ЛИТЕРАТУРА

1. *Rosenberg R. M., Hsu C. S.* On the geometrization of normal vibration of nonlinear systems having many degrees of freedom.— В кн.: Тр. Междунар. симпоз. по нелинейным колебаниям. Т. 1. Киев: Изд-во АН УССР, 1963, с. 380—416.
2. *Pecelli G., Thomas E. S.* An example of elliptic stability with large parameters: Lame's equation and the Arnold—Moser—Russmann criterion.— Quart. Appl. Math., 1978, v. 36, No. 2, p. 129—140.
3. *Pecelli G., Thomas E. S.* Normal modes, incoupling and stability for a class of nonlinear oscillators.— Quart. Appl. Math., 1979, v. 37, No. 3, p. 281—301.
4. *Month L. A., Rand R. H.* An application of the Poincare map to the stability of nonlinear normal modes.— Trans. ASME., J. Appl. Mech., 1980, v. 47, No. 3, p. 645—651.
5. *Жупиев А. Л., Михлин Ю. В.* Устойчивость и ветвление нормальных форм колебаний нелинейных систем.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 3, с. 450—455.
6. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. 319 с.
7. *Айнс Э. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: Научн.-техн. изд-во Украины, 1939. 717 с.
8. *Старжинский В. М.* Прикладные методы нелинейных колебаний. М.: Наука, 1977. 255 с.

Днепропетровск

Поступила в редакцию 3.IX.1982

УДК 531.36 : 534.1

О ГИПОТЕЗЕ ЭКСТРЕМАЛЬНОСТИ УСТОЙЧИВЫХ РЕЗОНАНСНЫХ ДВИЖЕНИЙ

Касаткин Г. В.

На основании предлагаемого приближенного метода определения средних значений от функций координат и времени на траекториях динамических систем, близких к интегрируемым, проводится усреднение силовой функции и кинетической энергии в следующих задачах: движение материальной точки в окрестности треугольных точек либрации плоской круговой ограниченной задачи трех тел, движение физического маятника с быстро колеблющейся точкой подвеса в окрестностях нижнего и верхнего положений равновесий. Показана предпочтительность следующих гипотез: минимум усредненных потенциальной (гипотеза В. В. Белецкого), кинетической и полной энергий механической системы на устойчивых изолированных синхронных движениях.

В исследованиях экстремальных свойств устойчивых резонансных (синхронных) движений потенциальных механических систем [1—3] особый интерес представляет экстремальный принцип, выдвинутый в форме гипотезы В. В. Белецким [2, 3]: функция

$$\langle U\rangle = f(x_0) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t U(x(x_0, t), t)\,dt$$

принимает максимальные значения на устойчивых резонансных движениях. Здесь U — силовая функция, периодически зависящая от времени t, а $x(x_0, t)$ — решение уравнений движения механической системы с начальным значением x_0 в момент $t = 0$. В связи с этим экстремальным принципом интенсивно изучались экстремальные свойства устойчивых синхронных движений (например, [4—6]), не снявшие, однако, вопроса о его справедливости.

Анализ значений функции $\langle U\rangle$ имеет принципиальную трудность, связанную с тем, что закон движения $x(x_0, t)$ представлен, как правило, неинтегрируемой дифференциальной системой уравнений движения. Приближенное вычисление $\langle U\rangle$, проведенное на ЭВМ для задачи о плоских вращениях спутника относительно его центра масс, движущегося по эллиптической орбите [1], дало результаты, согласующиеся с гипотезой.

[1] См. [2], а также *Белецкий В. В., Шляхтин А. Н.* Резонансные вращения спутника при взаимодействии магнитного и гравитационного полей.— Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР. М., 1980, № 46. 30 с.

Подобный приближенный подход определения $\langle U \rangle$, а также среднего по времени от какой-либо другой функции, может быть реализован в некоторых задачах аналитическими методами. Рассмотрим класс механических систем, содержащих малый параметр ε и интегрируемых при $\varepsilon = 0$. Для него можно предложить следующую схему приближенного вычисления $\langle U \rangle$:

1) применим к системе уравнений движения метод усреднения или метод малого параметра, позволяющие найти решения, близкие к точным решениям на достаточно больших интервалах времени;

2) формально заменим точные (неизвестные) решения полученными приближенными, по которым и проведем усреднение силовой функции U.

Разумеется, при таком подходе нельзя гарантировать строгость получаемых результатов, однако его применение приводит к интересным предположительным выводам.

