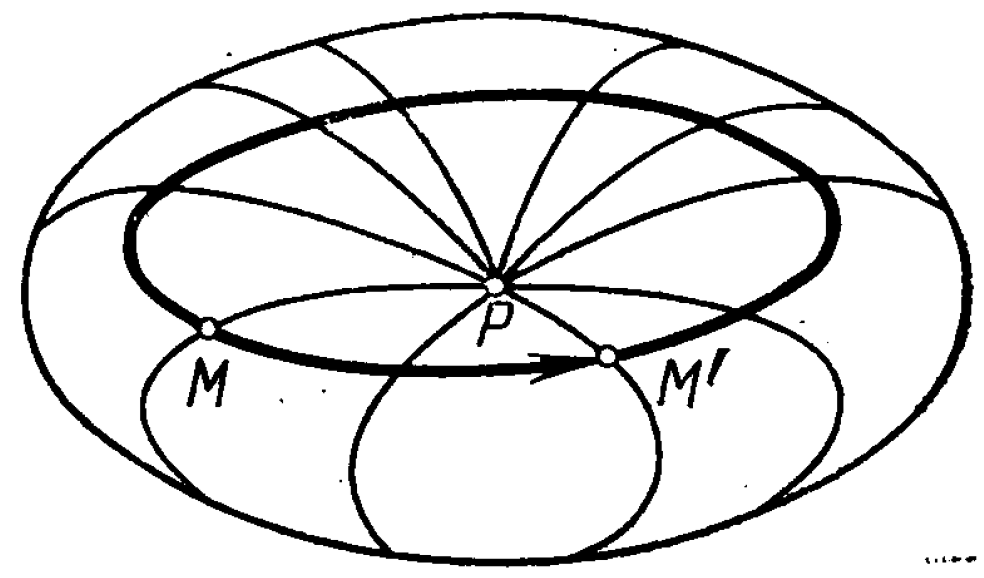
Как известно [6], связность может быть определена в общем случае ν-кратного расслоения. Для двойного расслоения она определяется заданием на тотальном многообразии V_{12} двух распределений Δ_h^1 и Δ_h^2, горизонтальных для расслоений π_1 и π_2 соответственно. Иначе, если рассмотреть также вертикальные распределения на V_{12}

$$\Delta_v^1 = \mathrm{Ker}\, T\pi_1,\ \Delta_v^2 = \mathrm{Ker}\, T\pi_2,$$

то это равносильно определению на V_{12} структуры

$$\Delta \oplus \Delta_1 \oplus \Delta_2 \oplus \Delta_{12}$$
$$(\Delta = \Delta_h^1 \cap \Delta_h^2,\ \Delta_1 = \Delta_h^2 \cap \Delta_v^1,\ \Delta_2 = \Delta_h^1 \cap \Delta_v^2,\ \Delta_{12} = \Delta^1_v \cap \Delta_v^2),$$

представляющей каждое касательное к V_{12} пространство в виде прямой суммы четырех своих подпространств; при этом



Фиг. 6

$$\Delta_1 \oplus \Delta_{12} = \mathrm{Ker}\, T\pi_1,\quad \Delta_2 \oplus \Delta_{12} = \mathrm{Ker}\, T\pi_2,\quad \Delta_1 \oplus \Delta_2 \oplus \Delta_{12} = \mathrm{Ker}\, T\sigma,$$

где $\sigma = \rho_1\pi_2 = \rho_2\pi_1$, и $\Delta \oplus \Delta_1$ и $\Delta \oplus \Delta_2$ проектируются при $T\pi_2$ и $T\pi_1$ на V_1 и V_2, определяя связности в расслоениях ρ_1 и ρ_2.

