

УДК 539.375

О ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ БЕРЕГОВ ПОЛОСОВОЙ ТРЕЩИНЫ В УПРУГОМ СЛОЕ

Сметанин Б. И., Соболев Б. В.

Рассматривается задача об установившихся продольных колебаниях берегов плоской полосовой трещины в упругом слое. Методами интегральных преобразований задача сводится к решению интегрального уравнения первого рода. Решение этого уравнения строится при помощи асимптотического метода «больших λ » [1], а также методом Ритца. Асимптотический метод позволил получить решение указанной задачи в удобном для практики виде. Расчетные формулы приводятся для коэффициента интенсивности касательных напряжений, возникающих вне трещины, на ее продолжении, а также для функции, характеризующей продольные перемещения берегов трещины.

1. Постановка задачи. Пусть в срединной плоскости упругого слоя толщиной $2h$ расположена полосовая трещина, занимающая область $y = \pm 0, |x| \leq a, |z| < \infty$. Грани слоя свободны от нагрузки. К берегам трещины приложена нагрузка $\tau_{yz} = \pm \tau \cos \omega t$ (t — время, знаки плюс и минус соответствуют верхнему и нижнему берегам трещины). Эта задача обобщенным преобразованием Фурье может быть сведена [2] к решению следующего интегрального уравнения:

$$(1.1) \quad \int_{-1}^1 \varphi(\eta) d\eta \int_{\Gamma} \sqrt{u^2 - \kappa^2} \operatorname{th}(\sqrt{u^2 - \kappa^2}) \exp\left(iu \frac{\eta - \xi}{\lambda}\right) du = 2\pi \frac{\tau a}{G} \lambda^2$$

$$\kappa = \omega h \sqrt{\rho/G}, \quad \lambda = h/a, \quad \xi = x/a, \quad |\xi| \leq 1$$

Здесь G — модуль сдвига, ρ — плотность упругой среды. Функция $\varphi(\xi)$ связана с проекцией W вектора перемещения на ось Oz при $y = \pm 0, |x| \leq a$ формулой

$$(1.2) \quad W = \pm \operatorname{Re} \{ \varphi(x/a) \exp(i\omega t) \}$$

Ядро интегрального уравнения (1.1) следует понимать в смысле обобщенных функций. Контур Γ в ядре совпадает с вещественной осью всюду вне окрестности вещественных полюсов функции $\operatorname{th}\sqrt{u^2 - \kappa^2}$, положительные вещественные полюсы обходит сверху, а отрицательные — снизу [2].

Полюсы функции $\operatorname{th}\sqrt{u^2 - \kappa^2}$ определяются из уравнения $\operatorname{ch}\sqrt{u^2 - \kappa^2} = 0$ и имеют вид

$$u = \pm u_n, \quad u_n = \sqrt{\kappa^2 - \pi^2 (n - 1/2)^2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

т. е. при $\kappa < \pi/2$ лежат на мнимой оси симметрично относительно вещественной оси. При $\pi/2 < \kappa < \infty$ на действительной оси будет находиться конечное число полюсов функции $\operatorname{th}\sqrt{u^2 - \kappa^2}$.

Совместим контур Γ в (1.1) с вещественной осью. В результате получим

$$(1.3) \quad \int_{-1}^1 \varphi(\eta) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{u^2 - \kappa^2} \exp(ilu) \operatorname{th}\sqrt{u^2 - \kappa^2} du + \right.$$

$$\left. + \left[1 + \operatorname{sign}\left(\kappa - \frac{\pi}{2}\right) \right] \frac{\pi^3}{4} i \sum_{n=1}^N \frac{(2n-1)^2}{u_n} \cos(lu_n) \right\} d\eta = 2\pi \frac{\tau a}{G} \lambda^2$$

$$l = \frac{\eta - \xi}{\lambda} \left(\kappa \neq \pi n - \frac{\pi}{2}; n = 1, 2, \dots, N \right), \quad |\xi| \leq 1$$

