij}^{\pm 1}\}$ имеют простой вид:

(2.6) $$K_{11}^\circ = K_{12}^\circ = K_{21}^\circ = K_{23}^\circ = K_{31}^\circ = K_{32}^\circ = K_{22}^\circ = 0$$
$$K_{13}^\circ = i\alpha a\,(\sigma_1 R_{11} - \sigma_2 R_{12})/\varkappa_2^2,\ K_{33}^\circ = a\,(\sigma_2^2 R_{02} - \alpha^2 R_{01})/\varkappa_2^2$$
$$K_{11}^{\pm 1} = -a\,[2\sigma_1 \partial R_{11}/\partial r + \sigma_2^2 R_{22} + (\alpha^2 + \varkappa_2^2)\, R_{02}]/(4\varkappa_2^2)$$
$$K_{21}^{\pm 1} = -ai\,[2\sigma_1 R_{11}/r - \sigma_2^2 R_{22} + (\alpha^2 + \varkappa_2^2)\, R_{02}]/(4\varkappa_2^2)$$
$$K_{31}^{\pm 1} = 0.25 K_{13}^\circ;\ K_{13}^{\pm 1} = K_{23}^{\pm 1} = K_{33}^{\pm 1} = 0$$
$$K_{12}^{\pm 1} = \mp i K_{11}^{\pm 1};\ K_{22}^{\pm 1} = \mp i K_{21}^{\pm 1};\ K_{32}^{\pm 1} = \mp i K_{31}^{\pm 1}$$

3. На основании решений задач 1 и 2 находится волновое поле

(3.1) $$\mathbf{u}^\circ (r, \varphi, z) = \mathbf{u}\,(r, \varphi, z) + \mathbf{u}^* (r, \varphi, z)$$

Начало координат находится на оси симметрии одной из шахт — будем считать ее шахтой № 1.

Неизвестные функции $Q_i\,(a, p, \alpha)$, $i = 1, 2, \ldots, N$ в (3.1), определяющие напряжения на стенках шахт, находятся из условий жесткости стенок шахт

(3.2) $$\mathbf{u}^\circ (r, \varphi, z)\,|_{r,\,\varphi \in S_j} = 0,\ j = 1, 2, \ldots, N$$

Удовлетворим условиям (3.2) для каждой гармоники ряда Фурье перемещений, предварительно в (2.2) перейдем от локальных систем координат ρ_j, ψ_j с началом в центре i-й шахты к системе координат r, φ, используя теорему сложения для функций Макдональда [2]. Учитывая малость радиуса шахты a, формулы и асимптотические оценки (1.4) и пренебрегая членами, вклад которых мал по сравнению с остальными, приходим к системе интегральных уравнений второго рода для определения неизвестных функций $\tau_j\,(a, 0, z)$ и комбинаций $q_j^1 = q_j\,(a, 1, z) - ip_j\,(a, 1, z)$; $q_j^2 = q_j\,(a, -1, z) + ip_j\,(a, -1, z)$; в преобразованиях Фурье система имеет вид

(3.3) $$\ln a \mathrm{T}_j\,(a, 0, \alpha) - \varkappa_2^{-2} \sum_{\substack{m=1\\ m\neq j}}^{N} \{y_1 (\alpha, b_{jm})\, \mathrm{T}_m\,(a, 0, \alpha) + i/2\alpha y_2\,(\alpha, b_{jm}) \times$$
$$\times [Q_m^2 \exp(-i\gamma_{jm}) - Q_m^1 \exp(i\gamma_{jm})]\} = a^{-1} W^*\,(b_{1j}, 0, \alpha)\,|_{r,\,\varphi\in S_j}$$
$$(\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2)\, a \ln a Q_j^1 + \sum_{\substack{m=1\\ m\neq j}}^{N} \{i\alpha \exp(-i\gamma_{jm})\, y_2\,(\alpha, b_{jm})\, \mathrm{T}_m\,(a, 0, \alpha) +$$
$$+ y_3\,(\alpha, b_{jm})\, Q_m^1 + \exp(-2i\gamma_{jm})\, y_4 (\alpha, b_{jm}) Q_m^2\} = -4\varkappa_2^2 U^*\,(b_{1j}, 1, \alpha)|_{r,\,\varphi\in S_j}$$
$$(\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2)\, a \ln a\, Q_j^2 + \sum_{\substack{m=1\\ m\neq j}}^{N} \{i\alpha \exp(i\gamma_{jm})\, y_2\,(\alpha, b_{jm})\, \mathrm{T}_m\,(a, 0, \alpha) +$$
$$+ \exp(2i\gamma_{jm})\, y_3\,(\alpha, b_{jm})\, Q_m^1 + y_4\,(\alpha, b_{jm})\, Q_m^2\} = -4U^*\,(b_{1j}, -1, \alpha)\,|_{r,\,\varphi\in S_j}$$
$$y_1\,(\alpha, r) = \alpha^2 R_{01} - \sigma_2^2 R_{02},\ y_2\,(\alpha, r) = \sigma_1 R_{11} - \sigma_2 R_{12}$$
$$y_3\,(\alpha, r) = \sigma_1^2 R_{21} - (\alpha^2 + \varkappa_2^2)\, R_{22},\ y_4\,(\alpha, r) = \sigma_1^2 R_{01} - \sigma_2^2 R_{02}$$

Связь величин, обозначенных заглавными и строчными буквами q, p, τ, дается формулой (2.3).

