

$\equiv \text{const.}$ Уравнения возмущенного движения будут

$$(11) \quad \begin{aligned} 2x_1' - x_2x_3 + \mu y_2y_3 &= 0 \\ 2x_2' + (\omega + \kappa)x_3 - ay_3 + x_1x_3 - \mu y_3(1 + y_1) &= 0 \\ x_3' - \kappa x_2 + ay_2 = 0, \quad y_1' + x_2y_3 - x_3y_2 &= 0 \\ y_2' + x_3 - (\omega + x_1)y_3 + x_3y_1 = 0, \quad y_3' - x_3 + (\omega + x_1)y_2 + x_2y_1 &= 0 \\ a = 2mgx_0/A, \quad \kappa = 2k/A \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение линеаризованной системы (11)

$$2\lambda^2 [2\lambda^4 + (2\omega^2 - 3a + \kappa(\omega + \kappa) - \mu)\lambda^2 + a(a - \omega^2 + \mu) + \kappa\omega(\omega^2 - 2a - \mu + \omega\kappa)] = 0$$

при устойчивых перманентных вращениях $a < \kappa\omega$ имеет два нулевых корня и две пары чисто мнимых корней $\pm i\omega_k$, поэтому преобразование уравнений к нормальным координатам a_k, ξ_k, u_k проведем по следующим формулам:

$$\begin{aligned} x_1 = \xi_1, \quad x_2 = -\sum_{i=1}^2 d_{1i}a_i \sin u_i, \quad x_3 = \sum_{i=1}^2 c_{1i}a_i \cos u_i \\ y_1 = \xi_2, \quad y_2 = -\sum_{i=1}^2 d_{2i}a_i \sin u_i, \quad y_3 = \sum_{i=1}^2 c_{2i}a_i \cos u_i \\ c_{1k} = a\omega - \kappa(\omega^2 - \omega_k^2), \quad c_{2k} = a + \omega_k^2 - \kappa\omega \\ d_{1k} = \omega_k(a + \omega_k^2 - \omega^2), \quad d_{2k} = -\omega_k(\omega - \kappa) \quad (k = 1, 2) \end{aligned}$$

Осредненные уравнения

$$\begin{aligned} a_k' = 0, \quad \xi_k' = 0, \quad u_k' = \omega_k + (-1)^k 2^{-1}(\alpha_{kk} + \beta_{kk}) = \omega_k^* \\ \alpha_{kk} = c_{1,3-k} [-\xi_1 d_{2k} + \xi_2 d_{1k}] (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})^{-1} \\ \beta_{kk} = [-\xi_1 (2^{-1}c_{1k}d_{2,3-k} + c_{2k}d_{1,3-k}) + \\ + \xi_2 (c_{1k}d_{1,3-k} + 2^{-1}\mu c_{2k}d_{2,3-k})] (d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21})^{-1} \end{aligned}$$

имеют решение $a_k = a_{k0}, \xi_k = \xi_{k0}, u_k = \omega_k^* t + u_{k0}$, которое показывает, что переменные x_i, y_i — квазипериодические функции времени с периодами $T_k = 2\pi/\omega_k^*$.

Если движение гиростата происходит в однородном поле тяжести ($\mu = 0$), то движение по переменным x_i, y_i остается квазипериодическим.

Наличие гиростатического момента приводит к изменению частот колебаний в окрестности устойчивых вращений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Апыхтин Н. Г. О колебаниях твердого тела около устойчивых перманентных вращений. — ПММ, 1979, т. 43, вып. 5, с. 945—948.
2. Демин В. Г., Киселев Ф. И. О периодических движениях твердого тела в центральном ньютоновском поле. — ПММ, 1974, т. 38, вып. 2, с. 224—227.
3. Румянцев В. В. Об устойчивости движения гиростатов. — ПММ, 1961, т. 25, вып. 1, с. 9—16.

Кишинев

Поступила в редакцию
7.1.1983.

УДК 532.516

О НЕЕДИНСТВЕННОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ РЕШЕНИЙ В ВЯЗКОМ СЛОЕ

Бунов А. В., Демёхин Е. А., Шкадов В. Я.

Рассматриваются решения типа стационарных бегущих волн в стекающих слоях вязкой жидкости. Изучается однопараметрическое семейство волн [1], мягко ответвляющееся на верхней ветви кривой нейтральной устойчивости от плоскопараллельного течения и переходящее при стремлении к нулю волнового числа в отрицательный солитон (фазовая скорость $c < 3$). Показано, что это семейство не является единственным: от него с половинным периодом ответвляется при малых значениях параметра

δ , характеризующего расход, второе и третье семейства волн. Найдено критическое значение $\delta = \delta_*$, при котором точки бифуркации второго и третьего семейства сливаются, а при $\delta > \delta_*$ — уходят в комплексную плоскость; аналитически получена зависимость от δ волнового числа, при котором происходит бифуркация. Изучаются свойства второго семейства типа периодических волн и положительных солитонов, для которых $c > 3$. Решения строятся численно: периодические решения продолжают по параметру от точек бифуркации или от известных решений с использованием метода инвариантного погружения; солитонные решения строятся сращиванием линейных асимптотик при стремлении значений продольной координаты к бесконечности.

