Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 4, 1984

УДК 521.1

К ЗАДАЧЕ ЛАГРАНЖА О СРЕДНЕМ ДВИЖЕНИИ ПЕРИГЕЛИЕВ

Буров А. А.

Показано, что среднее движение перигелиев в смысле Лагранжа на нерезонансном множестве — равномерно непрерывная по начальным фазам функция частот.

Рассматривается вопрос о динамике планетной системы типа солнечной. В первом приближении теории возмущений, когда можно пренебречь квадратами эксцентриситетов орбит по сравнению с самими эксцентриситетами, эволюция вектора Лапласа описывается функцией

$$A(t)=\sum_{m=0}^{n} a_m \exp\left[2\pi i\left(\lambda_m t+\varphi_{0m}\right)\right]$$

где постоянные a_m, λ_m, φ_{0m} определяются через массы планет и начальные условия. Средним движением перигелия называется

$$\mu(\mathrm{a}, \boldsymbol{\lambda}, \varphi_0)=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\arg A(t)$$

Лагранж показал, что $\mu = 2\pi\lambda_0$, если $a_0 \geqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. В нетривиальном случае, когда это условие не выполняется, для нерезонансного набора частот $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$: $< k, \lambda > \neq 0$, $\forall \mathrm{k} \in Z^{n+1}$, $\mathrm{k} \neq 0$ среднее движение вычислено для $n = 2$ [1] и для произвольного n [2] и имеет вид

$$\mu(\mathrm{a}, \boldsymbol{\lambda})=2\pi\sum_{m=0}^{n}\lambda_m w^m(\mathrm{a})$$

$$\sum_{m=0}^{n} w^m(\mathrm{a})=1,\quad w^m(\mathrm{a})\geqslant 0,\quad \mathrm{a}=(a_0,\ldots,a_n)$$

Существование среднего движения для произвольного набора частот $\boldsymbol{\lambda}$ доказано в [3].

Пусть a, $\boldsymbol{\lambda}$ — некоторые непрерывные функции параметра $\alpha \in R^s$.

Утверждение. Если при $\alpha = \alpha_0$ вектор $\boldsymbol{\lambda}(\alpha_0)$ — нерезонансный, то равномерно по $\varphi_0 \in T^{n+1}\{\varphi \bmod 1\}$

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\mu(\mathrm{a}(\alpha), \boldsymbol{\lambda}(\alpha), \varphi_0)=\mu(\mathrm{a}(\alpha_0), \boldsymbol{\lambda}(\alpha_0))$$

Замечания. 1°. При фиксированном α функция $\mu(\mathrm{a}, \boldsymbol{\lambda}, \varphi_0)$, вообще говоря, разрывна по φ_0, когда $\boldsymbol{\lambda}(\alpha)$ — резонансный вектор.

2°. Если функция $A(t)$ обращается в нуль при некоторых значениях времени, то ее аргумент не определен. В таком случае принято различать «первый» и «левый» аргументы функции $A(t)$. При переходе через нуль кратности p правый аргумент функции $A(t)$ при $t \to \infty$ получает приращение πp, а левый — приращение $(-\pi p)$ [4]. Соответственно определяются правое и левое средние движения μ^+ и μ^- [3], совпадающие для нерезонансных наборов частот. Сформулированное утверждение справедливо как для левого, так и для правого среднего движения.

Доказательство утверждения. Пусть $\lambda_0(\alpha) \neq 0$. Определим $B_{ij_1\ldots j_g}(\alpha) \in T^{n+1} \cap \cap \{\varphi_0 = 0\}$ как множество точек $\varphi_0 = (0, \varphi_{01}, \ldots, \varphi_{0n})$, таких, что соответствующая функция $A(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

1°. $A(t)$ имеет ровно j_m нулей кратности m на полуинтервале $[0, 1/\lambda_0)$.

2°. Пусть δ^+ — число нулей $\{t_s^+\}$ функции $\operatorname{Im} A(t)$, таких, что

$$t_s^+ \in [0, 1/\lambda_0),\quad \operatorname{Im} A(t_s^+ + 0) > 0,\quad \operatorname{Im} A(t_s^+ - 0) < 0,\quad \operatorname{Re} A(t_s^+) < 0$$

3°. Пусть δ^- — число нулей $\{t_s^-\}$ функции $\operatorname{Im} A(t)$, таких, что

$$t_s^- \in [0, 1/\lambda_0),\quad \operatorname{Im} A(t_s^- + 0) < 0,\quad \operatorname{Im} A(t_s^- - 0) > 0,\quad \operatorname{Re} A(t_s^-) < 0$$

Тогда $i = \delta^- - \delta^+$.

