

РЕАЛИЗАЦИЯ ГОЛОНОМИИ ПРИ ДВИЖЕНИИ МЕХАНИЗМОВ

Рахула М. О.

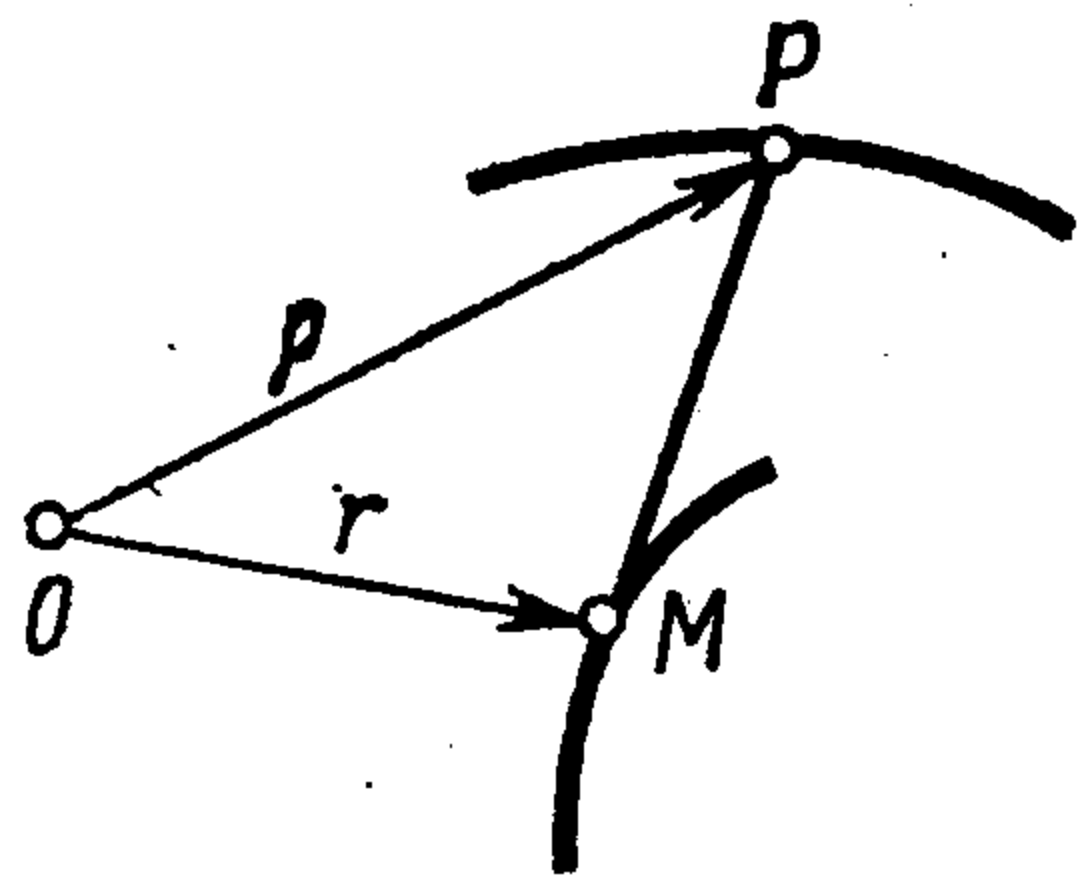
На двух примерах устанавливается связь между современной теорией связностей и механикой неголономных систем.

Идея связности состоит в следующем. Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ рассматривается на плоскости xy как поле направлений, а система дифференциальных уравнений

$$\partial u^\alpha / \partial u^i = -\Gamma_i^\alpha(u), \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad \alpha = n+1, \dots, n+r$$

с правыми частями, зависящими в общем случае как от независимых переменных u^i (базисных координат), так и от неизвестных функций u^α (слоевых координат), или, что равносильно, система Пфаффа $du^\alpha + \Gamma_i^\alpha du^i = 0$, рассматривается в пространстве всех переменных (u^i, u^α) как поле n -мерных площадок. Связность в расслоении $\pi: V_1 \rightarrow V$ есть задание на многообразии V_1 горизонтального распределения Δ_h , т. е. такого поля площадок, которое при касательном отображении $T\pi$ покрывает касательное расслоение TV [1]. Главное при связности — это перенесение слоёв вдоль путей, заданных на базе V , и в частности, преобразования слоёв при обходе замкнутых циклов, т. е. то, что называется голономией.

Ниже рассматриваются две задачи из теории механизмов, которые могли бы служить моделью для описания движений с неголономными связями и раскрыть значение голономии для практических задач. Первая задача иллюстрирует возникновение связности и голономии в обычном расслоении, вторая иллюстрирует эти понятия в более сложном двойном расслоении. При этом многократные расслоения не предполагаются векторными [2]. Такая общность оказывается более плодотворной.