1. Рассмотрим плоскую ограниченную круговую задачу трех тел [7]. Пусть μ и $1 - \mu$ — массы двух материальных точек, отстоящих друг от друга на единичном расстоянии. Эти точки совершают круговое движение с единичной угловой скоростью относительно их общего центра масс O. Возьмем вращающуюся с единичной угловой скоростью систему координат Oxy, такую, что μ и $1 - \mu$ покоятся на оси Ox. Пусть невесомая материальная точка P (x, y) совершает движение в гравитационном поле масс μ и $1 - \mu$. Ее кинетическая энергия имеет вид

$$T = {}^1/_2 [x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2} + 2(xy^{\cdot} - x^{\cdot}y) + x^2 + y^2], \qquad x^{\cdot} = \frac{dx}{dt}, \qquad y^{\cdot} = \frac{dy}{dt}$$

Силовая функция притяжения точки P задается формулой

$$U(x, y) = (1 - \mu) \{(x + \mu)^2 + y^2\}^{-1/2} + \mu \{[x - (1 - \mu)]^2 + y^2\}^{-1/2}$$

Среди множества движений P существует устойчивое [7—9] при $\mu(1 - \mu) < 1/27$, $\mu \neq (15 - \sqrt{213})/30$, $\mu \neq (45 - \sqrt{1833})/90$ по переменным $x, y, x^{\cdot}, y^{\cdot}$ положение равновесия — треугольная точка либрации L_4 (x_Δ, y_Δ): $x_\Delta = {}^1/_2 - \mu$; $y_\Delta = \sqrt{3}/2$.

Проведем преобразование от x, y к их возмущениям x_1, x_3 относительно L_4: $x = ({}^1/_2 - \mu) + x_1$; $y = \sqrt{3}/2 + x_3$, тогда, отбрасывая несущественные постоянные, T и U можно представить в виде рядов по степеням переменных x_1, x_3 и их производных по времени $x_1^{\cdot}, x_3^{\cdot}$.

Движение точки P характеризуется следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned}
(1.1)\qquad & x_1^{\cdot} = x_2, \quad x_2^{\cdot} = \frac{3}{4}x_1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu)x_3 + 2x_4 + \\
& + \frac{21}{16}(1 - 2\mu)x_1^2 - \frac{3\sqrt{3}}{8}x_1x_3 - \frac{33}{16}(1 - 2\mu)x_3^2 + \ldots \\
& x_3^{\cdot} = x_4, \quad x_4^{\cdot} = \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu)x_1 - 2x_2 + \frac{9}{4}x_3 - \\
& - \frac{3\sqrt{3}}{16}x_1^2 - \frac{33}{8}(1 - 2\mu)x_1x_3 - \frac{9\sqrt{3}}{16}x_3^2 + \ldots
\end{aligned}$$

Если в них оставить только члены первого порядка, то получим уравнения в вариациях относительно L_4, общее решение которых при $\mu(1 - \mu) < 1/27$ представимо в виде

$$\begin{aligned}
& x_{1(0)} = A_1z_1 + B_1z_2 + A_2z_3 + B_2z_4, \qquad x_{2(0)} = \dot{x}_{1(0)} \\
& x_{3(0)} = C_1z_1 + D_1z_2 + C_2z_3 + D_2z_4, \qquad x_{4(0)} = \dot{x}_{3(0)} \\
& \Big(A_n = \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu)\sin\omega_n t + 2\omega_n\cos\omega_n t, \quad B_n = -\Big(\frac{9}{4} + \omega_n^2\Big)\cos\omega_n t, \\
& C_n = -\Big(\frac{3}{4} + \omega_n^2\Big)\sin\omega_n t, \quad D_n = \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu)\cos\omega_n t + \\
& + 2\omega_n\sin\omega_n t, \; n = 1, 2\Big)
\end{aligned}$$

В этих формулах ω_1, ω_2 — собственные частоты, определяемые характеристическим уравнением

$$(1.2)\qquad \Big(\omega^2 + \frac{3}{4}\Big)\Big(\omega^2 + \frac{9}{4}\Big) - 4\omega^2 - \frac{27}{16}(1 - 2\mu)^2 = 0$$

z_i — произвольные постоянные, связанные линейным преобразованием с начальными значениями x_i° переменных x_i.

Согласно методу малого параметра Пуанкаре, решение полной системы (1.1) можно представить рядами по степеням z_i или, что то же самое, по степеням x_i°

(1.3) $$x_i = \sum_{j=1}^{4} A_{ij}(t) z_j + \sum_{j,k=1}^{4} B_{ijk}(t) z_j z_k + \ldots, \qquad x_i^\circ = \sum_{j=1}^{4} A_{ij}(0) z_j,$$
$$B_{ijk}(0) = 0, \ldots$$

Эти ряды при достаточно малой норме вектора $z \in R^4$ сходятся на достаточно большом, но конечном интервале времени $[0, \tau]$, причем $\tau \to \infty$ при $\|z\| \to 0$.