В рассматриваемом примере после редукции многообразие V_{12} пятимерно, многообразия V_1 и V_2 трехмерны, а база V двумерна. Распределение Δ, натянутое на векторные поля Y_1 и Y_2, двумерно, а распределения Δ_1, Δ_2 и Δ_{12}, определяемые соответственно операторами $\partial/\partial\tau_1$, $\partial/\partial\tau_2$ и $\partial/\partial\tau$, одномерны. Приведенные выше три уравнения Пфаффа определяют распределение Δ. Из них второе и третье определяют распределение Δ_1, а первое и третье — распределение Δ_2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рахула М. О.* Инфинитезимальная связность в расслоении.— В кн.: Проблемы геометрии. Т. 8. Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ, 1977, с. 163—182.
2. *Pradines J.* Fibrés vectoriels doubles te calcul des jets non holonomes.— Esquisses mathém., 1977, № 29, p. 184.
3. *Левитский Н. И.* Теория механизмов и машин. М.: Наука, 1979. 574 с.
4. *Зуланке Р., Винтген П.* Дифференциальная геометрия и расслоения. М.: Мир, 1975. 348 с.
5. *Эмпахер А.* Сила аналогий. М.: Мир, 1965. 154 с.
6. *Рахула М. О.* Инфинитезимальная связность в многократном расслоении.— Изв. вузов. Математика, 1983, № 1, с. 62—72.

Одесса

Поступила в редакцию
23.II.1983

УДК 531.36 : 534

УСЛОВИЯ КОНЕЧНОСТИ ЧИСЛА ЗОН НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ЗАДАЧЕ О НОРМАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Жупиев А. Л., Михлин Ю. В.

Рассматриваются консервативные нелинейные системы с двумя степенями свободы, допускающие нормальные колебания с прямолинейными траекториями в конфигурационном пространстве. Нормальные колебания нелинейных систем представляют собой обобщение нормальных (главных) колебаний линейных систем [1]. Значение таких решений определяется тем, что при малых внешних периодических воздействиях резонансные режимы близки к нормальным колебаниям.

Анализу устойчивости нормальных колебаний посвящен ряд работ последнего времени ([2—5] и др.). Ниже в рамках задачи об устойчивости по первому приближению нормальных колебаний получены условия, при которых число зон неустойчивости в пространстве параметров системы конечно. Определяются собственные функции и собственные значения, соответствующие границам зон.

1. Пусть движение консервативной системы определяется уравнениями

$$x_i^{\cdot\cdot} + \partial\Pi/\partial x_i = 0 \quad (i = 1, 2) \tag{1.1}$$

где $\Pi(x_1, x_2)$ — положительно-определенный потенциал.

Предположим, что система допускает нормальные колебания $x_2 = Cx_1$ (C — постоянная). Такие системы описаны в [1, 3, 5]. Поворотом координатных осей всегда можно привести решение к виду $x_2 = 0$, а потенциал системы — к виду

$$\Pi(x_1, x_2) = \sum_{i=2}^{m} a_i x_1^i + x_2^2 \sum_{i=0}^{m-2} e_i x_1^i + \sum_{i=3}^{\infty} x_2^i g_i(x_1)$$

Условие существования указанных решений $\partial\Pi(x_1, 0)/\partial x_2 = 0$ тождественно выполняется.

Движение во времени по траектории нормальных колебаний описывается одним уравнением второго порядка

(1.2) $$x^{\cdot\cdot} + \partial\Pi(x, 0)/\partial x = 0, \quad x \equiv x_1$$

причем первый интеграл (интеграл энергии) имеет вид

(1.3) $$x^{\cdot 2}/2 + \Pi(x, 0) = h$$

Орбитальная устойчивость прямолинейной формы колебаний связана с вариациями y, ортогональными траектории. Уравнение, описывающее движение в ортогональном направлении, в первом приближении имеет вид

(1.4) $$y^{\cdot\cdot} + y\,(\partial^2\Pi(x, 0)/\partial x_2^2) = 0$$

Условия конечности числа зон неустойчивости для уравнения вида (1.4) получены в [6]. А именно периодические потенциалы $u(t)$ уравнения Шредингера

$$-[-d^2/dt^2 + u(t)]\,\psi = e\psi$$

(в рассматриваемой системе $u - e = -\partial^2\Pi(x, 0)/\partial x_2^2$, $e = -2e_0$) имеют лишь n конечных запрещенных зон (зон неустойчивости), если уравнение $i\chi^{\cdot} - \chi^2 = u - e$ допускает решение вида $\chi = (D - ip^{\cdot}/2)/p$, где D — постоянная, а p — полином по e степени n с переменными коэффициентами. Уравнение для определения полинома p записывается в следующем виде:

(1.5) $$p^{\cdot\cdot\cdot} - 4(u - e)\,p^{\cdot} - 2u^{\cdot}p = 0$$

Для решения задачи целесообразно использовать известный закон движения по нормальной форме $x(t)$ и получить вместо уравнения с периодическими коэффициентами уравнение с регулярными особыми точками. Введем вместо t новую независимую x («алгебраизация в смысле Айнса» [7]), воспользовавшись соотношениями (1.2), (1.3) и равенством $x^{\cdot\cdot\cdot} = -(\partial^2\Pi(x, 0)/\partial x^2)\,x^{\cdot}$, которое следует из (1.2).