1. Установившиеся волновые движения вязкой жидкости в плоском слое на вертикальной поверхности в длинноволновом приближении описываются уравнением [2, 3]

$$(1.1) \quad h^3 h''' + \delta [6(q - c)^2 - c^2 h^2] h' + [h^3 - q - c(h - 1)] = 0$$

$$\delta = 3^{-7/6} 5^{-1} \gamma^{-4/3} R^{11/6}, \quad \gamma = \sigma \rho^{-1} \nu^{-4/3} g^{-1/3}$$

Здесь $h(x)$ — толщина слоя, q — средний расход, c — фазовая скорость, отнесенная к среднерасходной скорости ламинарного безволнового течения, σ — коэффициент поверхностного натяжения, R — число Рейнольдса, вычисляемое по среднерасходной скорости и толщине слоя, соответствующими безволновому течению, x — продольная координата.

Условия для периодических волн

$$(1.2) \quad h(0) = h\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right), \quad h'(0) = h'\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right), \quad h''(0) =$$

$$= h''\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right), \quad \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi/\alpha} h dx = 1$$

и для уединенных волн (солитонов)

$$(1.3) \quad h \rightarrow 1, \quad h^{(n)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow \pm \infty$$

Плоскопараллельному безволновому течению соответствует тривиальное решение $h(x) \equiv 1, q = 1$. Как показано в [2], от тривиального решения в точке $\alpha_0 = \sqrt{15\delta}$ мягко ответвляется автоколебательное волновое решение. Основные свойства этих решений исследованы в [2, 4].

Вводя малый параметр ε , в полукрестности $\alpha = \alpha_0$ получаем разложение

$$(1.4) \quad s = \alpha/\alpha_0 = 1 - \varepsilon^2, \quad c = 3 - 12,3\varepsilon^2\beta^2, \quad q = 1 + 6\varepsilon^2\beta^2$$

$$\beta^2 = \frac{2}{3} \alpha_0^6 (1 + 4,14\alpha_0^6)^{-1}, \quad h =$$

$$= 1 + 2\varepsilon\beta \sin x - \frac{\varepsilon^2\beta^2}{\alpha_0^3} \sin 2x + \frac{7}{5} \varepsilon^2\beta^2 \cos 2x$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ разложение (1.4) стремится к точному решению. Формулы (1.4) можно получить также из решения [2] разложением по амплитуде ε .

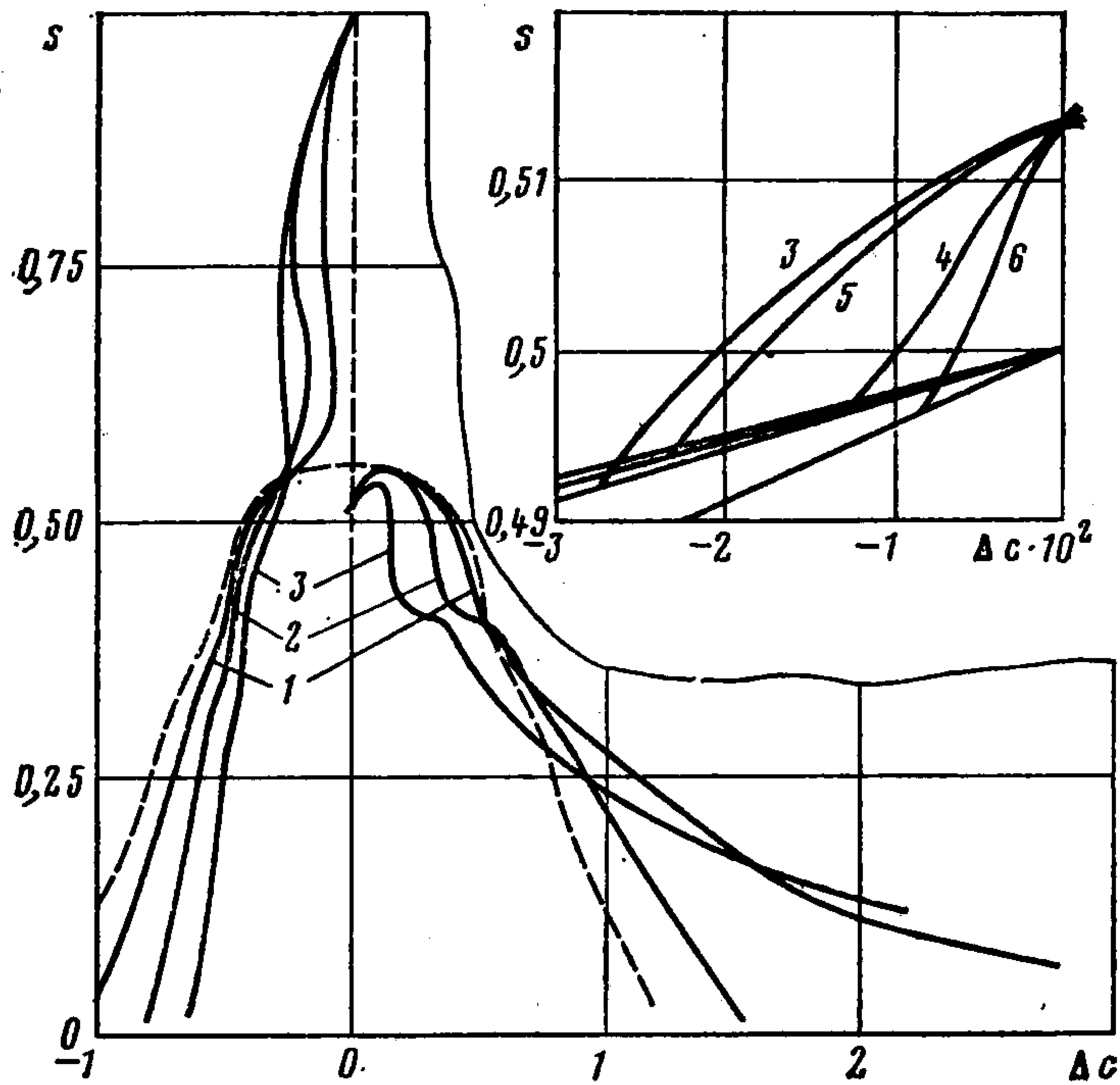
Для продолжения решения (1.4) по параметру $s = \alpha/\alpha_0$ воспользуемся методом инвариантного погружения [5]. Введем сжатие независимой переменной $x \rightarrow \alpha x$, так, что $x \in [0, 2\pi]$. Периодическое решение ищется в виде