Внеинтегральные слагаемые в ядре уравнения (1.3) обусловлены наличием у функции $\text{th} \sqrt{u^2 - \kappa^2}$ полюсов на вещественной оси, N — число положительных вещественных полюсов этой функции (случай двухкратных полюсов в начале координат не рассматриваются). Учитывая значение интеграла [3]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{u-c} = 0 \quad (\text{Im } c = 0)$$

преобразуем (1.3) к виду, удобному при использовании полуаналитических методов решения этого уравнения, реализуемых с применением ЭВМ

$$(1.4) \quad \int_{-1}^1 \varphi(\eta) \left\{ \int_0^{\infty} [V \sqrt{u^2 - \kappa^2} \text{th} \sqrt{u^2 - \kappa^2} \cos(lu) + \right. \\ \left. + \left[1 + \text{sign} \left(\kappa - \frac{\pi}{2} \right) \right] \frac{\pi^2}{4} \sum_{n=1}^N \frac{(2n-1)^2}{u^2 - u_n^2} \cos(lu_n) \right] du + \\ \left. + \left[1 + \text{sign} \left(\kappa - \frac{\pi}{2} \right) \right] \frac{\pi^3}{8} i \sum_{n=1}^N \frac{(2n-1)^2}{u_n} \cos(lu_n) \right\} d\eta = \pi \frac{\tau a}{G} \lambda^2$$

2. Метод «больших λ ». При реализации метода [1] решения уравнения (1.4) удобнее рассматривать

$$(2.1) \quad \int_{-1}^1 \psi(\eta) q\left(\frac{\eta - \xi}{\lambda}\right) d\eta = -\pi \frac{\tau a}{G} \lambda, \quad |\xi| \leq 1$$

$$(2.2) \quad q(l) = q_1(l) + q_2(l)$$

$$q_1(l) = \int_0^{\infty} \frac{V \sqrt{u^2 - \kappa^2}}{u} \sin(lu) du$$

$$q_2(l) = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{V \sqrt{u^2 - \kappa^2}}{u} (\text{th} \sqrt{u^2 - \kappa^2} - 1) \sin(lu) + \right. \\ \left. + \left[1 + \text{sign} \left(\kappa - \frac{\pi}{2} \right) \right] \frac{\pi^2}{4} \sum_{n=1}^N \frac{(2n-1)^2}{u_n (u^2 - u_n^2)} \sin(lu_n) \right\} du + \\ + \left[1 + \text{sign} \left(\kappa - \frac{\pi}{2} \right) \right] \frac{\pi^3}{8} i \sum_{n=1}^N \frac{(2n-1)^2}{u_n^2} \sin(lu_n)$$

Интегральное уравнение (2.1) с ядром (2.2) эквивалентно уравнению (1.4) при выполнении условий

$$(2.3) \quad \varphi(\pm 1) = 0, \quad \varphi'(\xi) \equiv \psi(\xi)$$

Отметим, что особенности подынтегральной функции (2.2) устранимы.

В соответствии с принципом предельного поглощения [2] функция $q_1(l)$ может быть представлена в виде $(H_1^{(2)}(z) - \text{функция Ганкеля [4], } C - \text{постоянная Эйлера})$

$$q_1(l) = \frac{\pi}{2} \kappa i \int \frac{H_1^{(2)}(l)}{l} dl = \\ = \frac{1}{l} + \sum_{m=0}^{\infty} \left(a_m + i \frac{\pi}{2} B_m + B_m \ln |l| \right) l^{2m+1}$$

$$B_m = \frac{(-1)^m (2m-1)!! \kappa^{2m+2}}{(2m+1)! (2m+2)!!}$$

$$a_m = B_m \left[C - \ln \frac{2}{\kappa} - \frac{(2m+2)^{-1}}{2m+1} - \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k} \right], \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Функция $q_2(l)$ может быть разложена в ряд