Вместо (1.5) получим теперь уравнение

(1.6) $$2p'''(h - \Pi(x, 0)) + 3p''\left(-\frac{\partial\Pi(x, 0)}{\partial x}\right) + p'\left(-\frac{\partial^2\Pi(x, 0)}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2\Pi(x, 0)}{\partial x_2^2}\right) + 2p\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2\Pi(x, 0)}{\partial x_2^2} = 0$$

где штрих означает дифференцирование по x. Подставляя

(1.7) $$p = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k(x)\,e^k$$

в (1.6) и группируя члены, содержащие одинаковые степени e, получаем задачу на собственные значения a_i, e_i. Так как потенциал $\Pi(x, 0)$ и производные от потенциала, которые входят в уравнение (1.6), представляют собой полиномы по x, то и функции $\alpha_k(x)$ тоже надо искать в виде полинома по x.

Опуская громоздкие промежуточные вычисления, приведем лишь окончательные результаты для некоторых классов систем.

Для системы «линейная с кубами» ($a_2 \neq 0$, $a_4 \neq 0$, $e \neq 0$, $e_2 \neq 0$, все остальные коэффициенты a_i, e_i обращаются в нуль) условие существования решения (1.7) имеет вид

(1.8) $$e_2 = n(n + 1)\,a_4$$

Этот результат очевиден, поскольку уравнение в вариациях в данном случае представляет собой уравнение Ламе.

Для системы «линейная с кубами и пятой степенью» ($a_2 \neq 0$, $a_4 \neq 0$, $a_6 \neq 0$, $e \neq 0$, $e_2 \neq 0$, $e_4 \neq 0$, остальные коэффициенты обращаются в нуль) соответствующие условия имеют вид

(1.9) $$e_2 = 2n(n + 1)\,a_4, \quad e_4 = 4n(n + 1)\,a_6, \quad 4a_2a_4a_6 - a_4^3 + 8ha_6^2 = 0.$$

Для системы «линейная с кубами и квадратами» ($a_2 \neq 0$, $a_3 \neq 0$, $a_4 \neq 0$, $e \neq 0$, $e_1 \neq 0$, $e_2 \neq 0$, остальные коэффициенты a_i, e_i обращаются в нуль) получим

(1.10) $$e_2 = n(n+1)a_4, \quad e_1 = n(n+1)a_3/2, \quad a_3^2 = 4a_2a_4$$

2. Для выяснения смысла соотношений (1.8)—(1.10) применим алгебраизацию по Айнсу непосредственно к уравнению в вариациях (1.4). В результате получим обобщенное уравнение Ламе, а именно уравнение класса Фукса, показатели особых точек которого равны 0 и $^1/_2$. Это уравнение при определенной симметрии в расположении особых точек и симметрии вспомогательных параметров квадратичным преобразованием приводится к обобщенному уравнению Ламе с меньшим числом особых точек.

Простейшее уравнение, которое можно получить на этом пути,— стандартное уравнение Ламе в алгебраической форме с действительными коэффициентами

(2.1) $$y''(z^2 - a^2)(z^2 - b^2) + y'z(2z^2 - a^2 - b^2) - y(n(n+1)z^2 - \lambda) = 0$$

Коэффициент при y'' имеет смысл кинетической энергии преобразованной системы, которая для рассматриваемого периодического режима дважды обращается в нуль на периоде при амплитудных значениях $z = \pm a$. Поэтому, без уменьшения общности, полагаем, что $a > 0$, $|z| \leqslant a$ и либо $b^2 < 0$, либо $b^2 > a^2$.