$$(1.5) \quad h = \sum_{k=-N}^N h_k e^{ikx}, \quad h_{-k} = \bar{h}_k, \quad h_0 = 1, \quad \text{Im}\{h_1\} = 0$$

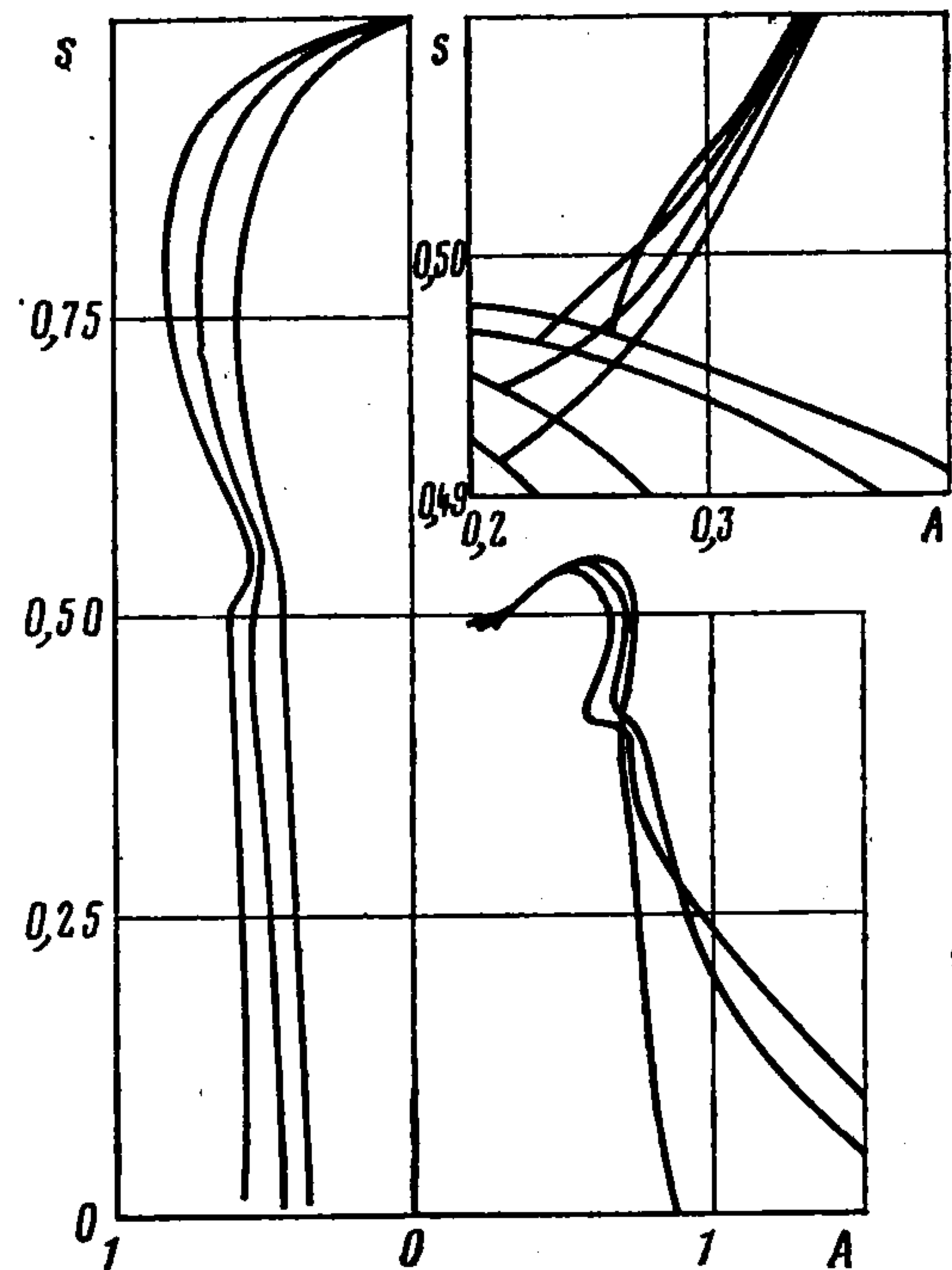
Подставляя (1.5) в (1.1) и собирая члены при одинаковых гармониках, получаем нелинейную систему из $2N + 1$ уравнений относительно $2N + 1$ неизвестных q, c, h_k ($k = 1, 2, \dots, N$). Величины α и δ считаются заданными. Число гармоник определялось условием $N = 4 \text{ entier}(\alpha/\alpha_0)$ при этом в большинстве случаев $|h_N/h_1| < 10^{-3}$.

