$+ \varepsilon^3 O(\|\gamma\|^2)$, где $\gamma = \{\xi_0, \eta_0\}$ — вектор начальных значений переменных ξ, η

$$\langle U\rangle = -\frac{\varepsilon^2}{4}(1+k^2)\left[\xi_0^2 + \frac{\eta_0^2}{0,5+k^2}\right], \qquad \langle T\rangle = -\langle U\rangle$$

Получаем максимум $\langle U\rangle$, минимум $\langle T\rangle$ при $\xi_0 = \eta_0 = 0$, т. е. и в этом случае имеем максимум $\langle U\rangle$, минимум $\langle T\rangle$ на устойчивом изолированном синхронном движении — нижнем положении равновесия.

Рассмотрим теперь верхнее положение равновесия маятника, которое становится устойчивым при $k^2 < 0,5$ [10]. Проводя усреднение силовой функции и кинетической энергии аналогично тому, как это делалось для нижнего положения равновесия, опять получим максимум среднего U и минимум среднего T на устойчивом верхнем положении равновесия.

Таким образом, приближенный анализ значений $\langle U\rangle$, $\langle T\rangle$ в конкретных механических задачах подтверждает гипотезу В. В. Белецкого и позволяет выдвинуть также гипотезу о минимальности среднего значения кинетической энергии и минимальности среднего значения полной энергии $T - U$ механических систем на устойчивых изолированных синхронных движениях.

Автор благодарит В. В. Белецкого за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ovenden M. W., Feagin T., Graf O.* On the principle of least interaction action and the Laplacean satellites of Jupiter and Uranus.— Celest. Mech., 1974, v. 8, No. 4, p. 455—471.
2. *Белецкий В. В., Шляхтин А. Н.* Экстремальные свойства резонансных движений.— Докл. АН СССР, 1976, т. 231, № 4, с. 829—832.
3. *Белецкий В. В.* Экстремальные свойства резонансных движений.— В кн.: Тезисы докладов 3-й Всес. Четаевской конференции по устойчивости движения, аналитической механике и управлению движением. Иркутск: СО АН СССР, 1977, с. 91.
4. *Белецкий В. В., Касаткин Г. В.* Об экстремальных свойствах резонансных движений.— Докл. АН СССР, 1980, т. 251, № 1, с. 58—62.
5. *Шинкин В. Н.* О поиске устойчивых резонансных режимов с помощью их экстремальных свойств.— Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернетика, 1981, № 2, с. 22—29.
6. *Козлов В. В.* Усреднение в окрестности устойчивых периодических движений.— Докл. АН СССР, 1982, т. 264, № 3, с. 567—570.
7. *Дубошин Г. Н.* Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука, 1964. 560 с.
8. *Леонтович А. М.* Об устойчивости лагранжевых периодических решений ограниченной задачи трех тел.— Докл. АН СССР, 1962, т. 143, № 3, с. 525—528.
9. *Маркеев А. П.* Об устойчивости треугольных точек либрации в круговой ограниченной задаче трех тел.— ПММ, 1969, т. 33, вып. 1, с. 112—116.
10. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.

Тула

Поступила в редакцию 4.V.1982

УДК 531.38:534.1

О КОЛЕБАНИЯХ ГИРОСТАТА ОКОЛО УСТОЙЧИВЫХ ПЕРМАНЕНТНЫХ ВРАЩЕНИЙ

Цопа М. П.

Методом осреднения исследуются колебания гиростата с постоянным гиростатическим моментом в случаях Эйлера, Лагранжа и Ковалевской, аналогичные изученным ранее [1] колебаниям твердого тела около его устойчивых перманентных вращений.

Рассмотрим возмущенное движение гиростата в окрестности перманентных вращений в центральном ньютоновском поле [2], силовая функция которого задается равенством $U = -mg(x_0\gamma_1 + y_0\gamma_2 + z_0\gamma_3) - {}^1/_2\mu(A\gamma_1^2 + B\gamma_2^2 + C\gamma_3^2)$, $\mu = 3g/R$.

Здесь A, B, C — главные моменты инерции гиростата, γ_i — направляющие косинусы оси аппликат в главных осях инерции, x_0, y_0, z_0 — координаты центра масс гиростата в осях инерции, m — масса гиростата, g — ускорение силы тяготения на расстоянии R от гравитирующего центра.