Выпишем собственные функции и собственные значения задач определения границ устойчивости по первому приближению в случае n зон неустойчивости в порядке возрастания числа нулей собственных функций, $n = 0, 1, 2$. При этом вводятся следующие промежуточные обозначения:

$$\alpha_{\pm} = 2\{a^2 + b^2 \pm ((a^2 + b^2)^2 - 3a^2b^2)^{1/2}\}, \quad \xi = \sqrt{a^2 - z^2}$$
$$\eta_1 = \sqrt{z^2 - b^2}, \quad \eta_2 = \sqrt{b^2 - z^2}, \quad \zeta_i = z^2 - 2a^2b^2/\lambda_i \ (i = 0, 4)$$

Собственные функции и собственные значения имеют вид (C — произвольная постоянная)

$$\begin{aligned}
&n = 0: y_0 = C, \quad \lambda_0 = 0\\
&n = 1: \ (b^2 < 0)\ y_0 = C\eta_1, \quad \lambda_0 = a^2\\
&y_1 = Cz, \ \lambda_1 = a^2 + b^2; \quad y_2 = C\xi, \quad \lambda_2 = b^2\\
&n = 1: \ (b^2 > a^2)\ y_0 = C\eta_2, \quad \lambda_0 = a^2\\
&y_1 = C\xi, \ \lambda_1 = b^2; \quad y_2 = Cz, \quad \lambda_2 = a^2 + b^2\\
&n = 2: \ (b^2 < 0)\ y_0 = C\zeta_0, \quad \lambda_0 = \alpha_+\\
&y_1 = Cz\eta_1, \quad \lambda_1 = 4a^2 + b^2; \quad y_2 = C\xi\eta_1, \quad \lambda_2 = a^2 + b^2\\
&y_3 = Cz\xi, \quad \lambda_3 = a^2 + 4b^2; \quad y_4 = C\zeta_4, \quad \lambda_4 = \alpha_-\\
&n = 2: (b^2 > a^2)\ y_0 = C\zeta_0, \quad \lambda_0 = \alpha_-\\
&y_1 = C\xi\eta_2, \quad \lambda_1 = a^2 + b^2; \quad y_2 = Cz\eta_2, \ \lambda_2 = 4a^2 + b^2\\
&y_3 = Cz\xi, \quad \lambda_3 = a^2 + 4b^2; \quad y_4 = C\zeta_4, \quad \lambda_4 = \alpha_+
\end{aligned}$$

Заметим, что областям неустойчивости отвечают интервалы

$$(-\infty, \lambda_0], \ [\lambda_1, \lambda_2], \ [\lambda_3, \lambda_4]$$

Уравнение (2.1) соответствует уравнению (1.4) для системы «линейная с кубами» (в случае конечнозонности), если

$$\begin{aligned}
&h/a_4 = a^2b^2; \quad e_4/a_4 = -\lambda\\
&a_2/a_4 = -a^2 - b^2; \quad e_2/a_4 = n(n+1); \quad x = z
\end{aligned}$$

Сдвиг вдоль действительной оси $z = z_1 + \mu$, где $\mu = ((a^2 + b^2)/2)^{1/2}$ приводит к уравнению в вариациях для системы «линейная с кубами и квадратами» (случай конечного числа зон неустойчивости) при

$$\begin{aligned}
&h/a_4 = -a^2b^2 + \mu^2(a^2 + b^2) - \mu^4; \quad e_0/a_4 = -\lambda + \mu^2 n(n+1)\\
&a_2/a_4 = 2(a^2 + b^2); \quad e_1/a_4 = 2\mu n(n+1)\\
&a_3/a_4 = 4\mu; \quad e_2/a_4 = n(n+1); \quad x = z_1
\end{aligned}$$

Отсюда следуют равенства (1.10).

При помощи квадратичного преобразования $z = z_2^2 - a$ получим уравнение в вариациях для системы «линейная с кубами и пятой степенью» (случай конечного числа зон неустойчивости) при

$$\begin{aligned}
&h/a_6 = 2a(a^2 - b^2); \quad e_0/a_6 = 4(a^2n(n+1) - \lambda)\\
&a_2/a_6 = 5a^2 - b^2; \quad e_2/a_6 = -8an(n+1)\\
&a_4/a_6 = -4a; \quad e_4/a_6 = 4n(n+1); \quad x = z_2
\end{aligned}$$

Отсюда следуют равенства (1.9).

Соответственно преобразуются собственные функции и собственные значения.