Из конструкции Боля — Вейля [1, 2] следует, что для произвольных начальных условий среднее движение вычисляется так:

$$\mu^{\pm}(\mathbf{a}, \lambda, \varphi_0) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \theta^{\pm}(\psi_0 + m\omega(\alpha), \alpha)$$

$$\theta^{\pm}(\psi, \alpha) = 2\pi\lambda_0(\alpha) \sum_{i, j_1, \dots, j_g} \left(i \pm \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{g} m j_m\right) \chi(\psi, B_{ij_1\dots j_g}(\alpha))$$

$$\omega(\alpha) = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}, \dots, \frac{\lambda_n}{\lambda_0}\right), \quad \psi_0 = \left(\varphi_{01} - \varphi_{00}\frac{\lambda_1}{\lambda_0}, \dots, \varphi_{0n} - \varphi_{00}\frac{\lambda_n}{\lambda_0}\right)$$

Для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U_1 \in D$ точки α_0 и две непрерывные на T^n функции $F_1(\psi, \varepsilon)$, $F_2(\psi, \varepsilon)$, такие, что

$$(1) \qquad F_1(\psi, \varepsilon) \leqslant \theta^{\pm}(\psi, \alpha) \leqslant F_2(\psi, \varepsilon), \ \forall (\psi, \alpha) \in T^n \times U_1$$

$$\int_{T^n} [F_2(\psi, \varepsilon) - F_1(\psi, \varepsilon)]\, d\psi \leqslant \varepsilon/3$$

Действительно, если U_2 — достаточно малая окрестность α_0, то число нулей аналитических функций $\operatorname{Im} A(t)$ на

$$\left[0, \operatorname{sign}\lambda_0 \cdot \sup\left|\frac{1}{\lambda_0(\alpha)}\right|\right)$$

ограничено постоянной γ равномерно по $\alpha \in U_2$. Кратность каждого нуля $A(t)$ также ограничена равномерно по $\alpha \in U_2$. Тогда

$$|\theta^{\pm}(\psi, \alpha)| \leqslant \Gamma, \quad \forall (\psi, \alpha) \in T^n \times U_2$$

При фиксированном α функции $\theta^+(\psi, \alpha)$ и $\theta^-(\psi, \alpha)$ совпадают всюду, кроме множества

$$V(\alpha) = \bigcup_i \bigcup_{\Sigma j_m^2 \neq 0} B_{ij_1\dots j_g}(\alpha), \quad 0 < \operatorname{mes}_{n-1} V(\alpha) < \infty$$

Если $S(\alpha, \varepsilon_1)$ — ε_1-окрестность множества $V(\alpha)$, то при $\alpha \in U_3$, где U_3 — достаточно малая окрестность α_0

$$V(\alpha) \in S[(\alpha_0, \varepsilon_1), \quad \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{48\Gamma \operatorname{mes}_{n-1} V(\alpha_0)}$$

$$\sup_{\alpha\in U_3} \lambda_0(\alpha) - \inf_{\alpha\in U_3} \lambda_0(\alpha) \leqslant \frac{\varepsilon}{24\pi\gamma}.$$

Пусть

$$G^{\pm}(\psi) = \begin{cases} \pm\Gamma, & \psi \in S(\alpha_0, \varepsilon_1) \\ \sup\limits_{\alpha\in U_2\cap U_3} \left(\inf\limits_{\alpha\in U_2\cap U_3}\right) \theta^{\pm}(\psi, \alpha), & \psi \notin S(\alpha_0, \varepsilon_1) \end{cases}$$

Тогда

$$\int_{T^n} (G^+(\psi) - G^-(\psi))\, d\psi =$$

$$= \int_{S(\alpha_0, \varepsilon_1)} (G^+ - G^-)\, d\psi + \int_{T^n \setminus S(\alpha_0, \varepsilon_1)} (G^+ - G^-)\, d\psi \leqslant$$

$$\leqslant 2\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{48\Gamma} + o(\varepsilon)\right) + 2\pi\gamma\,(\sup_{\alpha\in U_2\cap U_3} \lambda_0(\alpha) - \inf_{\alpha\in U_2\cap U_3} \lambda_0(\alpha)) < \frac{\varepsilon}{6}$$

Применяя теперь к G^- и G^+ стандартный прием приближения ступенчатых функций непрерывными, получаем функции F_1, F_2, удовлетворяющие неравенствам (1).