Дополним систему заданием кривой $\alpha = \alpha(\lambda), \delta = \delta(\lambda)$ в пространстве параметров, где λ — некоторый параметр. Продифференцировав нелинейную систему по λ , получим систему $2N + 1$ обыкновенных дифференциальных уравнений. Если задано решение в некоторой точке кривой, то численным интегрированием его можно продолжить на всю кривую $\alpha = \alpha(\lambda), \delta = \delta(\lambda)$ вплоть до особой точки, например точки бифуркации. Заметим, что в ряде случаев деформацией кривой удается снять вырождение системы и обойти особую точку. Указанный метод позволил находить решение в областях с резкими изменениями искомых функций от параметров задачи.

Этим методом с начальными данными (1.4) было подробно изучено первое семейство волновых решений в области $s \in (s_0, 1)$, $\delta \in (0, 1)$. При $\delta > 1$ решение фактически не отличается от асимптотического при $\delta \rightarrow \infty$. Периодическое решение удается довести до $s \approx 0,1$; периодическая волна мало отличается при этом значении s от уединенной. При $s = 0$ семейство дополнялось отрицательным солитоном. Так как фазовая скорость солитона, относящегося к первому семейству, $c < 3$, то условимся называть его отрицательным в отличие от положительного солитона, для которого $c > 3$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Для нахождения солитонного решения воспользуемся методом [4]. Так как $h_1 = h - 1 \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm \infty$, то (1.1) после линеаризации переходит в уравнение

$$(1.6) \quad h_1''' + \rho \omega h_1' + (3 - c) h_1 = 0, \quad \omega = 5c^2 - 12c + 6$$

имеющее три линейно-независимых решения. Из анализа характеристического полинома (1.6) можно показать, что при $\delta < 2,38$ один из фронтов солитона, соответствующий двум комплексно-сопряженным корням полинома, осциллирует: при $c > 3$ — передний, при $c < 3$ — задний.

Пусть при фиксированном δ известно приближенное значение $c < 3$. Корни характеристического полинома $\sigma_1 = 2m < 0$, $\sigma_{2,3} = -m \pm i\beta$. В силу затухания решения при $x \rightarrow +\infty$ в качестве начальных условий можно взять $h = 1 + \varepsilon$, $h' = 2\varepsilon m$, $h'' = 4\varepsilon m^2$, $\varepsilon = 0,01$. Интегрируя уравнение (1.1) от этих начальных условий в сторону меньших x , доходим до области, где справедлива асимптотика $x \rightarrow -\infty$ (c близко к собственному значению), и следовательно, решение имеет вид

$$h \approx 1 + A e^{2mx} + B e^{-mx} \sin(\beta x + \psi),$$

(A, B, ψ можно выразить через h, h', h''). Если c — собственное значение, то растущее при $x \rightarrow -\infty$ решение подавляется, т. е. $A(c)$ обращается в нуль. Можно показать, что для обращения A в нуль необходимо, чтобы $(m^2 + \beta^2)(h - 1) + 2mh' + h'' = 0$. В процессе расчетов подбираем c так, чтобы выполнялось это условие.

Для положительного солитона $c > 3$ поступаем аналогичным образом, но численное интегрирование (1.1) ведем в сторону больших x . При $c = 3$ уединенная волна не существует: интегрированием (1.1) по x при $c = 3$ получаем соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} (h - 1)^2 (h + 2) h^{-3} dx = 0$$

которое удовлетворяется только при $h(x) = 1$.

Для представления результатов конкретных расчетов при малых δ введем независимые переменные $\Delta c, Q, H(X)$:

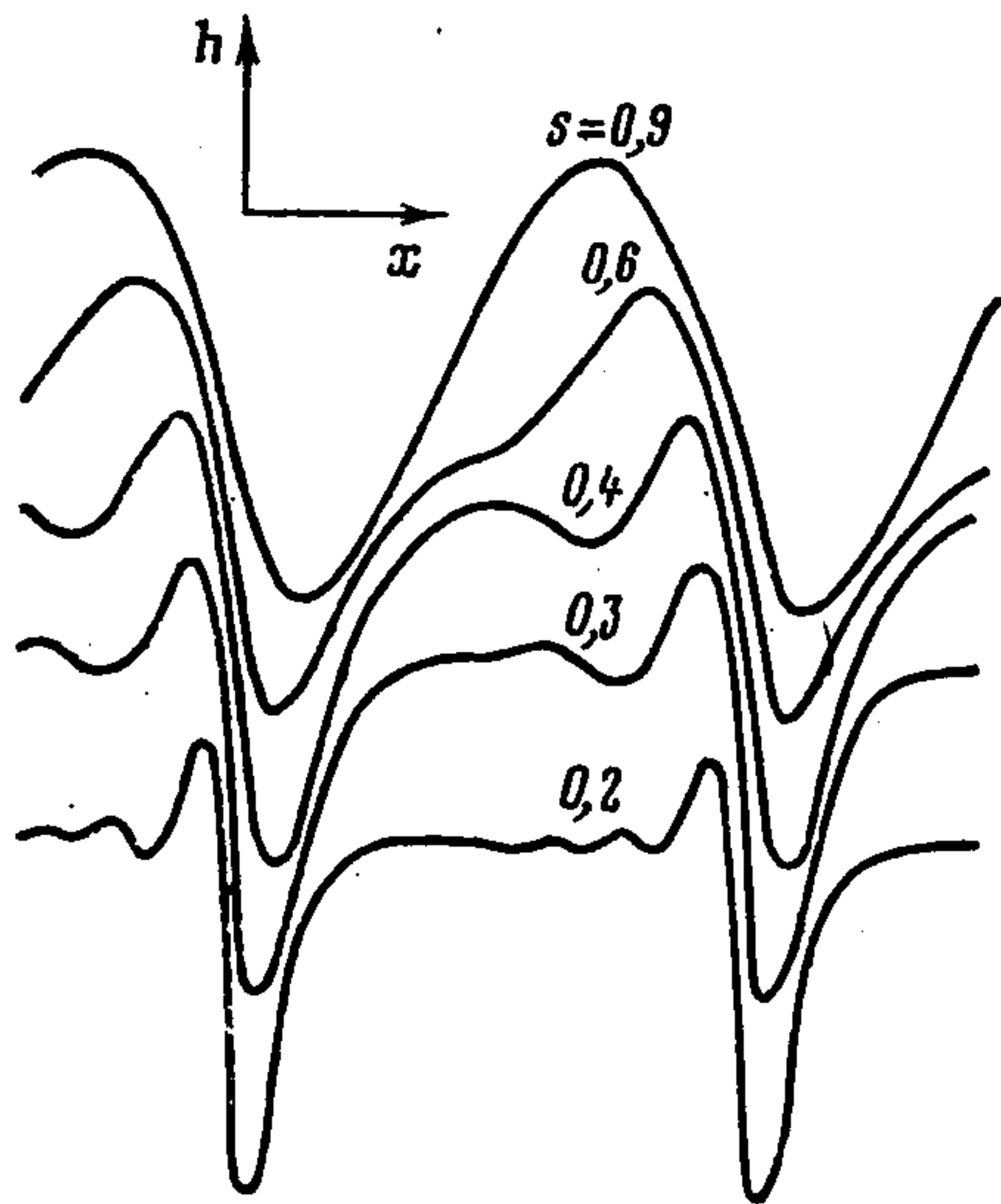
$$c = 3 + \alpha_0^3 \Delta c, \quad q = 1 + \alpha_0^6 Q, \quad h = 1 + \alpha_0^3 H, \quad \frac{d}{dx} = \alpha_0 \frac{d}{dX}$$

Большие буквы относятся к растянутым переменным, малые — к нерастянутым. Тогда при $\delta \rightarrow 0$ (1.1) в растянутых переменных переходит в модельное уравнение [6, 7]

$$(1.7) \quad H''' + H' - \Delta c H + 3H^2 = Q$$

На фиг. 1, 2 (слева) показаны для первого семейства зависимости Δc , $A = H_+ - H_-$ от s и δ . Цифры у кривых соответствуют значениям $\delta \cdot 10^2$. Штриховые линии отвечают значению $\delta = 0$.

С увеличением δ характеристики волн мало различаются для разных δ . Лишь в длинноволновой части сохраняется определенное различие фазовых скоростей, расхождений и амплитуд, которое также уменьшается с ростом δ .



Фиг. 3

Решение для $\delta = 1$ при $s > 0,25$ хорошо согласуется с асимптотикой $\delta = \infty$.

При малых δ , как видно из фиг. 1, 2, имеются два максимума амплитуды: один большой, в области оптимальных режимов $s \approx 0,8$ [2]; другой меньший, при $s \approx 0,4$. При увеличении δ малый максимум исчезает, большой же начинает смещаться в сторону $s = 0$.

На фиг. 3 показана эволюция формы первого семейства при $\delta = 0,04$ с уменьшением s . При $\delta \rightarrow \infty$ форма волны становится симметричной, пропадают характерные для малых s осцилляции за впадиной. При малых s установлению симметричной формы соответствуют большие δ .

Ниже даны [параметры отрицательных солитонов: фазовая скорость c и амплитуда $a = h_+ - h_-$ (индексы плюс и минус означают наибольшее и наименьшее значения величин)]

δ	0,01	0,03	0,06	0,1	0,2	0,4	1,0
c	2,93	2,73	2,47	2,22	1,91	1,65	1,45
a	0,036	0,149	0,285	0,446	0,649	0,847	0,971

Эти результаты согласуются по значениям фазовой скорости с результатами [4].