Интересно, что в последнем случае в отличие от предыдущих сохраняются лишь зоны неустойчивости, ограниченные собственными функциями, имеющими четное число нулей. Остальные зоны неустойчивости стягиваются в линии. В частности, стягивается в линию первая, обычно наиболее широкая (как, например, в уравнении Матье) область неустойчивости.

Если равенства (1.8)—(1.10) выполняются лишь приближенно, то имеется бесконечное число зон неустойчивости, однако все они, исключая выделенные выше, в определенном смысле «узкие», поскольку при выполнении условий (1.8)—(1.10) стягиваются в линии.

В качестве примера рассматривается плоская, целиком упругая колебательная цепь [8] с двумя степенями свободы. К такого типа моделям могут приводить задачи динамики стержней, вантовых конструкций с сосредоточенными элементами и др. Рассмотрим плоские поперечные колебания двух единичных точечных масс, связанных между собой линейной пружиной с жесткостью c_2 и длиной L в равновесном состоянии и связанных с точками закрепления линейными пружинами с жесткостью c_1 и длинами l в равновесном состоянии. Предполагается, что пружины предварительно деформированы таким образом, что в точках закрепления приложены постоянные усилия T (растягивающие или сжимающие). Гамильтониан системы

$$H = \frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{2} x_i^{\cdot 2} + \sum_{i=1}^{2} c_1\left((x_i^2 + l^2)^{1/2} - l_0\right)^2 + c_2\left(((x_1 - x_2)^2 + L^2)^{1/2} - L_0\right)^2\right\}$$

$$l_0 = l - T/c_1, \quad L_0 = L - T/c_2$$

Здесь x_i — поперечные смещения масс.

Удерживая в уравнениях движения члены, содержащие лишь первые, третьи и пятые степени по x_1, x_2, приходим к следующим уравнениям:

$$x_i^{\cdot\cdot} + c_1\left((1 - l_0/l)\,x_i + \frac{l_0}{2}\left(\frac{x_i}{l}\right)^3 - \frac{3l_0}{8}\left(\frac{x_i}{l}\right)^5\right) +$$
$$+ c_2\left(\left(1 - \frac{L_0}{L}\right)(x_i - x_j) + \frac{L_0}{2}\left(\frac{x_i - x_j}{L}\right)^3 -\right.$$
$$\left. - \frac{3L_0}{8}\left(\frac{x_i - x_j}{L}\right)^5\right) = 0 \quad (i = 1, 2;\ j = 3 - i)$$

Обозначим

$$T/l = \tau_1, \quad T/L = \tau_2, \quad c_1 l_0/l = \gamma_1, \quad c_2 L_0/L = \gamma_2, \quad (l/L)^2 = \sigma$$

Рассмотрим антифазную форму колебаний $x_1 = -x_2$. Переходя к новым переменным $x = (x_1 - x_2)/(2l)$, $y = (x_1 + x_2)/(2l)$, получим уравнение, описывающее движение по форме $y = 0$, $x = x(t)$ (аналогичное (1.2)), и уравнение, определяющее орбитальную устойчивость в первом приближении (аналогичное (1.4)), которые имеют следующий вид:

$$x^{\cdot\cdot} + 2a_2 x + 4a_4 x^3 + 6a_6 x^5 = 0$$
$$y^{\cdot\cdot} + 2\,(e_0 + e_2 x^2 + e_4 x^4)\,y = 0$$
$$a_2 = \tau_1/2 + \tau_2, \quad a_4 = \gamma_1/8 + \gamma_2\sigma, \quad a_6 = -\gamma_1/16 - 2\gamma_2\sigma^2$$
$$e_0 = \tau_1/2, \quad e_2 = 3\gamma_1/4, \quad e_4 = -15\gamma_1/16$$

Условия (1.9) в данном случае приводят к соотношениям

$$3 = N\,(1 + 8\gamma_3), \quad 15 = 4N\,(1 + 32\gamma_3\sigma)$$
$$8\,(\tau_1 + 2\tau_2)\,(1 + 8\gamma_3)\,(1 + 32\gamma_3\sigma) + (1 + 8\gamma_3)^3 = 4h\,(1 + 32\gamma_3\sigma)^2$$
$$\gamma_3 = \gamma_2\sigma/\gamma_1, \quad N = n\,(n + 1)$$

Здесь n — число ограниченных зон неустойчивости, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Пусть, например, $n = 1$. Тогда должно быть $\sigma = 7/16$, $\gamma_3 = 1/16$, $40\,(\tau_1 + 2\tau_2) + 6 = 25h$.