$$q_2(l) = \sum_{m=0}^{\infty} (c_m + id_m) l^{2m+1}$$

где c_m и d_m на основании последнего равенства (2.2) представимы в форме

$$c_m = -i \frac{\pi}{2} B_m + f_m \quad (m = 0, 1, \dots)$$

$$f_m = \frac{(-1)^m \pi^2}{8(2m+1)!} \left[1 + \operatorname{sign} \left(\kappa - \frac{\pi}{2} \right) \right] \sum_{n=1}^N (2n-1)^2 u_n^{2m-1} \times \\ \times \ln \frac{\kappa + u_n}{\kappa - u_n} - \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \int_0^{\kappa} \left\{ \sqrt{\kappa^2 - u^2} \operatorname{tg}(\sqrt{\kappa^2 - u^2}) u^{2m} - \right. \\ \left. - \left[1 + \operatorname{sign} \left(\kappa - \frac{\pi}{2} \right) \right] \frac{\pi^2}{4} \sum_{n=1}^N \frac{(2n-1)^2 u_n^{2m}}{u^2 - u_n^2} \right\} du - \\ - \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \int_{\kappa}^{\infty} (1 - \operatorname{th} \sqrt{u^2 - \kappa^2}) \sqrt{u^2 - \kappa^2} u^{2m} du$$

$$d_m = \frac{(-1)^m \pi^3}{8(2m+1)!} \left[1 + \operatorname{sign} \left(\kappa - \frac{\pi}{2} \right) \right] \sum_{n=1}^N (2n-1)^2 u_n^{2m-1}$$

С учетом полученных результатов разложение $q(l)$ в ряд запишем в виде (a_m, f_m, d_m — действительные коэффициенты)

$$(2.4) \quad q(l) = \frac{1}{l} + \sum_{m=0}^{\infty} (A_m + B_m \ln |l|) l^{2m+1}, \quad A_m = a_m + f_m + id_m$$

Внося (2.4) в (2.1), получим путем регуляризации следующее интегральное уравнение второго рода:

$$(2.5) \quad \psi(\xi) = -\frac{\tau a}{G} \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} + \frac{1}{\pi \sqrt{1-\xi^2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{2m+2}} \times \\ \times \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\eta-\xi} d\eta \int_{-1}^1 \psi(\gamma) \left[A_m + B_m \ln \frac{|\gamma-\eta|}{\lambda} \right] (\gamma-\eta)^{2m+1} d\gamma$$

Решение уравнения (2.5) будем искать в виде

$$(2.6) \quad \psi(\xi) = \frac{\tau a}{G} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{mn}(\xi) \lambda^{-2m} \ln^n \lambda$$

Внося $\psi(\xi)$ в форме (2.6) в левую и правую части уравнения (2.5) и приравнявая затем выражения при одинаковых степенях $\lambda^{-2m} \ln^n \lambda$, получим уравнения, определяющие $\psi_{mn}(\xi)$

$$(2.7) \quad \psi_{00}(\xi) = -\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \\ \psi_{10}(\xi) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-\xi^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\eta-\xi} d\eta \int_{-1}^1 \psi_{00}(\gamma) \times \\ \times [A_0 + B_0 \ln |\gamma-\eta|] (\gamma-\eta) d\gamma$$

$$\psi_{11}(\xi) = -\frac{B_0}{\pi \sqrt{1-\xi^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\eta-\xi} d\eta \int_{-1}^1 \psi_{00}(\gamma) (\gamma-\eta) d\gamma$$

После определения функций $\psi_{mn}(\xi)$ получим

$$(2.8) \quad \psi(\xi) = -\frac{\tau a}{G} \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \left[1 - (D_0 + B_0 \xi^2) \frac{1}{2\lambda^2} + \right. \\ \left. + (F_0 + F_1 \xi^2 + F_2 \xi^4) \frac{1}{\lambda^4} + O(\lambda^{-6} \ln^3 \lambda) \right] \\ F_0 = \frac{1}{24} B_0^2 + \frac{3}{16} B_0 D_0 + \frac{1}{4} D_0^2 + \frac{13}{16} B_1 + \frac{3}{8} D_1 \\ F_1 = \frac{5}{48} B_0^2 + \frac{1}{4} B_0 D_0 - \frac{15}{8} B_1 - \frac{3}{2} D_1, \quad F_2 = \frac{1}{24} B_0^2 - \frac{1}{4} B_1 \\ D_n = A_n - B_n \ln 2\lambda \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Из (2.8) с учетом (2.3) можно найти функцию