Характеристическое уравнение первого приближения имеет в случаях Эйлера, Лагранжа и Ковалевской один или два нулевых корня и одну или две пары чисто мнимых корней, поэтому преобразование от переменных x_i к амплитудам a_k, ξ_k и фазам u_k в матричной форме будет иметь вид

(1) $$x = \sum a_i\,[\operatorname{Re} V_1(i\omega_i)\cos u_i - \operatorname{Im} V_1(i\omega_i)\sin u_i] + V_2(0)\,\xi_i$$

где V_1, V_2 — ненулевые столбцы при чисто мнимых и нулевых корнях присоединенной матрицы уравнений первого приближения.

В случае Эйлера ($x_0 = y_0 = z_0 = 0$) уравнения движения гиростата с постоянным гиростатическим моментом ($k_i = \text{const}$) в однородном поле тяжести ($\mu = 0$) допускают частное решение $p = q = 0$; $r = \omega = \text{const}$ при $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = k = \text{const}$, где p, q, r — компоненты угловой скорости вращения по главным осям инерции. Полагая в возмущенном движении $p = x_1$, $q = x_2$, $r = \omega + x_3$, имеем уравнения

(2) $$x_1^{\cdot} + \Omega_1 x_2 + a x_2 x_3 = 0,\quad x_2^{\cdot} - \Omega_2 x_1 - b x_1 x_3 = 0,\quad x_3^{\cdot} - c x_1 x_2 = 0$$
$$a = (C - B)/A,\quad b = (C - A)/B,\quad c = (A - B)/C$$
$$\varkappa_1 = k/A,\quad \varkappa_2 = k/B,\quad \Omega_1 = a\omega + \varkappa_1,\quad \Omega_2 = b\omega + \varkappa_2$$

Линеаризуем уравнения возмущенного движения (2) и составим матрицу ($D = d/dt$ — оператор дифференцирования)

$$f(D) = \begin{Vmatrix} D & \Omega_1 & 0 \\ -\Omega_2 & D & 0 \\ 0 & 0 & D \end{Vmatrix}$$

При выполнении условий [3] $A > C_1$, $B > C_1$, где $C_1 = C + k/\omega$, вращение гиростата вокруг оси аппликат устойчиво и характеристическое уравнение $\lambda\,[\lambda^2 + \Omega_1\Omega_2] = 0$ имеет нулевой корень $\lambda_1 = 0$ и пару чисто мнимых корней $\lambda_{2,3} = \pm i\Omega = \pm i\Omega_1\Omega_2$. Если величина $C_1 > 0$, то ее можно трактовать как приведенный момент инерции гиростата для перманентной оси z. В случае, когда k и ω противоположны по знаку, величина C может быть отрицательна, при этом движение всегда будет устойчивым.

Столбцы присоединенной матрицы от чисто мнимого корня $\lambda_{2,3} = \pm i\Omega$ пропорциональны между собой, поэтому, выбрав в качестве независимых

$$V_1(i\omega) = \begin{Vmatrix} -\Omega_1^{1/2} \\ i\Omega_2^{1/2} \\ 0 \end{Vmatrix},\qquad V_2(0) = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

уравнения возмущенного движения гиростата в нормальных координатах запишем следующим образом:

(3) $$a_1^{\cdot} = (b\varkappa_1 - a\varkappa_2)\,\Omega^{-1}\xi a_1 \sin u\cos u,\quad \xi^{\cdot} = c\Omega\Omega_2\omega^{-2}a_1^2\sin u\cos u$$
$$u^{\cdot} = \Omega + \Omega^{-1}\xi\,(ab\omega + a\varkappa_2\sin^2 u + b\varkappa_1\cos^2 u)$$

Осредненные по угловой переменной u уравнения (3) имеют решение

(4) $$a_1 = a_{10},\quad \xi = \xi_0$$
$$u = [\Omega + {}^1/_2\Omega^{-1}\xi_0\,(2ab\omega + a\varkappa_2 + b\varkappa_1)]\,t + u_0 = \omega^* t + u_0$$

При вычислении средних амплитуды a_1 и ξ считаются постоянными. Полученное решение (4) приближенных уравнений является решением точных уравнений (не осредненных) при $c = 0$, т. е. при $A = B$. Решение (4) описывает колебание гиростата по переменным x_1 и x_2 с периодом $T = 2\pi/\omega^*$.