Фиг. 1

Задача 1. На плоскости задана некоторая кривая $\rho(t)$ (фиг. 1). Требуется найти в этой же плоскости кривую $\gamma(t)$, для которой длина отрезка касательной от точки касания M до точки пересечения P с кривой $\rho(t)$ — величина постоянная, и описать траекторию точки M в зависимости от вида кривой $\rho(t)$.

Обозначим координаты точек P и M через (u, v) и (x, y) . Стержень PM отождествляется с точкой (u, v, x, y) четырехмерного пространства \mathbb{R}^4 . Отображение $\pi: PM \rightarrow P$ проектирует \mathbb{R}^4 на \mathbb{R}^2 , расслаивая \mathbb{R}^4 на двумерные слои. Координаты (u, v) становятся базисными, (x, y) — слоевыми. Точка P принадлежит базе, точка M — слою $\pi^{-1}(P)$. Условия

1) $d\mathbf{r} \parallel \mathbf{r} - \rho$, 2) $|\mathbf{r} - \rho| = a - \text{const}$ эквивалентны системе Пфаффа

$$a^2 dx = (x - u) \theta, \quad a^2 dy = (y - v) \theta \quad (\theta = (x - u) du + (y - v) dv)$$

определяющей в \mathbb{R}^4 двумерное распределение Δ_h . Базис для Δ_h составляют векторные поля

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{x - u}{a^2} Z, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial v} + \frac{y - v}{a^2} Z$$

$$\left(Z = (x - u) \frac{\partial}{\partial x} + (y - v) \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

Вместе с операторами $X_3 = \partial/\partial x$, $X_4 = \partial/\partial y$ поля X_1 и X_2 образуют адаптированный базис ([1], с. 169). Распределение Δ_h не интегрируемо, т. е.

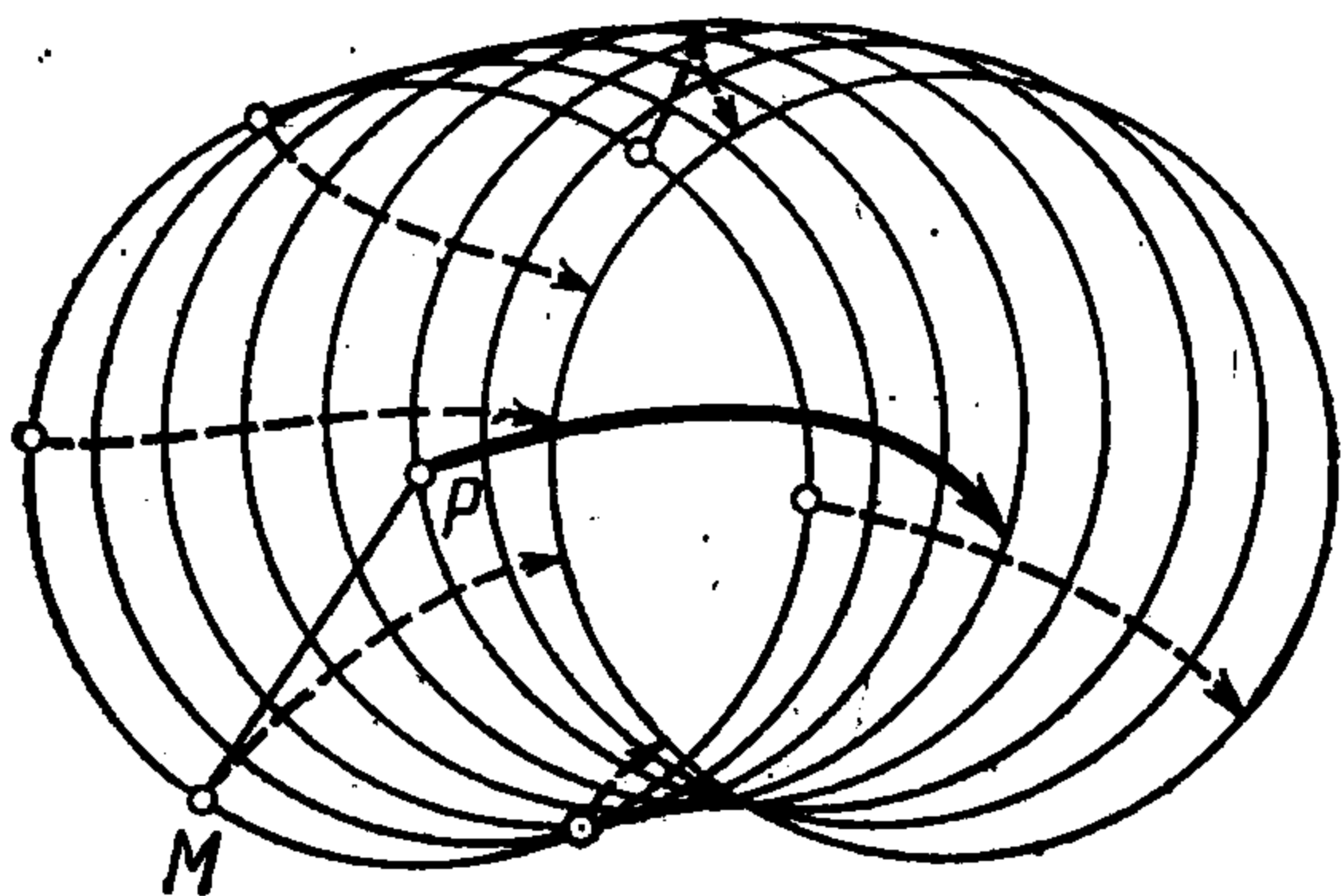
$$[X_1 X_2] = -a^{-2} ((y - v) X_3 - (x - u) X_4)$$