$$(2.9) \quad \varphi(\xi) = \frac{\tau a}{G} \sqrt{1-\xi^2} \left\{ 1 - \left[D_0 + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \xi^2 \right) B_0 \right] \frac{1}{2\lambda^2} + \right. \\ \left. + \left[F_0 + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \xi^2 \right) F_1 + \left(\frac{8}{15} + \frac{4}{15} \xi^2 + \frac{1}{5} \xi^4 \right) F_2 \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{\lambda^4} + O(\lambda^{-6} \ln^3 \lambda) \right\}$$

Следовательно, функцию W , характеризующую перемещения точек берегов трещины, на основании (1.2) и (2.9) можно представить в виде

$$(2.10) \quad W|_{y=\pm 0, |x| \leq a} = \pm \frac{\tau}{G} \sqrt{a^2 - x^2} \operatorname{Re} \left\langle \left\{ 1 - \right. \right. \\ \left. - \left[D_0 + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \frac{x^2}{a^2} \right) B_0 \right] \frac{1}{2\lambda^2} + \left[F_0 + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \frac{x^2}{a^2} \right) F_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{8}{15} + \frac{4}{15} \frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{5} \frac{x^4}{a^4} \right) F_2 \right] \frac{1}{\lambda^4} + O(\lambda^{-6} \ln^3 \lambda) \right\} e^{i\omega t} \right\rangle$$

Коэффициент интенсивности касательных напряжений K_{III} , возникающих вне трещины на ее продолжении, может быть определен по формулам

$$(2.11) \quad K_{III} = \lim_{x \rightarrow a+0} \sqrt{2\pi(x-a)} \tau_{yz}|_{y=+0} = -G \lim_{x \rightarrow a-0} \sqrt{2\pi(a-x)} W_{x'}|_{y=+0}$$

Из (2.10) и (2.11) получим

$$(2.12) \quad K_{III} = \tau \sqrt{a\pi} \operatorname{Re} \left\{ \left[1 - (D_0 + B_0) \frac{1}{2\lambda^2} + (F_0 + F_1 + F_2) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{1}{\lambda^4} + O(\lambda^{-6} \ln^3 \lambda) \right] e^{i\omega t} \right\}$$

Отметим, что из (2.10) и (2.12) может быть получено решение соответствующей задачи о трещине в пространстве. С этой целью в полученном решении нужно отбросить члены, соответствующие $q_2(l)$, а в оставшихся членах необходимо параметр λ заменить на ε , где $\varepsilon = (a\omega)^{-1} \sqrt{G/\rho}$. Например, из (2.12) получим

$$(2.13) \quad K_{III} = \tau \sqrt{a\pi} (\Omega_1 \cos \omega t + \Omega_2 \sin \omega t) \\ \Omega_1 = 1 + \left(0,3273 + \frac{1}{4} \ln \varepsilon \right) \varepsilon^{-2} + \left(-0,0554 + 0,1563 \ln \varepsilon + \right. \\ \left. + \frac{1}{16} \ln^2 \varepsilon \right) \varepsilon^{-4} + O(\varepsilon^{-6} \ln^3 \varepsilon) \\ \Omega_2 = 0,3927 \varepsilon^{-2} + (0,2447 + 0,1963 \ln \varepsilon) \varepsilon^{-4} + O(\varepsilon^{-6} \ln^3 \varepsilon)$$

Формулы (2.13) могут быть использованы при $2 \leq \varepsilon < \infty$. Результаты вычислений по этим формулам совпадают с результатами, приведенными в работе [5].