В пространстве переменных x_1, x_2, x_3 фазовые траектории представляют собой эллипсы, плоскости которых параллельны плоскости x_1x_2. Полученные результаты при $k = 0$ совпадают с результатами работы [1].

При движении гиростата в центральном ньютоновском поле сил уравнения Эйлера — Пуассона допускают частное решение $p = q = 0$, $r = \omega$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 1$ при $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = k = \text{const}$. Полагая в возмущенном движении $p = x_1$, $q = x_2$, $r = \omega + x_3$, $\gamma_1 = y_1$, $\gamma_2 = y_2$, $\gamma_3 = 1 + y_3$, приходим к уравнениям

(5) $$x_1^{\cdot} + \Omega_1 x_2 - a\mu y_2 + a\,(x_2x_3 - \mu y_2y_3) = 0$$
$$x_2^{\cdot} - \Omega_2 x_1 + b\mu y_1 - b\,(x_1x_3 - \mu y_1y_3) = 0$$
$$x_3^{\cdot} - c\,(x_1x_2 - \mu y_1y_2) = 0,\quad y_1^{\cdot} + x_2 - \omega y_2 + x_2y_3 - x_3y_2 = 0$$
$$y_2^{\cdot} - x_1 + \omega y_1 - x_1y_3 + x_3y_1 = 0,\quad y_3^{\cdot} + x_1y_2 - x_2y_1 = 0$$

Характеристическое уравнение линеаризованной системы (5)

$$\lambda^2[\lambda^4 + m\lambda^2 + n] = 0; \quad m = \omega^2 + \Omega_1\Omega_2 - \mu(a+b)$$
$$n = \Omega_1\Omega_2\omega^2 - \mu(2ab\omega + a\varkappa_2 + b\varkappa_1)\,\omega + ab\mu^2$$

имеет два нулевых и две пары чисто мнимых корней $\pm i\omega_k$.

Уравнения возмущенного движения (5) в нормальных координатах после осреднения по угловым переменным u_k принимают вид

(6)
$$a_k^{\cdot} = 0, \qquad \xi_k^{\cdot} = 0, \qquad u_k^{\cdot} = \omega_k + (-1)^{k-1}2^{-1}\sum_{i=1}^{2}(\alpha_{ik}^{(k)} - \beta_{ik}^{(k)})\,\xi_{i0} = \omega_k^*$$
$$\alpha_{ik}^{(k)} = (-1)^{i-1}n\,(\mu^{i-1}ad_{2,3-k}c_{ik} + d_{1,3-k}c_{3-i,k})\,(d_{12}d_{21} - d_{11}d_{22})^{-1}$$
$$\beta_{ik}^{(k)} = (-1)^{i-1}n\,(\mu^{i-1}bd_{ik}c_{2,3-k} + c_{1,3-k}d_{3-i,k})\,(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})^{-1}$$
$$c_{1k} = \omega_k^2[(\omega^2 - \omega_k^2)\,\Omega_2 - \mu b\omega], \qquad c_{2k} = \omega_k^2[\omega\Omega_2 - \omega_k^2 - \mu b]$$
$$d_{1k} = \omega_k^3(\omega^2 - \omega_k^2 - \mu b), \qquad d_{2k} = \omega_k^3(\omega - \Omega_2) \qquad (k = 1, 2)$$

Решение этих уравнений $a_k = a_{k0}$, $\xi_k = \xi_{k0}$, $u_k = \omega_k^* t + u_{k0}$ показывает, что возмущения x_i и y_i — квазипериодические функции времени с периодами $T_k = 2\pi/\omega_k^*$.