Вблизи значений параметров системы и энергии h, которые удовлетворяют выписанным соотношениям, все зоны неустойчивости, кроме n из них, «узкие», поскольку в случае, когда соотношения выполняются точно, они стягиваются в линии. Это относится и к первой зоне параметрического резонанса, которая обычно предполагается «широкой».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rosenberg R. M., Hsu C. S.* On the geometrization of normal vibration of nonlinear systems having many degrees of freedom.— В кн.: Тр. Междунар. симпоз. по нелинейным колебаниям. Т. 1. Киев: Изд-во АН УССР, 1963, с. 380—416.
2. *Pecelli G., Thomas E. S.* An example of elliptic stability with large parameters: Lame's equation and the Arnold—Moser—Russmann criterion.— Quart. Appl. Math., 1978, v. 36, No. 2, p. 129—140.
3. *Pecelli G., Thomas E. S.* Normal modes, incoupling and stability for a class of nonlinear oscillators.— Quart. Appl. Math., 1979, v. 37, No. 3, p. 281—301.
4. *Month L. A., Rand R. H.* An application of the Poincare map to the stability of nonlinear normal modes.— Trans. ASME., J. Appl. Mech., 1980, v. 47, No. 3, p. 645—651.
5. *Жупиев А. Л., Михлин Ю. В.* Устойчивость и ветвление нормальных форм колебаний нелинейных систем.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 3, с. 450—455.
6. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. 319 с.
7. *Айнс Э. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: Научн.-техн. изд-во Украины, 1939. 717 с.
8. *Старжинский В. М.* Прикладные методы нелинейных колебаний. М.: Наука, 1977. 255 с.

Днепропетровск

Поступила в редакцию 3.IX.1982

УДК 531.36 : 534.1

О ГИПОТЕЗЕ ЭКСТРЕМАЛЬНОСТИ УСТОЙЧИВЫХ РЕЗОНАНСНЫХ ДВИЖЕНИЙ

Касаткин Г. В.

На основании предлагаемого приближенного метода определения средних значений от функций координат и времени на траекториях динамических систем, близких к интегрируемым, проводится усреднение силовой функции и кинетической энергии в следующих задачах: движение материальной точки в окрестности треугольных точек либрации плоской круговой ограниченной задачи трех тел, движение физического маятника с быстро колеблющейся точкой подвеса в окрестностях нижнего и верхнего положений равновесий. Показана предпочтительность следующих гипотез: минимум усредненных потенциальной (гипотеза В. В. Белецкого), кинетической и полной энергий механической системы на устойчивых изолированных синхронных движениях.

В исследованиях экстремальных свойств устойчивых резонансных (синхронных) движений потенциальных механических систем [1—3] особый интерес представляет экстремальный принцип, выдвинутый в форме гипотезы В. В. Белецким [2, 3]: функция

$$\langle U\rangle = f(x_0) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t U(x(x_0,t),t)\,dt$$

принимает максимальные значения на устойчивых резонансных движениях. Здесь U — силовая функция, периодически зависящая от времени t, а $x(x_0, t)$ — решение уравнений движения механической системы с начальным значением x_0 в момент $t = 0$. В связи с этим экстремальным принципом интенсивно изучались экстремальные свойства устойчивых синхронных движений (например, [4—6]), не снявшие, однако, вопроса о его справедливости.

Анализ значений функции $\langle U\rangle$ имеет принципиальную трудность, связанную с тем, что закон движения $x(x_0, t)$ представлен, как правило, неинтегрируемой дифференциальной системой уравнений движения. Приближенное вычисление $\langle U\rangle$, проведенное на ЭВМ для задачи о плоских вращениях спутника относительно его центра масс, движущегося по эллиптической орбите [1], дало результаты, согласующиеся с гипотезой.

---

[1] См. [2], а также *Белецкий В. В., Шляхтин А. Н.* Резонансные вращения спутника при взаимодействии магнитного и гравитационного полей.— Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР. М., 1980, № 46. 30 с.