Связи, характеризующие движение стержня PM , неголономны ([3], с. 46). Векторное поле $[X_1 X_2]$ — оператор группы голономии; его траектории — концентрические окружности в каждом слое $\pi^{-1}(P)$. Путем фиксации a одну из этих окружностей в $\pi^{-1}(P)$ можно выделить и принять за новый слой над P . Производя такую фиксацию в каждом слое, получаем расслоение голономии [4] $\sigma = \pi \circ \varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ с редуцирующим отображением

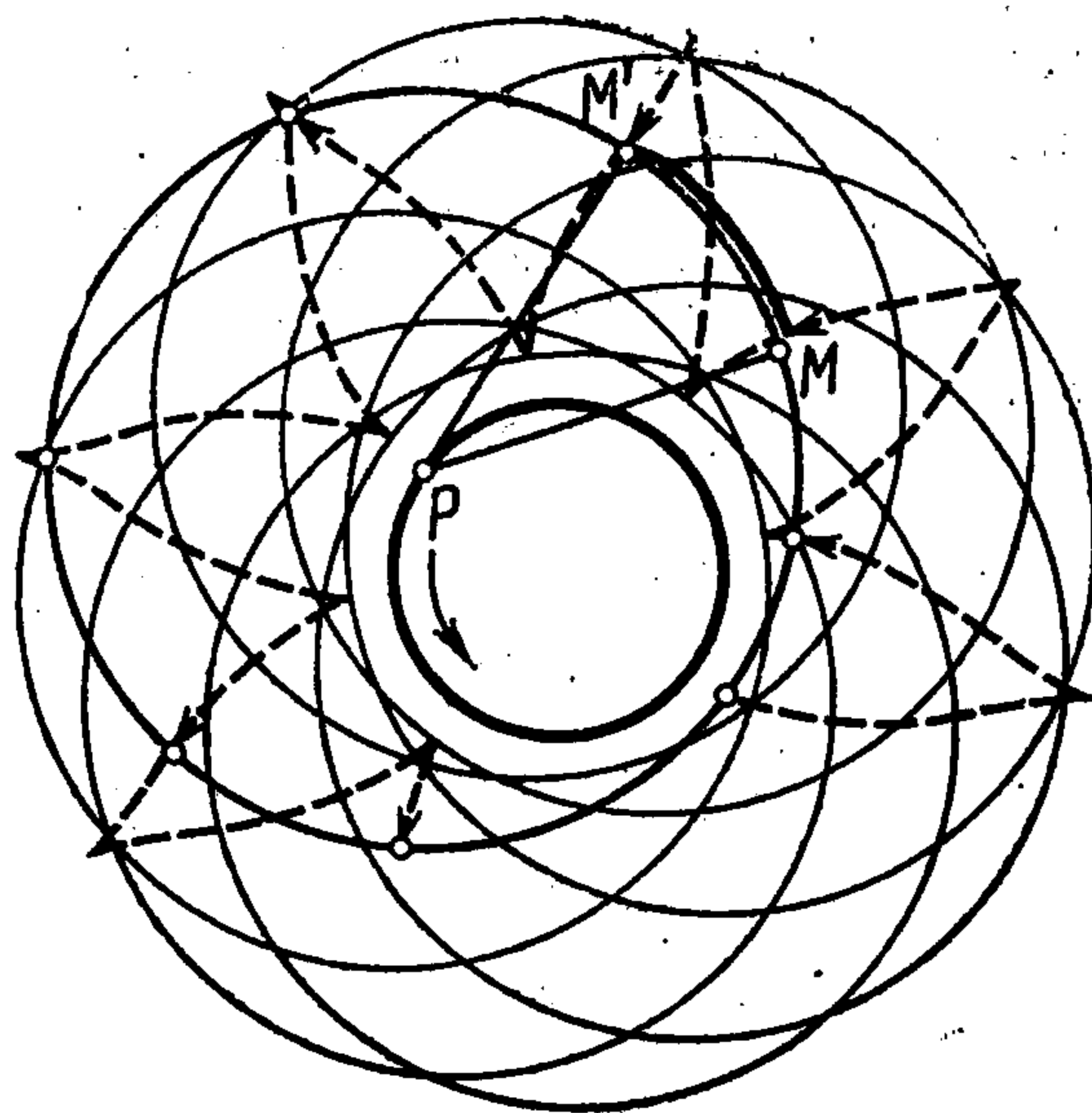
$$\varphi: (u, v, \tau) \rightarrow (u, v, x, y), \quad x = u + a \cos \tau, \quad y = v + a \sin \tau$$