2. Из точек $s = 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots$ от тривиального решения ответвляются автоколебательные решения первого семейства с периодами соответственно $\pi, 2\pi/3, \dots, 2\pi/n, \dots$. В частности, из $s = 1/2$ выходит решение, получаемое из (1.4) заменой $x \rightarrow 2x$

$$(2.1) \quad s = \frac{1}{2} (1 - \varepsilon^2), \quad h = 1 + 2\varepsilon\beta \sin 2x - \frac{\varepsilon^2\beta^2}{\alpha_0^3} \sin 4x + \frac{7}{5} \varepsilon^2\beta^2 \cos 4x$$

Рассмотрим π -периодическое решение (2.1) как выродившееся 2π -периодическое решение с равными нулю нечетными гармониками. При этом от выродившегося решения в принципе может ответвиться автоколебательное решение с неравными нулю нечетными гармониками. Наложим на решение первого семейства возмущение $h \rightarrow h + \mu f, q \rightarrow q + \mu U, c \rightarrow c + \mu \delta c$. После подстановки в (1.1) и перехода к пределу получим уравнение

$$\begin{aligned} Af''' + Bf' + Df + Ru + G\delta c &= 0 \\ A &= \alpha^3 h^3, \quad B = \alpha \delta [6(q - c)^2 + c^2 h^2] \\ D &= 3\alpha^3 h^2 h''' - 2\alpha \delta c^2 h h' + 3h^2 - c \\ R &= 12\alpha \delta (q - c) h' - 1 \\ G &= -2\alpha \delta h' [6(q - c) + c^2 h^2] + 1 - h \end{aligned}$$

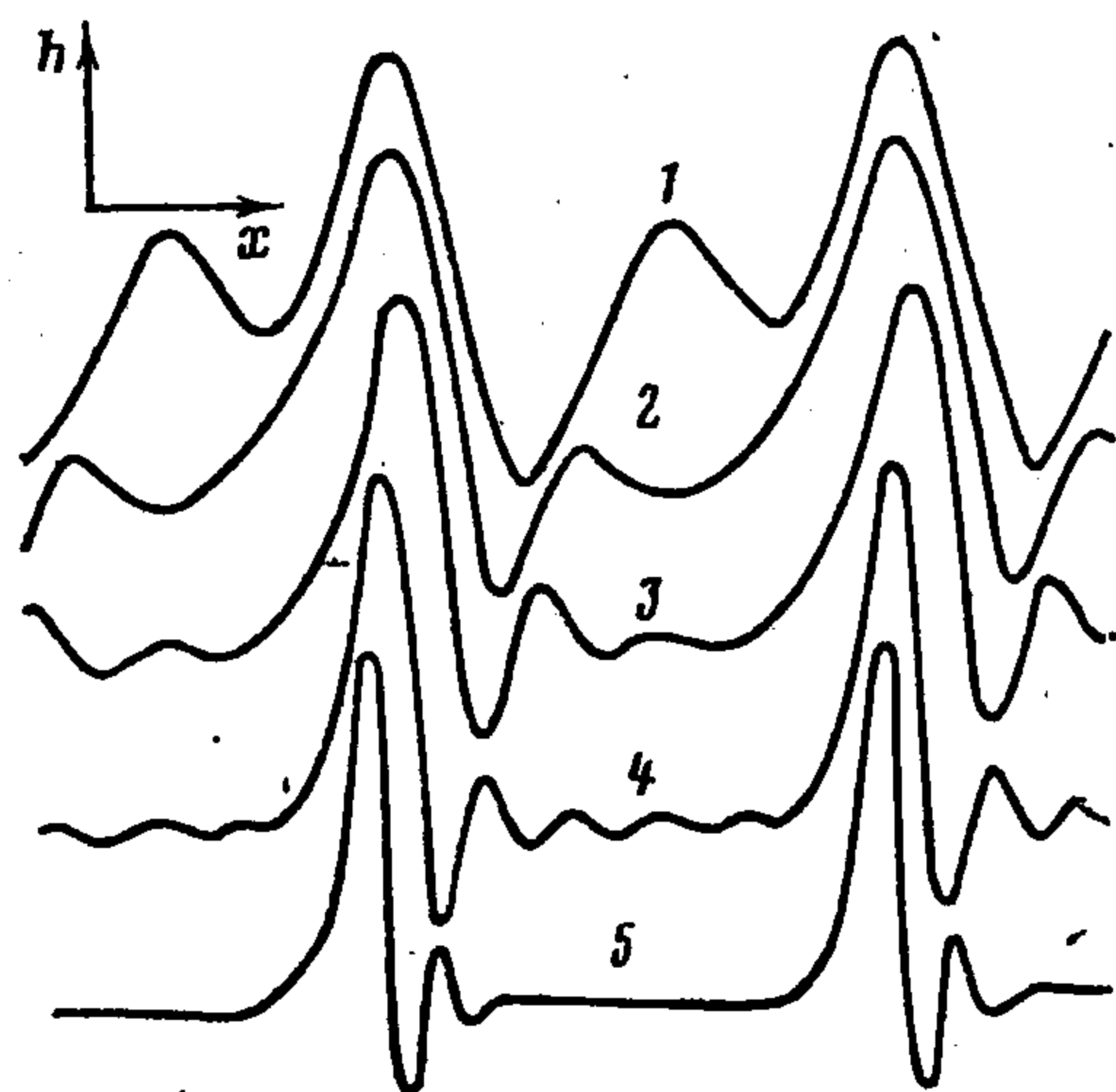
Условием бифуркации служит существование 2π -периодических нетривиальных решений следующей линейной задачи с π -периодическими коэффициентами:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} Af''' + Bf' + Df &= 0 \\ f(0) &= f(2\pi), \quad f'(0) = f'(2\pi), \quad f''(0) = f''(2\pi) \end{aligned}$$