3. Метод Ритца. При использовании метода Ритца [6] интегральное уравнение рассматриваемой задачи следует брать в форме (1.4). Учитывая четность функции $\varphi(\xi)$, преобразуем это уравнение к виду

$$(3.1) \quad \int_{-1}^1 \varphi(\eta) \left\{ \int_0^{\infty} \left[\sqrt{u^2 - \kappa^2} \operatorname{th} \sqrt{u^2 - \kappa^2} \cos \frac{\eta u}{\lambda} \cos \frac{\xi u}{\lambda} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left[1 + \operatorname{sign} \left(\kappa - \frac{\pi}{2} \right) \right] \frac{\pi^2}{4} \sum_{n=1}^N \frac{(2n-1)^2}{u^2 - u_n^2} \cos \frac{\eta u_n}{\lambda} \cos \frac{\xi u_n}{\lambda} \right] du + \right. \\ \left. + \left[1 + \operatorname{sign} \left(\kappa - \frac{\pi}{2} \right) \right] \frac{\pi^3}{8} i \sum_{n=1}^N \frac{(2n-1)^2}{u_n} \cos \frac{\eta u_n}{\lambda} \cos \frac{\xi u_n}{\lambda} \right\} d\eta = f \\ (f = \pi \tau a G^{-1} \lambda^2, \quad |\xi| \leq 1)$$

Решение уравнения (3.1) будем искать в форме

$$(3.2) \quad \varphi(\xi) = \frac{\tau a}{G} \sqrt{1 - \xi^2} \sum_{m=0}^M \frac{(-1)^m}{2m+1} X_m U_{2m}(\xi)$$

где $U_{2m}(\xi)$ — полиномы Чебышева второго рода, X_m — коэффициенты, подлежащие определению. Обозначая интегральный оператор, действующий в (3.1) на функцию φ , через L , запишем это уравнение в виде

$$(3.3) \quad L\varphi = f$$

Рассмотрим функционал

$$(3.4) \quad F(\varphi) = (L\varphi, \varphi) - 2(\varphi, f) \quad \left((\varphi_1, \varphi_2) = \int_{-1}^1 \varphi_1(\xi) \varphi_2(\xi) d\xi \right)$$

Внося $\varphi(\xi)$ в форме (3.2) в (3.4) и используя условия минимума функционала $F(\varphi)$, т. е. $\partial F / \partial X_m = 0$ ($m = 0, 1, \dots, M$), получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно X_m (δ_{mn} — символ Кронекера):

$$(3.5) \quad \sum_{m=0}^M X_m R_{mn} = \frac{1}{2} \delta_{n0} \quad (n = 0, 1, \dots, M)$$

$$(3.6) \quad R_{mn} = \frac{\delta_{mn}}{2(2m+1)} + \int_0^{\infty} \left\{ \left[\sqrt{u^2 - \kappa^2} \operatorname{th} \sqrt{u^2 - \kappa^2} - u \right] \times \right. \\ \times u^{-2} J_{2m+1} \left(\frac{u}{\lambda} \right) J_{2n+1} \left(\frac{u}{\lambda} \right) + \left[1 + \operatorname{sign} \left(\kappa - \frac{\pi}{2} \right) \right] \frac{\pi^2}{4} \times \\ \times \sum_{j=1}^N u_j^{-2} (u^2 - u_j^2)^{-1} (2j-1)^2 J_{2m+1} \left(\frac{u_j}{\lambda} \right) J_{2n+1} \left(\frac{u_j}{\lambda} \right) \left. \right\} du + \\ + \left[1 + \operatorname{sign} \left(\kappa - \frac{\pi}{2} \right) \right] \frac{\pi^3}{8} i \sum_{j=1}^N (2j-1)^2 u_j^{-3} J_{2m+1} \left(\frac{u_j}{\lambda} \right) J_{2n+1} \left(\frac{u_j}{\lambda} \right)$$

При получении выражения (3.6), определяющего R_{mn} , использованы формулы (7.324, 2), (6.574, 2) [4]. Вычисление коэффициентов R_{mn} следует производить при учете симметрии: $R_{mn} = R_{nm}$.