В расслоении голономии два уравнения Пфаффа заменяются одним

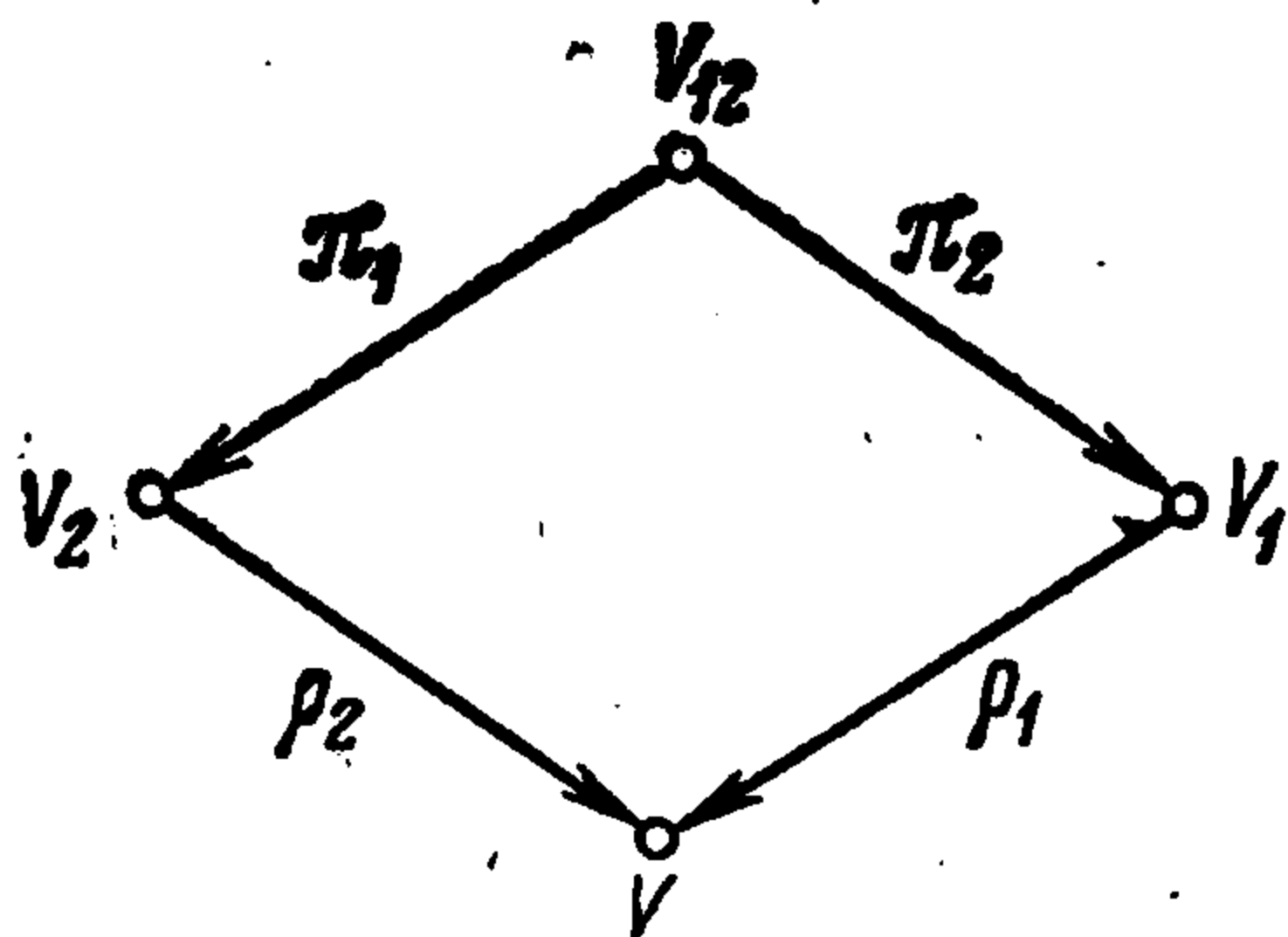
$$a d\tau = \sin \tau du - \cos \tau dv.$$