В случае Лагранжа ($x_0 = y_0 = 0$, $A = B$) уравнения Эйлера — Пуассона для гиростата с постоянным гиростатическим моментом в центральном ньютоновском поле допускают частное решение $p = q = 0$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $r = \omega$, $\gamma_3 = 1$ при $k_1 = k_2 = 0$ и $k_3 = k = \mathrm{const}$. Полагая в возмущенном движении $p = x_1$, $q = x_2$, $\gamma_1 = y_1$, $\gamma_2 = y_2$, $\gamma_3 = 1 + y_3$, получаем уравнения возмущенного движения

(7)
$$x_1^{\cdot} - ax_2 - (b - \mu_1)\,y_2 + \mu_1 y_2 y_3 = 0, \quad x_2^{\cdot} + ax_1 + (b - \mu_1)\,y_1 - \mu_1 y_1 y_3 = 0$$
$$y_1^{\cdot} + x_2 - ry_2 + x_2 y_3 = 0, \quad y_2^{\cdot} - x_1 + ry_1 - x_1 y_3 = 0$$
$$y_3^{\cdot} - x_2 y_1 + x_1 y_2 = 0, \quad r^{\cdot} \equiv 0$$
$$a = [(A - C)\,r - k]/A, \quad b = mgz_0/A, \quad \mu_1 = (A - C)\,\mu/A$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda\,[\lambda^4 + (r^2 - 2b + a^2 + 2\mu_1)\,\lambda^2 + (ar + b - \mu_1)^2] = 0$$

линеаризованной системы имеет один нулевой корень и две пары чисто мнимых корней $\pm i\omega_k$. Преобразование (1) к трем амплитудам a_1, a_2, ξ и двум фазам u_1 и u_2 имеет вид

(8)
$$x_1 = -\sum_{i=1}^{2} d_{1i}a_i\cos u_i, \qquad y_1 = -\sum_{i=1}^{2} d_{2i}a_i\cos u_i$$
$$x_2 = \sum_{i=1}^{2} c_{1i}a_i\sin u_i, \qquad y_2 = \sum_{i=1}^{2} c_{2i}a_i\sin u_i, \qquad y_3 = \xi$$
$$c_{1k} = r\,(ar + b - \mu_1) - a\omega_k^2, \qquad c_{2k} = ar + b - \mu_1 + \omega_k^2$$
$$d_{1k} = -\omega_k\,(\omega_k^2 + b - \mu_1 - r^2), \qquad d_{2k} = (a + r)\,\omega_k \qquad (k = 1, 2)$$

Подставляя (8) в уравнения (7), получим уравнения в нормальных координатах, которые после осреднения по угловым переменным u_k будут иметь вид

(9)
$$a_k^{\cdot} = 0, \quad \xi^{\cdot} = 0, \quad u_k^{\cdot} = \omega_k + (-1)^{k-1}\xi_0\,(2d)^{-1}(\alpha_{kk} + \beta_{kk}) = \omega_k^*$$
$$d = (ar + b - \mu_1)(a + r)\,(\omega_2^2 - \omega_1^2)$$
$$\alpha_{kk} = c_{1,\,3-k}d_{1k} - \mu_1 c_{2,\,3-k}d_{2k}$$
$$\beta_{kk} = c_{1k}d_{1,\,3-k} - \mu_1 c_{2k}d_{2,\,3-k}$$

и их решение

(10)
$$a_k = a_{k0}, \quad \xi = \xi_0, \quad u_k = \omega_k^* t + u_{k0}$$

На основании формул (10) можно заключить, что переменные x_k, y_k — квазипериодические функции времени с периодами $T_k = 2\pi/\omega_k^*$.

В случае движения гиростата в однородном поле тяжести уравнения возмущенного движения, осредненные уравнения и их решения получаются из формул (7) — (10) подстановкой $\mu = 0$.

Теперь рассмотрим колебания гиростата в центральном ньютоновском поле сил в случае Ковалевской ($y_0 = z_0 = 0$, $A = B = 2C$). Уравнения движения допускают частное решение $p = \omega$, $q = r = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$, $\gamma_1 = 1$ при $k_2 = k_3 = 0$, $k_1 = k =$

$= \mathrm{const}$. Уравнения возмущенного движения будут

$$
\begin{aligned}
(11)\qquad & 2x_1^{\cdot} - x_2x_3 + \mu y_2y_3 = 0 \\
& 2x_2^{\cdot} + (\omega + \varkappa)\, x_3 - ay_3 + x_1x_3 - \mu y_3\,(1 + y_1) = 0 \\
& x_3^{\cdot} - \varkappa x_2 + ay_2 = 0, \quad y_1^{\cdot} + x_2y_3 - x_3y_2 = 0 \\
& y_2^{\cdot} + x_3 - (\omega + x_1)\, y_3 + x_3y_1 = 0, \quad y_3^{\cdot} - x_3 + (\omega + x_1)\, y_2 + x_2y_1 = 0 \\
& a = 2mgx_0/A, \quad \varkappa = 2k/A
\end{aligned}
$$