При реализации метода Ритца решения интегрального уравнения (3.1) в качестве системы координатных функций выбрана система функций $\varphi_m(\xi) = \sqrt{1 - \xi^2} U_{2m}(\xi)$ — элементов вещественного гильбертова пространства. Коэффициенты X_m , входящие в линейную комбинацию этих функций (3.2), при $\lambda < \infty$ и $\kappa < \pi/2$ вещественны, а при $\kappa > \pi/2$ комплексны. Этот вывод следует из представления коэффициентов R_{mn} (3.6).

Отсюда вытекает, что при $\lambda < \infty$ и $\kappa < \pi/2$ отсутствует сдвиг фаз колебаний нагрузки τ_{yz} , приложенной к берегам трещины, и колебаний точек берегов трещины. В остальных случаях, включая случай трещины в пространстве, сдвиг фаз указанных колебаний будет иметь место.

Отметим также, что формулы (3.5), (3.6) могут быть получены методом ортогональных полиномов. При этом нужно использовать разложение $\cos(Az)$ в ряд по полиномам Чебышева второго рода $U_{2n}(z)$

$$(3.7) \quad \cos(Az) = \frac{2}{A} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) J_{2n+1}(A) U_{2n}(z)$$

Справедливость формулы (3.7) легко может быть установлена с использованием формулы (7.324,2) [4] и условия ортогональности полиномов $U_{2n}(z)$ [4]. Разыскивая решение уравнения (3.1) в виде

$$(3.8) \quad \varphi(\xi) = \frac{\tau a}{G} \sqrt{1-\xi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} X_m U_{2m}(\xi)$$

и применяя процедуру метода ортогональных полиномов с использованием (3.7), получим для определения коэффициентов X_m разложения (3.8) следующую бесконечную линейную алгебраическую систему:

$$(3.9) \quad \sum_{m=0}^{\infty} X_m R_{mn} = \frac{1}{2} \delta_{n0} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

где R_{mn} даются формулой (3.6). Применяя к системе (3.9) метод редукции, приходим к конечной системе (3.5).

4. Сопоставление результатов. В результате исследования задачи методом Ритца с учетом значений $U_{2m}(1)/(2m+1) = 1$ получим

$$(4.1) \quad K_{III} = \tau \sqrt{a\lambda} \sum_{m=0}^M (-1)^m \operatorname{Re}(X_m e^{i\omega t})$$

Представим результат решения задачи методом больших λ в виде

$$(4.2) \quad K_{III} = \tau \sqrt{a\lambda} \operatorname{Re}[(N_1 + iN_2) e^{i\omega t}]$$