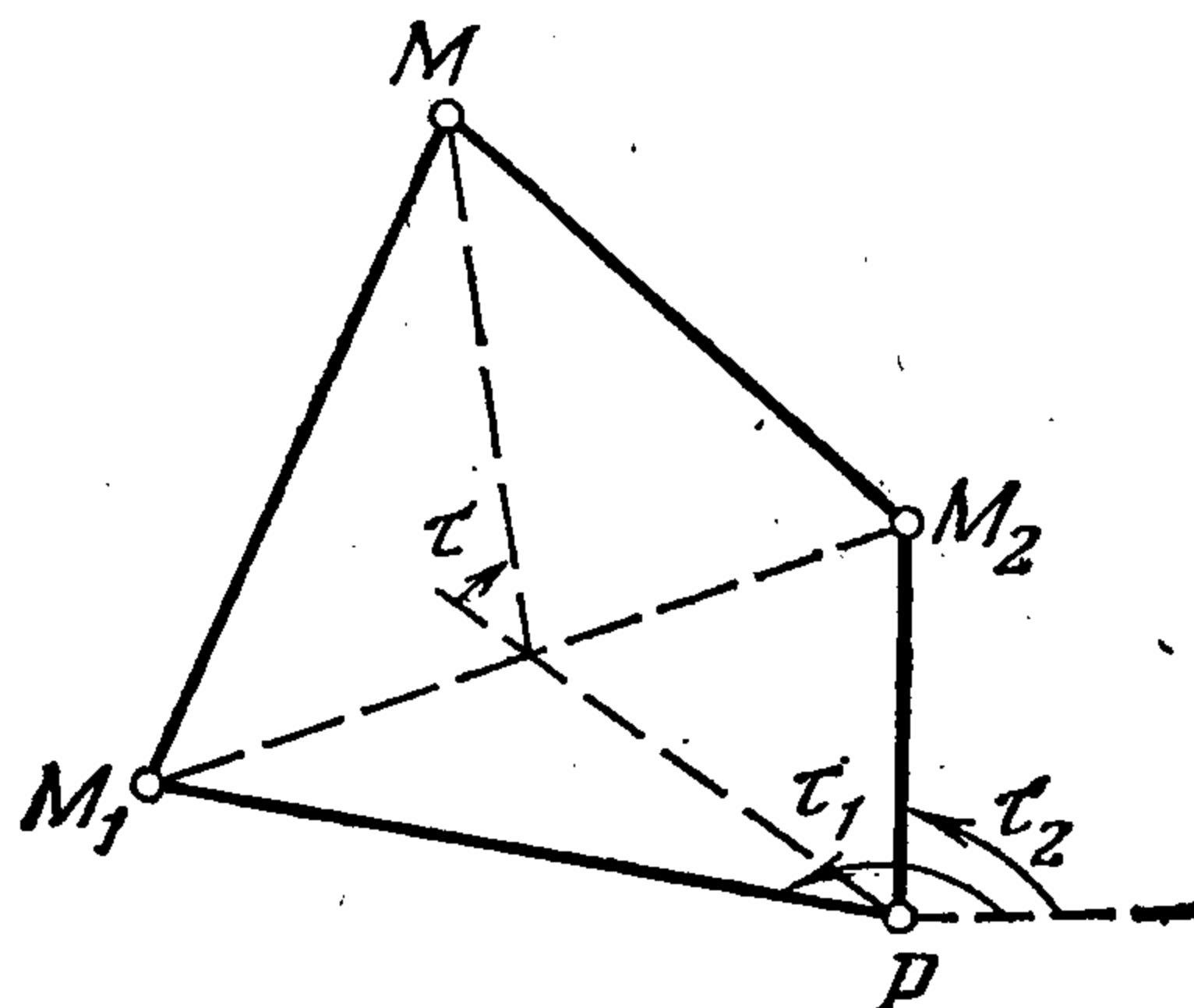
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Вместо распределения Δ_h имеется распределение Δ_h' , также двумерное, с векторным базисом

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{a} \sin \tau \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial v} - \frac{1}{a} \cos \tau \frac{\partial}{\partial \tau}$$

Поля Y_1 и Y_2 ϕ -связаны с полями X_1 и X_2 : $T\phi Y_k = X_k$, $k = 1, 2$. Скобка $[Y_1 Y_2] = a^{-2} d/\partial \tau$ ϕ -связана со скобкой $[X_1 X_2]$. Таким образом, в расслоении голономии точка P — точка базы, ее траектория на плоскости uv — путь на базе, слой $\sigma^{-1}(P)$ — окружность радиуса a с центром P , слои над путём — однопараметрическое семейство окружностей, лифты — ортогональные траектории этого семейства (фиг. 2). Если путь на базе — прямая линия, то лифты — обыкновенные трактрисы.

На фиг. 3 штриховой линией изображен лифт пути, имеющего вид окружности. Показано первоначальное положение стержня PM и его новое положение PM' по завершении точкой P обхода окружности против часовой стрелки. Поворот окружности $M \rightarrow M'$ и служит проявлением голономии. Ясно, что подобный поворот окружности $\sigma^{-1}(P)$ наблюдается при обходе точкой P любого замкнутого цикла. Этот факт лежит в основе конструкции планиметра [5].

К такого типа задачам относится большое число задач теории управления, в частности игры преследования, когда движение одной точки (x, y, \dots) зависит от поведения другой точки (u, v, \dots) и характер связи описывается системой Пфаффа.