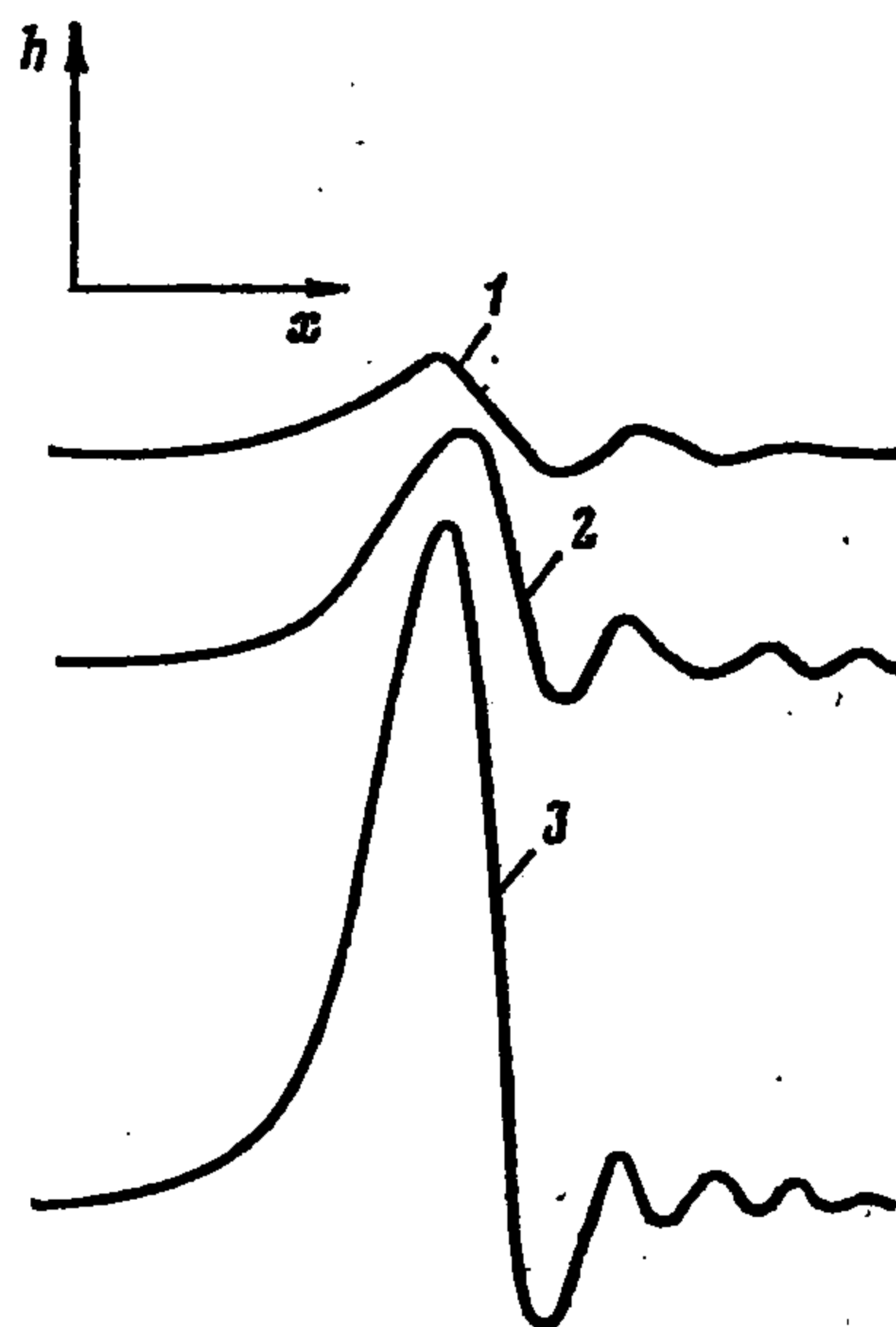
Допустим, что ответвление происходит в малой, но конечной окрестности $s = 1/2$, так, что можно воспользоваться решением (2.1). Будем искать f в виде

$$f = \sum_{k=1}^4 (F_k \sin kx + \Phi_k \cos kx)$$

Подставляя выражение для f в (2.2) и расписывая коэффициенты A, B, D с использованием (2.1), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно F_k, Φ_k восьмого порядка с нулевой правой частью. Таким образом, условием ветвления является вырожденность главной матрицы восьмого порядка, которую не выписываем вследствие громоздкости. Далее можно показать, что четные и нечетные F_k, Φ_k входят в уравнение независимо, и для условия ветвления достаточно взять матрицу четвертого порядка, порождаемую нечетными гармониками $\sin x, \cos x, \sin 3x, \cos 3x$.



Фиг. 4



Фиг. 5

После вычисления определителя указанной матрицы и пренебрежения членами порядка выше ε^4 , что эквивалентно сохранению членов порядка ε^2 в (2.1), получаем окончательный вид условия ветвления

$$(2.3) \quad a\varepsilon^4 + b\varepsilon^2 + 1 = 0$$

$$a = 134,94 (23,05 + 27,6\alpha_0^6 + \alpha_0^{12})(1 + 4,14 \alpha_0^6)^{-2}$$

$$b = -20,79 (12,74 + \alpha_0^6)(1 + 4,14\alpha_0^6)^{-1}, \quad \alpha_0 = \sqrt{15\delta}$$

Зависимость $\varepsilon^2 = \varepsilon^2(\delta)$ дана ниже

$\delta \cdot 10^2$	0	2	4	6	8	10	12
$\varepsilon_1^2 \cdot 10^3$	4,2	4,7	6,88	17	33	60	99
$\varepsilon_2^2 \cdot 10^3$	7,6	8,6	11	16	20	22	22

Заметим, что введенное вначале рассуждений предположение о малости ε^2 выполняется. При $\delta > \delta_* \approx 0,138$ действительные решения (2.3) отсутствуют, следовательно, при $\delta \in (0, \delta_*)$ от первого семейства ответвляются еще два, а при $\delta > \delta_*$ эти последние семейства сливаются в одно.