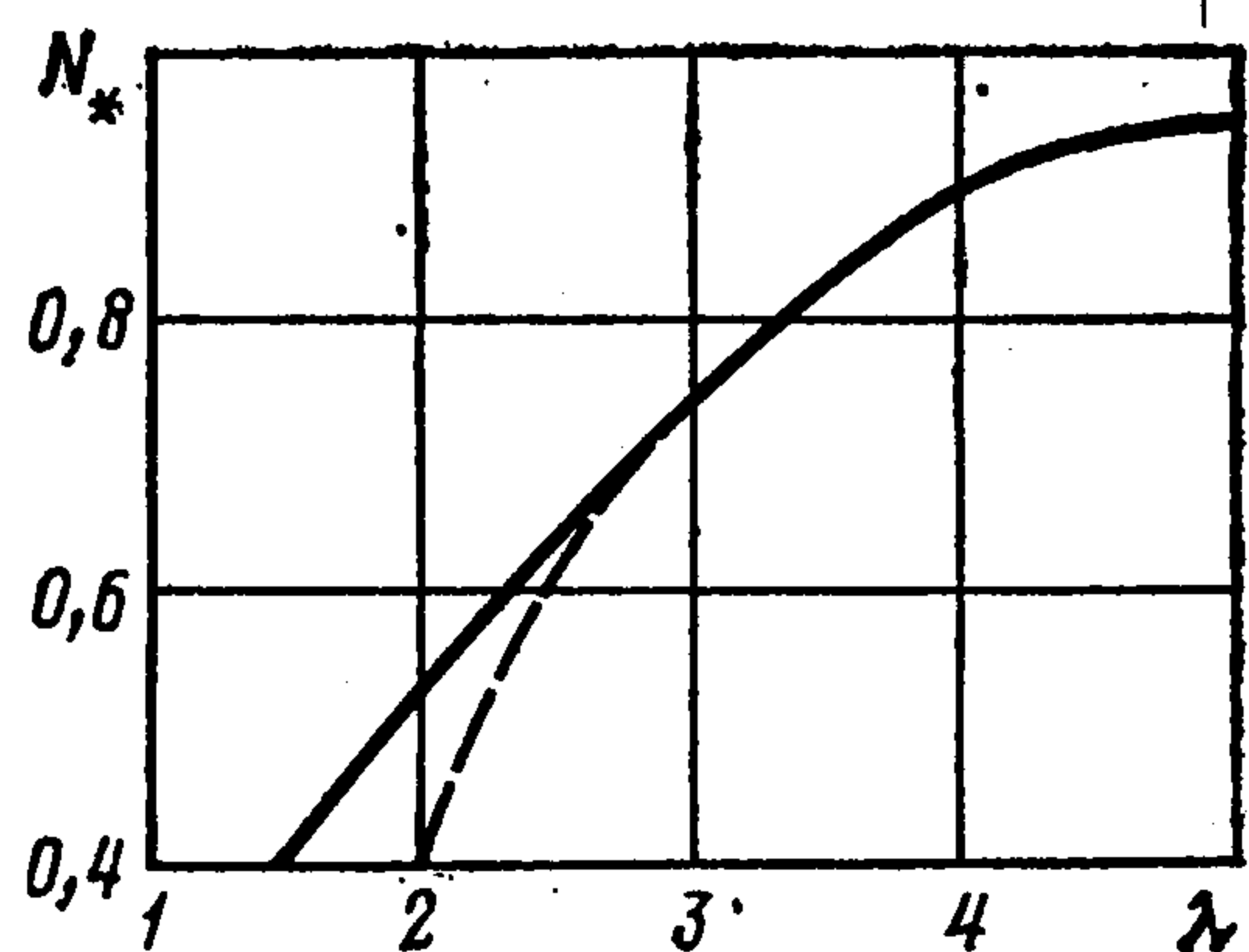
Амплитудные значения коэффициента интенсивности касательных напряжений для каждого из полученных решений вычисляются соответственно по формулам

$$(4.3) \quad \max_t K_{III} = \tau \sqrt{a\lambda} \left\{ \left[\sum_{m=0}^M (-1)^m \operatorname{Re} X_m \right]^2 + \left[\sum_{m=0}^M (-1)^m \operatorname{Im} X_m \right]^2 \right\}^{1/2}$$

$$(4.4) \quad \max_t K_{III} = \tau \sqrt{a\lambda} \{N_1^2 + N_2^2\}^{1/2}$$

На фигуре в качестве иллюстрации приведены результаты вычисления параметра $N_* = \max_t K_{III} / (\tau \sqrt{a\lambda})$ каждым из рассмотренных методов по формулам (4.3) (сплошная линия) и (4.4) (штриховая линия) при $\nu_1 = 1$.

Точность исследования задачи методом Ритца установлена в результате сопоставления результатов при разном количестве координатных функций. В частности, при $0,5 \leq \lambda < \infty$ результаты вычислений при $M_1 = 4$ и $M = 8$ различаются не более



Фиг. 1

чем на 1%. Таким образом, в рассматриваемом случае при $\lambda \geq 3$ решение задачи методом больших λ дает весьма точные результаты.

Авторы благодарят В. М. Александрова за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
2. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
3. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
4. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
5. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1974. 416 с.
6. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
29.III.1983