Следует отметить, что голономия наблюдается всегда при появлении скобки векторных полей. Например, если в R^n имеются векторные поля $X = x^i \partial / \partial u^i$ и $Y = y^i \partial / \partial u^i$, то R^n можно дополнить двумя временными осями t и s , и в образовавшемся расслоении $R^{n+2} \rightarrow R^n$, $(u^i, t, s) \rightarrow (u^i)$ векторные поля $X' = \partial / \partial t + X$ и $Y' = \partial / \partial s + Y$ образуют связность со скобкой $[X' Y'] = [XY]$ в качестве оператора группы голономии.

В частности, проявлением голономии служит эффект гироскопа — два вращения в R^3 вокруг осей x и y , определяемые векторными полями $X = z \partial / \partial y - y \partial / \partial z$ и $Y = z \partial / \partial x - x \partial / \partial z$, взаимодействуя, порождают третье вращение вокруг оси z : $[XY] = -y \partial / \partial x + x \partial / \partial y$.

Посмотрим, как голономия проявляет себя в ситуации двойного расслоения, определяемого коммутативной диаграммой, показанной на фиг. 4, где стрелки π_1 , π_2 , ρ_1 , ρ_2 предполагаются субмерсиями.

Задача 2. В пространстве имеется ром PM_1M_2M , стороны которого сочленены шарнирно в вершинах (фиг. 5). Точки P , M_1 и M_2 перемещаются в некоторой плоскости, причём точки M_1 и M_2 следуют за точкой P по условию задачи 1. Требуется описать движение точки M , зная, что касательная к ее траектории лежит в плоскости M_1M_2M .

Сначала вводим координаты вершин: $P(u, v)$, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M(x, y, z)$ и определим проекции

$$PM_1M_2M \xrightarrow{\pi_1} PM_2 \xrightarrow{\rho_2} P, \quad PM_1M_2M \xrightarrow{\pi_2} PM_1 \xrightarrow{\rho_1} P.$$

Многообразие V_{12} девятимерно, многообразия V_1 и V_2 четырехмерны, база V двумерна. По аналогии с задачей 1 отображение

$$\varphi : (u, v, \tau_1, \tau_2, \tau) \rightarrow (u, v, x_1, y_1, x_2, y_2, x, y, z)$$

где

$$x_k = u + a \cos \tau_k, \quad y_k = v + a \sin \tau_k; \quad k = 1, 2$$

$$x = u + a (\cos \tau_1 + \cos \tau_2) \cos^2 \frac{\tau}{2}$$

$$y = v + a (\sin \tau_1 + \sin \tau_2) \cos^2 \frac{\tau}{2}$$

$$z = a \cos \frac{\tau_1 - \tau_2}{2} \sin \tau$$

сводит девятимерное пространство к пятимерному и редуцирует условия

$$1) dr_1 \parallel r_1 - \rho, \quad 2) dr_2 \parallel r_2 - \rho, \quad 3) (dr, r_1 - \rho, r_2 - \rho) = 0$$

$$4) |r_1 - \rho| = |r_2 - \rho| = |r - r_1| = |r - r_2| = a - \text{const}$$

к системе Пфаффа

$$a d\tau_k = \sin \tau_k du - \cos \tau_k dv; \quad k = 1, 2$$

$$a d\tau = \sin \tau \cos \frac{\tau_1 - \tau_2}{2} \left(\cos \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} du + \sin \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} dv \right)$$

Последняя не вполне интегрируема, но допускает первый интеграл

$$(1) \quad \sin \frac{\tau_1 - \tau_2}{2} = C \operatorname{tg} \frac{\tau}{2}$$

(C — произвольная постоянная). Это объясняется тем, что хотя распределение Δ , натянутое на векторные поля

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{a} \left(\sin \tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \sin \tau_2 \frac{\partial}{\partial \tau_2} \right) + \frac{1}{2a} (\cos \tau_1 + \cos \tau_2) \sin \tau \frac{\partial}{\partial \tau}$$

$$Y_2 = \frac{\partial}{\partial v} - \frac{1}{a} \left(\cos \tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \cos \tau_2 \frac{\partial}{\partial \tau_2} \right) + \frac{1}{2a} (\sin \tau_1 + \sin \tau_2) \sin \tau \frac{\partial}{\partial \tau}$$

со скобкой $[Y_1 Y_2] = a^{-2} (\partial/\partial \tau_1 + \partial/\partial \tau_2)$, не зависящей линейно от Y_1 и Y_2 , и не интегрируемо, однако проекции $Y_1' = Y_1 - \partial/\partial u$ и $Y_2' = Y_2 - \partial/\partial v$ на трехмерный слой $\sigma^{-1}(P)$, $\sigma = \varphi \rho_1 \pi_2 = \varphi \rho_2 \pi_1$, образуют со скобкой $[Y_1' Y_2'] = [Y_1 Y_2]$ линейно-зависимую систему

$$\sin \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} Y_1' + \cos \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} Y_2' - a \cos \frac{\tau_1 - \tau_2}{2} [Y_1' Y_2'] = 0$$