Проведем усреднение силовой функции U по множеству траекторий, задаваемых формулами (1.3) при $t \in [0, \infty)$. Получим с точностью до величин второго порядка по координатам вектора z_i включительно

$$\langle U \rangle = -\frac{3}{4}\mu(1-\mu)\left[z_1^2\left(\frac{3}{4}+\omega_1^2\right) + 2z_1z_2(-2\omega_1) + z_2^2\left(\frac{9}{4}+\omega_1^2\right) + \right.$$
$$\left. + z_3^2\left(\frac{3}{4}+\omega_2^2\right) + 2z_3z^4(-2\omega_2) + z_4^2\left(\frac{9}{4}+\omega_2^2\right)\right] + O(\|z\|^3)$$

Учитывая (1.2) можно доказать положительную определенность квадратичной по z_i формы, стоящей в квадратных скобках. Следовательно, $\langle U \rangle$ как функция начальных значений x_i° принимает максимальное значение в точке $x_i^\circ = 0$, т. е. в треугольной точке либрации L_4 (L_4 — устойчивое изолированное синхронное движение).

Такое же усреднение функции Лагранжа $T + U$ показывает, что с точностью до вторых степеней z_i включительно $\langle T + U \rangle = 0$. Значит, $\langle T \rangle$ принимает минимальное значение в L_4.

Аналогичные выводы справедливы для другой треугольной точки либрации L_5.

Замечание. Функция $\langle U \rangle$ после замены z_i на x_i° приобретает знаменатели ω_1, $\omega_2^2 - \omega_1^2$, и поэтому становится неопределенной, если

1) $\omega_1 = 0$, т. е. $\mu = 0$. Такому значению μ отвечает предельный случай рассматриваемой задачи, представляющий задачу Кеплера. Движение, соответствующее предельному положению L_4, неустойчиво;

2) $\omega_2 = \omega_1$. Попадаем на граничные точки области выполнения необходимых условий устойчивости: $\mu(1-\mu) = 1/27$.

Отсюда выводим, что $\langle U \rangle$ реагирует на критические значения μ, в которых теряется свойство устойчивости треугольных точек либрации.

2. Рассмотрим задачу о движении физического маятника, который может вращаться в определенной вертикальной плоскости вокруг своей точки подвеса, совершающей в вертикальном направлении синусоидальные колебания малой амплитуды и высокой частоты. Множество движений маятника содержит два положения равновесия, когда маятник направлен по вертикали вниз и вверх. Пусть θ — угол отклонения от нижнего положения равновесия, тогда движение будет описываться следующим дифференциальным уравнением ([10], с. 371):

(2.1) $$\theta^{\cdot\cdot} + (k^2\varepsilon^2 - \varepsilon \sin t)\sin\theta, \quad k^2 < 1, \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$

В качестве кинетической энергии и силовой функции задачи возьмем выражения

$$T = {}^1/_2\theta^{\cdot 2}, \qquad U = -2(k^2\varepsilon^2 - \varepsilon \sin t)\sin^2\frac{\theta}{2}$$

Рассмотрим движение маятника вблизи нижнего положения равновесия $\theta(t) = 0$ ($\theta(t) = 0$ — устойчивое изолированное синхронное движение). Воспользуемся заменой [10]

$$\theta = x - \varepsilon \sin t \sin x, \qquad \theta^\cdot = \varepsilon y - \varepsilon \cos t \sin x \quad (\theta, \theta^\cdot \to x, y)$$

приводящей уравнение (2.1) к системе стандартного вида

(2.2) $$x^\cdot = \varepsilon y + \varepsilon^2 \ldots, \quad y^\cdot = \varepsilon[y \cos t - k^2 \sin x - {}^1/_2 \sin^2 t \sin 2x] + \varepsilon^2 \ldots$$

Проведем усреднение системы (2.2)

$$x = \xi, \quad y = \eta + \varepsilon(\eta \sin t \cos \xi + {}^1/_8 \sin 2t \sin 2\xi)$$
$$\xi^\cdot = \varepsilon\eta, \quad \eta^\cdot = -\varepsilon[k^2 \sin \xi + {}^1/_4 \sin 2\xi]$$