Характеристическое уравнение линеаризованной системы (11)

$$
\begin{aligned}
& 2\lambda^2\,[2\lambda^4 + (2\omega^2 - 3a + \varkappa\,(\omega + \varkappa) - \mu)\,\lambda^2 + a\,(a - \omega^2 + \mu) + \\
& + \varkappa\omega\,(\omega^2 - 2a - \mu + \omega\varkappa)] = 0
\end{aligned}
$$

при устойчивых перманентных вращениях $a < \varkappa\omega$ имеет два нулевых корня и две пары чисто мнимых корней $\pm i\omega_k$, поэтому преобразование уравнений к нормальным координатам a_k, ξ_k, u_k проведем по следующим формулам:

$$
\begin{aligned}
& x_1 = \xi_1, \quad x_2 = -\sum_{i=1}^{2} d_{1i}a_i \sin u_i, \quad x_3 = \sum_{i=1}^{2} c_{1i}a_i \cos u_i \\
& y_1 = \xi_2, \quad y_2 = -\sum_{i=1}^{2} d_{2i}a_i \sin u_i, \quad y_3 = \sum_{i=1}^{2} c_{2i}a_i \cos u_i \\
& c_{1k} = a\omega - \varkappa\,(\omega^2 - \omega_k^2), \quad c_{2k} = a + \omega_k^2 - \varkappa\omega \\
& d_{1k} = \omega_k\,(a + \omega_k^2 - \omega^2), \quad d_{2k} = -\omega_k\,(\omega - \varkappa) \quad (k = 1, 2)
\end{aligned}
$$

Осредненные уравнения

$$
\begin{aligned}
& a_k^{\cdot} = 0, \quad \xi_k^{\cdot} = 0, \quad u_k^{\cdot} = \omega_k + (-1)^k\, 2^{-1}\,(\alpha_{kk} + \beta_{kk}) = \omega_k^* \\
& \alpha_{kk} = c_{1,\,3-k}\,[-\xi_1 d_{2k} + \xi_2 d_{1k}](c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})^{-1} \\
& \beta_{kk} = [-\xi_1\,(2^{-1}c_{1k}d_{2,\,3-k} + c_{2k}d_{1,\,3-k}) + \\
& + \xi_2\,(c_{1k}d_{1,\,3-k} + 2^{-1}\mu c_{2k}d_{2,\,3-k})](d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21})^{-1}
\end{aligned}
$$

имеют решение $a_k = a_{k0}$, $\xi_k = \xi_{k0}$, $u_k = \omega_k^* t + u_{k0}$, которое показывает, что переменные x_i, y_i — квазипериодические функции времени с периодами $T_k = 2\pi/\omega_k^*$.

Если движение гиростата происходит в однородном поле тяжести ($\mu = 0$), то движение по переменным x_i, y_i остается квазипериодическим.

Наличие гиростатического момента приводит к изменению частот колебаний в окрестности устойчивых вращений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Апыхтин Н. Г.* О колебаниях твердого тела около устойчивых перманентных вращений.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 5, с. 945—948.
2. *Демин В. Г., Киселев Ф. И.* О периодических движениях твердого тела в центральном ньютоновском поле.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 2, с. 224—227.
3. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения гиростатов.— ПММ, 1961, т. 25, вып. 1, с. 9—16.

Кишинев

Поступила в редакцию
7.1.1983

УДК 532.516

О НЕЕДИНСТВЕННОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ РЕШЕНИЙ В ВЯЗКОМ СЛОЕ

Бунов А. В., Демёхин Е. А., Шкадов В. Я.

Рассматриваются решения типа стационарных бегущих волн в стекающих слоях вязкой жидкости. Изучается однопараметрическое семейство волн [1], мягко ответвляющееся на верхней ветви кривой нейтральной устойчивости от плоскопараллельного течения и переходящее при стремлении к нулю волнового числа в отрицательный солитон (фазовая скорость $c < 3$). Показано, что это семейство не является единственным: от него с половинным периодом ответвляется при малых значениях параметра