Для описания движения точки M сведем при помощи подстановки $X = x - u$, $Y = y - v$, $Z = z$ равенство (1) к уравнению

$$(X^2 + Y^2 + Z^2)^2 = 4a^2 (X^2 + Y^2 - C^2 Z^2)$$

или

$$(\bar{X}^2 + \bar{Y}^2)^2 = 4a^2 (\bar{X}^2 - C^2 \bar{Y}^2), \quad (\bar{X}^2 = X^2 + Y^2, \quad \bar{Y} = Z)$$

Последнее уравнение определяет семейство двулистных кривых, среди которых при $C = 1$ — лемниската. Вращая эти кривые вокруг оси \bar{Y} , получаем семейство поверхностей вращения с центром в точке P , на которое расслоен трехмерный слой $\sigma^{-1}(P)$. Точка M скользит в зависимости от начальных значений углов τ_1 , τ_2 и τ по одной из этих поверхностей (фиг. 6). Ее траектория на такой поверхности зависит от пути, описываемого точкой P . При обходе точкой P замкнутого цикла точка M возвращается на исходную параллель, занимая на ней новое положение M' . Под влиянием гомотомии каждая параллель поворачивается на угол $M \rightarrow M'$.

Как известно [6], связность может быть определена в общем случае ν -кратного расслоения. Для двойного расслоения она определяется заданием на тотальном многообразии V_{12} двух распределений Δ_h^1 и Δ_h^2 , горизонтальных для расслоений π_1 и π_2 соответственно. Иначе, если рассмотреть также вертикальные распределения на V_{12}

$$\Delta_v^1 = \text{Ker } T\pi_1, \quad \Delta_v^2 = \text{Ker } T\pi_2,$$

то это равносильно определению на V_{12} структуры

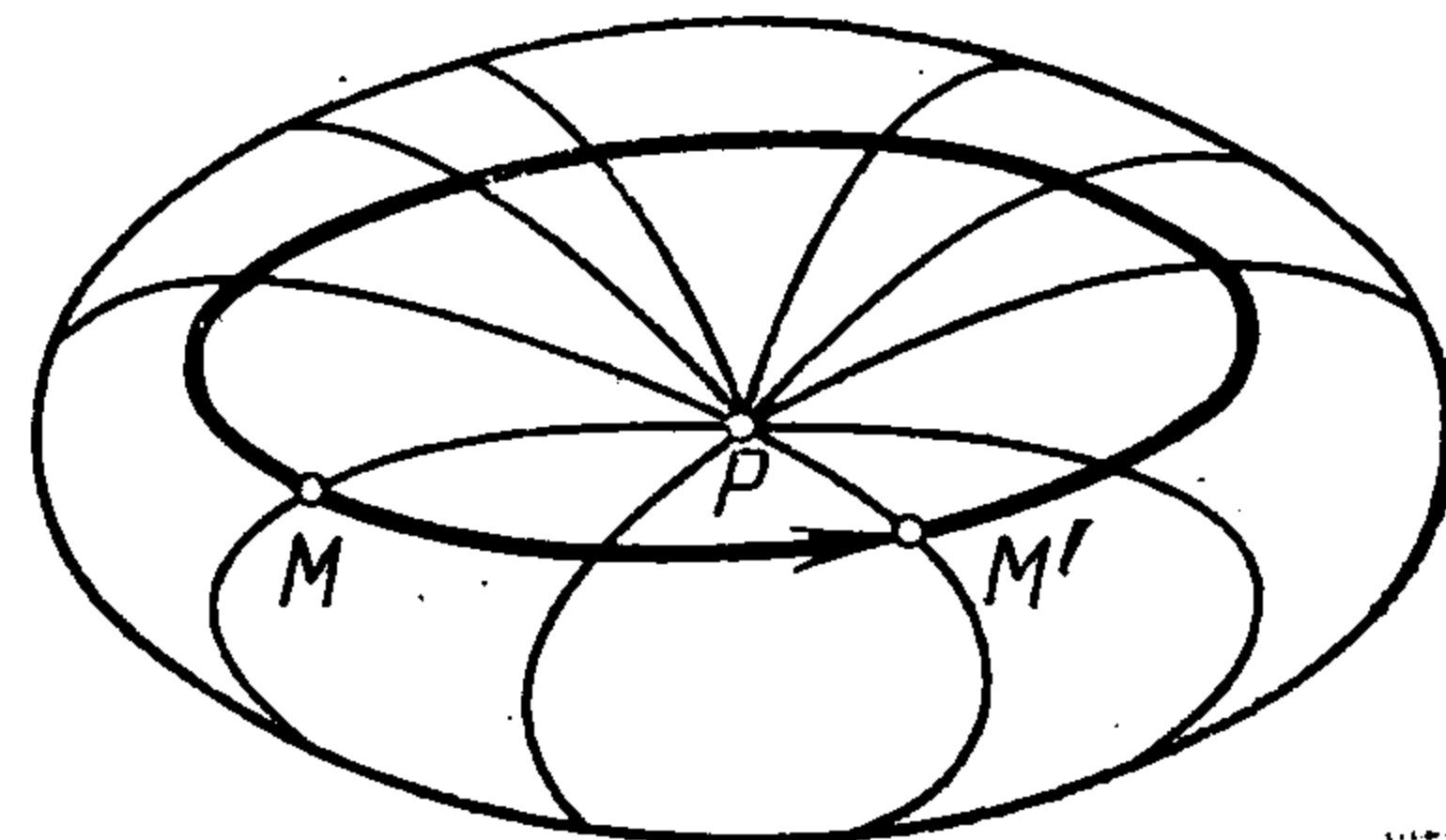
$$\begin{aligned} & \Delta \oplus \Delta_1 \oplus \Delta_2 \oplus \Delta_{12} \\ & (\Delta = \Delta_h^1 \cap \Delta_h^2, \Delta_1 = \Delta_h^2 \cap \Delta_v^1, \Delta_2 = \\ & = \Delta_h^1 \cap \Delta_v^2, \Delta_{12} = \Delta_v^1 \cap \Delta_v^2), \end{aligned}$$