Дальнейшие рассуждения близки к рассуждениям в теореме В. В. Козлова о временных средних [5].

По теореме Вейерштрасса об аппроксимации [6] существуют тригонометрические полиномы $Q_1(\psi)$, $Q_2(\psi)$, такие, что

$$|Q_m(\psi) - F_m(\psi, \varepsilon)| < \varepsilon/6, \quad m = 1, 2$$

Тогда полиномы $P_1(\psi) = Q_1(\psi) - \varepsilon/6$, $P_2(\psi) = Q_2(\psi) + \varepsilon/6$ удовлетворяют условиям

$$(2) \qquad P_1(\psi) < \theta^{\pm}(\psi, \alpha) < P_2(\psi), \quad \forall (\psi, \alpha) = T^n \times U_1$$
$$\int_{T^n} [P_2(\psi) - P_1(\psi)]\, d\psi < \varepsilon$$

Пусть $d = \max(\deg P_1, \deg P_2)$. Так как при $\alpha = \alpha_0 < \mathbf{k}, \omega(\alpha_0) > \notin Z$ для всех $\mathbf{k} \in Z^n$, $\mathbf{k} \neq 0$, то в некоторой окрестности $U_4 \in D$ точки α_0 справедливы неравенства

$$(3) \qquad |\langle \mathbf{k}, \omega(\alpha)\rangle - k_0| > \varepsilon > 0, \quad 0 < |\mathbf{k}| = \sum_{m=1}^{n} |k_m| \leqslant d$$

Если

$$g(\psi) = \sum_{0 \leqslant |\mathbf{k}| \leqslant d} g_k \exp[2\pi i \langle \mathbf{k}, \psi\rangle]$$

то при выполнении неравенств (3) имеем

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} g(\psi_0 + m\omega(\alpha)) = g_0 = \int_{T^n} g(\psi)\, d\psi$$

Тогда

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} P_q(\psi_0 + m\omega(\alpha)) = \Lambda_q = \int_{T^n} P_q(\psi)\, d\psi, \quad q = 1, 2$$

В силу первого неравенства (2)

$$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} P_1(\psi_0 + m\omega(\alpha)) < \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \theta^{\pm}(\psi_0 + m\omega(\alpha), \alpha) <$$
$$< \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} P_2(\psi_0 + m\omega(\alpha))$$

и в пределе при $N \to \infty$ имеем

$$\Lambda_1 \leqslant \mu^{\pm}(\mathbf{a}(\alpha), \lambda(\alpha), \varphi_0) \leqslant \Lambda_2, \quad \alpha \in U_1 \cap U_4 = U$$

Но в силу первого неравенства (2) при $\alpha = \alpha_0$

$$\Lambda_1 \leqslant \mu(\mathbf{a}(\alpha_0), \lambda(\alpha_0)) \leqslant \Lambda_2$$

откуда в силу второго неравенства (2)

$$|\mu^{\pm}(\mathbf{a}(\alpha), \lambda(\alpha), \varphi_0) - \mu(\mathbf{a}(\alpha_0), \lambda(\alpha_0))| < \varepsilon, \quad \alpha \in U$$

что и требовалось.

Автор благодарит В. В. Козлова за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боль П. Г.* Собрание трудов. Рига.: Зинатне, 1974. 517 с.
2. *Weyl H.* Mean Motion.— Amer. J. Math., 1938, v. 60, No. 4, p. 889—896.
3. *Jessen B., Tornehave H.* Mean motion and zeros of almost periodic functions.— Acta Math., v. 77, No. 3—4, p. 137—279.
4. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956. 632 с.
5. *Козлов В. В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: Изд-во МГУ, 1980. 230 с.
6. *Бурбаки Н.* Общая топология. М.: Наука, 1975. 408 с.

Москва

Поступила в редакцию
11.VI.1982