Система (3.3) может быть решена методом последовательных приближений, легко видеть, что ее порядок понижается до 3.

Взаимное влияние узких шахт прослеживается только на низших гармониках $p = 0, \pm 1$ разложений рядов Фурье; начиная с $p \geqslant 2$ оно пренебрежимо мало. На определение функций $Q_j\,(a, 0, \alpha)$, $P_j\,(a, 0, \alpha)$, $\tau_j\,(a, \pm 1, \alpha)$, $Q_j\,(a, \pm p, \alpha)$, $p \geqslant 2$ наличие соседних шахт влияния не оказывает, эти функции вносят в волновое поле вклад порядка a^2 и выше. Функции $\tau_j\,(a, 0, \alpha)$, Q_j^1, Q_j^2 зависят от взаимного расположения шахт и напряжении на их стенках. Составляющая волнового поля, обусловленная этими функциями, имеет порядок $1/\ln a$. Принимая во внимание (2.5) и вышесказанное приходим к выводу, что волновое поле задачи определяется функциями $\tau_j\,(a, 0, \alpha)$, Q_j^1, Q_j^2. Поле перемещений исходной задачи определяется формулами (3.1), (2.2), (1.1); в формулах (2.2) достаточно положить p, $m = 0, \pm 1$.

В случае $N = 1$ соотношения (3.1) принимают наиболее простой вид:

$$u^\circ (r, \varphi, z) = \frac{1}{\ln a} \int_\sigma e^{i\alpha z} \left\{ -\frac{i\alpha}{\varkappa_2^2}\, y_4\,(a, z)\, W^*(a, 0, a) + \right.$$
$$\left. + \frac{K_{11}^1\,(r, 1, \alpha, a)}{\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2}\, [e^{i\varphi} U^*\,(a, 1, \alpha) + e^{-i\varphi}\, U\,(a, -1, \alpha)] \right\} d\alpha + u^*\,(r, \varphi, z)$$

$$v^{\circ}(r, \varphi, z) = \frac{1}{\ln a\,(\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2)} \int\limits_{\sigma} e^{i\alpha z} K_{21}^1(r, 1, \alpha, a)[e^{i\varphi} U^*(a, 1, \alpha) +$$

$$+ e^{-i\varphi} U^*(a, -1, \alpha)]\, d\alpha + v^*(r, \varphi, z)$$

$$w^{\circ}(r, \varphi, z) = -\frac{1}{\ln a} \int\limits_{\sigma} \varkappa_2^{-2} e^{i\alpha z} \Big\{ y_1(\alpha, r)\, W^*(a, 0, \alpha) +$$

$$+ \frac{i\alpha}{\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2}\, y_2(\alpha, r)[e^{i\varphi} U^*(a, 1, \alpha) + e^{-i\varphi} U^*(a, -1, \alpha)] \Big\}\, da + w^*(r, \varphi, z)$$

Следует отметить, что вблизи боковой поверхности шахты составляющие поля перемещений, вызываемые влиянием соседних шахт и самой шахтой, относятся, как $1 : \ln a$.

Система шахт малого радиуса a, пронизывающих упругое пространство, вызывает возмущение волнового поля упругой среды порядка $1/\ln a$. Этот вклад зависит как от числа шахт в системе, так и от их расположения.

Автор благодарит В. А. Бабешко за внимание к работе и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974. 295 с.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1965. 203 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
12.VII.1982

УДК 531/539

К ВОПРОСУ О ВОЗМОЖНОСТИ НЕОБРАТИМЫХ КВАЗИСТАТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В МАКРОСИСТЕМЕ

Вакуленко А. А.

В термодинамике довольно долго рассматривались только такие системы, при квазистатических [1] процессах в которых текущее макросостояние системы практически не зависит от предшествующей истории изменения внешних параметров. Отсутствие «памяти» характерно для квазистатических процессов в газах и обычных жидкостях, равно как и для обратимых процессов в любой системе. Но квазистатичность (равновесность) процесса не всегда означает отсутствие «памяти», и тем самым, близость процесса к обратимому. С формальной точки зрения это связано с тем, что не всякая дифференциальная форма является точным дифференциалом (интегрируемой формой).

Рассмотрим какую-либо достаточно простую термодинамическую систему, полный набор внешних параметров которой образует конечное множество переменных величин. Обозначим эти параметры через $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и условимся, что для системы в термостате в их число входит и температура термостата. Тогда полнота этой системы a_i внешних параметров означает, что всегда, когда каждый из них является заданной функцией времени на интервале $-\infty < \tau < t$, определенными в момент t будут и все внутренние параметры ξ_α рассматриваемой термодинамической системы. Пусть функции $a_i \stackrel{d}{=} a_i(t)$ можно задать так, что для каждого $t \in (-\infty, \infty)$ и каждого из параметров ξ_α справедливо соотношение вида

$$\frac{d\xi_\alpha}{dt} = \sum_{k=1}^{n} C_{\alpha k} \frac{da_k}{dt} \tag{1}$$

где $C_{\alpha k}$ — некоторые функции параметров ξ_α, a_k и, возможно, других характеристик траектории процесса в пространстве состояний системы. При надлежащем условии ограниченности функций $C_{\alpha k}$ из (1) следует, что с фиксированием в любой момент

[1] Принятое здесь определение квазистатического процесса соответствует общепринятому (например [1—5]), обратимость процесса понимается в узком смысле [5].