Эти уравнения позволяют найти приближенные решения в окрестности нижнего положения равновесия, близкие к точным решениям уравнений (2.2) на большом интервале времени. Усреднение U и T по таким решениям дает с точностью $\varepsilon^2 O(\|\gamma\|^3) +$

$+ \varepsilon^3 O(\|\gamma\|^2)$, где $\gamma = \{\xi_0, \eta_0\}$ — вектор начальных значений переменных ξ, η

$$\langle U \rangle = -\frac{\varepsilon^2}{4}(1+k^2)\left[\xi_0^2 + \frac{\eta_0^2}{0{,}5+k^2}\right], \qquad \langle T \rangle = -\langle U \rangle$$

Получаем максимум $\langle U \rangle$, минимум $\langle T \rangle$ при $\xi_0 = \eta_0 = 0$, т. е. и в этом случае имеем максимум $\langle U \rangle$, минимум $\langle T \rangle$ на устойчивом изолированном синхронном движении — нижнем положении равновесия.

Рассмотрим теперь верхнее положение равновесия маятника, которое становится устойчивым при $k^2 < 0{,}5$ [10]. Проводя усреднение силовой функции и кинетической энергии аналогично тому, как это делалось для нижнего положения равновесия, опять получим максимум среднего U и минимум среднего T на устойчивом верхнем положении равновесия.

Таким образом, приближенный анализ значений $\langle U \rangle$, $\langle T \rangle$ в конкретных механических задачах подтверждает гипотезу В. В. Белецкого и позволяет выдвинуть также гипотезу о минимальности среднего значения кинетической энергии и минимальности среднего значения полной энергии $T - U$ механических систем на устойчивых изолированных синхронных движениях.

Автор благодарит В. В. Белецкого за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ovenden M. W., Feagin T., Graf O.* On the principle of least interaction action and the Laplacean satellites of Jupiter and Uranus.— Celest. Mech., 1974, v. 8, No. 4, p. 455—471.
2. *Белецкий В. В., Шляхтин А. Н.* Экстремальные свойства резонансных движений.— Докл. АН СССР, 1976, т. 231, № 4, с. 829—832.
3. *Белецкий В. В.* Экстремальные свойства резонансных движений.— В кн.: Тезисы докладов 3-й Всес. Четаевской конференции по устойчивости движения, аналитической механике и управлению движением. Иркутск: СО АН СССР, 1977, с. 91.
4. *Белецкий В. В., Касаткин Г. В.* Об экстремальных свойствах резонансных движений.— Докл. АН СССР, 1980, т. 251, № 1, с. 58—62.
5. *Шинкин В. Н.* О поиске устойчивых резонансных режимов с помощью их экстремальных свойств.— Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернетика, 1981, № 2, с. 22—29.
6. *Козлов В. В.* Усреднение в окрестности устойчивых периодических движений.— Докл. АН СССР, 1982, т. 264, № 3, с. 567—570.
7. *Дубошин Г. Н.* Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука, 1964. 560 с.
8. *Леонтович А. М.* Об устойчивости лагранжевых периодических решений ограниченной задачи трех тел.— Докл. АН СССР, 1962, т. 143, № 3, с. 525—528.
9. *Маркеев А. П.* Об устойчивости треугольных точек либрации в круговой ограниченной задаче трех тел.— ПММ, 1969, т. 33, вып. 1, с. 112—116.
10. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.

Тула

Поступила в редакцию
4.V.1982

УДК 531.38:534.1

О КОЛЕБАНИЯХ ГИРОСТАТА ОКОЛО УСТОЙЧИВЫХ ПЕРМАНЕНТНЫХ ВРАЩЕНИЙ

Цопа М. П.

Методом осреднения исследуются колебания гиростата с постоянным гиростатическим моментом в случаях Эйлера, Лагранжа и Ковалевской, аналогичные изученным ранее [1] колебаниям твердого тела около его устойчивых перманентных вращений.

Рассмотрим возмущенное движение гиростата в окрестности перманентных вращений в центральном ньютоновском поле [2], силовая функция которого задается равенством $U = -mg(x_0\gamma_1 + y_0\gamma_2 + z_0\gamma_3) - {}^1/_2\mu(A\gamma_1^2 + B\gamma_2^2 + C\gamma_3^2)$, $\mu = 3g/R$.

Здесь A, B, C — главные моменты инерции гиростата, γ_i — направляющие косинусы оси аппликат в главных осях инерции, x_0, y_0, z_0 — координаты центра масс гиростата в осях инерции, m — масса гиростата, g — ускорение силы тяготения на расстоянии R от гравитирующего центра.