представляющей каждое касательное к V_{12} пространство в виде прямой суммы четырех своих подпространств; при этом

$$\Delta_1 \oplus \Delta_{12} = \text{Ker } T\pi_1, \quad \Delta_2 \oplus \Delta_{12} = \text{Ker } T\pi_2, \quad \Delta_1 \oplus \Delta_2 \oplus \Delta_{12} = \text{Ker } T\sigma,$$

где $\sigma = \rho_1\pi_2 = \rho_2\pi_1$, и $\Delta \oplus \Delta_1$ и $\Delta \oplus \Delta_2$ проектируются при $T\pi_2$ и $T\pi_1$ на V_1 и V_2 , определяя связности в расслоениях ρ_1 и ρ_2 .

В рассматриваемом примере после редукции многообразие V_{12} пятимерно, многообразия V_1 и V_2 трехмерны, а база V двумерна. Распределение Δ , натянутое на векторные поля Y_1 и Y_2 , двумерно, а распределения Δ_1 , Δ_2 и Δ_{12} , определяемые соответственно операторами $\partial/\partial\tau_1$, $\partial/\partial\tau_2$ и $\partial/\partial\tau$, одномерны. Приведенные выше три уравнения Пфаффа определяют распределение Δ . Из них второе и третье определяют распределение Δ_1 , а первое и третье — распределение Δ_2 .



Фиг. 6

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахула М. О. Инфинитезимальная связность в расслоении. — В кн.: Проблемы геометрии. Т. 8. Итоги науки и техники. М.: ВИНТИ, 1977, с. 163—182.
2. Pradines J. Fibrés vectoriels doubles et calcul des jets non holonomes. — Esquisses mathém., 1977, № 29, p. 184.
3. Левитский Н. И. Теория механизмов и машин. М.: Наука, 1979. 574 с.
4. Зуланке Р., Винтген П. Дифференциальная геометрия и расслоения. М.: Мир, 1975. 348 с.
5. Эмпахер А. Сила аналогий. М.: Мир, 1965. 154 с.
6. Рахула М. О. Инфинитезимальная связность в многократном расслоении. — Изв. вузов. Математика, 1983, № 1, с. 62—72.

Одесса

Поступила в редакцию
23.II.1983

УДК 531.36 : 534

УСЛОВИЯ КОНЕЧНОСТИ ЧИСЛА ЗОН НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ЗАДАЧЕ О НОРМАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Жупиев А. Л., Михлин Ю. В.

Рассматриваются консервативные нелинейные системы с двумя степенями свободы, допускающие нормальные колебания с прямолинейными траекториями в конфигурационном пространстве. Нормальные колебания нелинейных систем представляют собой обобщение нормальных (главных) колебаний линейных систем [1]. Значение таких решений определяется тем, что при малых внешних периодических воздействиях резонансные режимы близки к нормальным колебаниям.

Аналізу устойчивости нормальных колебаний посвящен ряд работ последнего времени ([2—5] и др.). Ниже в рамках задачи об устойчивости по первому приближению нормальных колебаний получены условия, при которых число зон неустойчивости в пространстве параметров системы конечно. Определяются собственные функции и собственные значения, соответствующие границам зон.

1. Пусть движение консервативной системы определяется уравнениями

$$(1.1) \quad x_i'' + \partial\Pi/\partial x_i = 0 \quad (i = 1, 2)$$

где $\Pi(x_1, x_2)$ — положительно-определенный потенциал.