Далее ограничимся меньшим корнем.

Семейство, ответвляющееся при этом, условимся называть вторым семейством. Окрестность точки бифуркации дана на фиг. 1, 2. Из точки $s = 1/2$ выходит первое семейство с удвоенной частотой, от этого семейства ответвляется второе. Зависимость $\Delta c, A = H_+ - H_-$ от s и δ для второго семейства показана на фиг. 1, 2 (справа). Как видно из графиков, по мере отхода от точки бифуркации нормированное волновое число s сначала увеличивается, а затем, пройдя через максимум ($s \in (0,53, 0,58)$ для рассмотренных δ), уменьшается. При $s \rightarrow 0$ второе семейство может, в частности, переходить в положительный солитон. Второе семейство волн наблюдалось в экспериментах [8, 9].

На фиг. 4 показана эволюция формы семейства с удалением от точки ветвления и постепенный переход к положительному солитону при $\delta = 0,04$ 1 — $\Delta c = 1,5 \cdot 10^{-3}$, 2 — 0,363, 3 — 0,711, 4 — 1,059, 5 — 1,41; здесь вследствие неоднозначной зависимости от s берется зависимость от скорости $\Delta c = (c - 3)/\alpha_0^3$. В небольшой окрестности точки бифуркации $c < 3$, в основном же для второго семейства $c > 3$. При $\delta = 0$ (фиг. 1, штриховые линии) и $s > 0,58$ имеется одна ветвь $\Delta c = 0$; при $s < 0,58$ имеются три ветви, выходящие из точки ветвления: $\Delta c = 0, c > 3, c < 3$. (В [10] найдены для этого случая две такие ветви.)

Ветвь $\Delta c = 0$ доходит до точки $s = 0,4979$, что совпадает со значением, полученным численным продолжением семейства от $s = 1$ в [11]. Бифуркация при $\delta = 0$ не является бифуркацией общего положения и имеет место вследствие высокой симметрии уравнения (1.6); при малом шевелении параметра δ бифуркация распадается ([12], рис. 120), и тогда имеем две ветви первого и второго семейства. При увеличении δ асимметрия семейств растет, сильнее всего она проявляется на солитонных решениях (см. фиг. 5, положительные солитоны: 1 — $\delta = 0,02$, 2 — $0,03$, 3 — $0,0392$). Скажем, при $\delta = 0,0392$ амплитуда положительного солитона в пять раз больше амплитуды отрицательного. Зависимость фазовой скорости и амплитуды приведена ниже

δ	0,01	0,02	0,03	0,035	0,0392
c	3,076	3,26	3,65	4,09	4,96
a	0,041	0,136	0,336	0,563	0,976

Исследованию солитонных решений для модельного уравнения посвящены работы [10, 13], нестационарных решений типа уединенных волн — работа [14].

Авторы признательны В. И. Арнольду и А. А. Непомнящему за обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Капица П. Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. — Ж. эксперим. и теор. физики, 1948, т. 18, вып. 1, с. 3—28.
2. Шкадов В. Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1, с. 43—51.
3. Шкадов В. Я. К теории волновых течений тонкого слоя вязкой жидкости. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 2, с. 20—25.
4. Шкадов В. Я. Уединенные волны в слое вязкой жидкости. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 1, с. 63—66.
5. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М.: Мир, 1968. 183 с.
6. Непомнящий А. А. Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 3, с. 28—34.
7. Веннеу В. J. Long waves on liquid films. — J. Math. and Phys., 1966, v. 45, No. 2, p. 150—155.
8. Накоряков В. Е., Покусеев Б. Г., Алексеенко С. В. Стационарные двумерные катящиеся волны на вертикальной пленке жидкости. — Инж.-физ. ж., 1976, т. 30, № 5, с. 780—785.
9. Накоряков В. Е., Шрейбер И. Р. Волны на поверхности тонкого слоя вязкой жидкости. — ПМТФ, 1973, № 2, с. 109—113.
10. Цвелодуб О. Ю. Стационарные бегущие волны на пленке, стекающей по наклонной плоскости. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1980, № 4, с. 142—146.
11. Непомнящий А. А. Устойчивость волновых движений в слое вязкой жидкости на наклонной плоскости. — В кн.: Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск: Изд-е Ин-та теплофизики СО АН СССР, 1977, с. 181—190.
12. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
13. Цвелодуб О. Ю. Солитоны на стекающей пленке при умеренных расходах жидкости. — ПМТФ, 1980, № 3, с. 64—66.
14. Демехин Е. А., Шкадов В. Я. О нестационарных волнах в слое вязкой жидкости. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1981, № 3, с. 151—154.

Москва, Краснодар

Поступила в редакцию
16.VII.1982