Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 4, 1984

УДК 539.3 : 534.1

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Братусь А. С., Сейранян А. П.

Рассматриваются задачи максимизации минимального собственного значения самосопряженных матричных и дифференциальных операторов. Эти задачи возникают при оптимизации критической силы потери устойчивости или основной частоты собственных колебаний упругих конструкций [1—4]. Было показано [5—10], что в ряде случаев экстремальное собственное значение оказывается кратным. В задачах максимизации критической силы потери устойчивости кратность критической нагрузки означает наличие нескольких форм потери устойчивости при этой нагрузке.

Ниже для дискретных и непрерывных систем получены достаточные условия локального экстремума для однократного и двукратного собственных значений. В непрерывном случае достаточные условия экстремума выводятся на примере задачи о потере устойчивости стержня. Полученные условия носят конструктивный характер и могут быть использованы в различных задачах оптимизации собственных значений.

1. Рассмотрим обобщенную задачу на собственные значения

$$A(h)u = \lambda B(h)u \tag{1.1}$$

Здесь $A(h)$ и $B(h)$ — положительно-определенные симметрические матрицы $m \times m$ с коэффициентами $a_{ij}(h)$ и $b_{ij}(h)$ соответственно, гладко зависящими от компонент вектора параметров h размерности n, u — вектор размерности m, λ — собственное значение.

Задача (1.1) имеет полную систему собственных векторов u^i ($i = 1, 2, \ldots, m$) и отвечающую этой системе последовательность собственных значений $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_m$, причем будем полагать (δ_{ij} — символ Кронекера)

$$(u^i,\ B(h)\,u^j) = \delta_{ij} \tag{1.2}$$

Здесь и далее круглые скобки обозначают скалярное произведение векторов.

Поставим задачу: найти такой вектор параметров $h = (h_1, \ldots, h_n)$, при котором минимальное собственное число λ_1 задачи (1.1) будет достигать максимального значения при условии

$$F(h) = 0 \tag{1.3}$$

где $F(h)$ — некоторая фиксированная линейная функция векторного аргумента h.

Пусть λ_i и u^i ($i = 1, 2, \ldots, m$) — собственные числа и собственные векторы задачи (1.1), вычисленные при некотором h. Будем сначала предполагать, что λ_1 — однократное собственное значение. Применим результат об аналитическом возмущении спектра симметрических операторов [11]. Придадим вектору h приращение в виде вектора εk, $k = (k_1, \ldots, k_n)$, ε — малое положительное число. Из (1.3) следует, что вектор k должен удовлетворять условию

$$(f^\circ,\ k) = 0, \quad f^\circ = \nabla F \tag{1.4}$$

где f° — фиксированный вектор, задающий градиент функции $F(h)$.

В результате возмущения вектора параметров собственное значение λ_1 и собственный вектор u^1 получат приращения, которые можно записать в виде

$$u = u^1 + \varepsilon v^1 + \varepsilon^2 v^2 + o(\varepsilon^2), \quad \lambda = \lambda_1 + \varepsilon\mu + \varepsilon^2\eta + o(\varepsilon^2)$$

Подставляя полученные разложения в (1.1) и собирая члены при ε в нулевой, первой и второй степени, получим

(1.5) $$A(h)\, u^1 = \lambda_1 B(h)\, u^1$$

(1.6) $$A_1(h, k)\, u^1 + A(h)\, v^1 = \lambda_1 B(h)\, v^1 + \mu B(h)\, u^1 + \lambda_1 B_1(h, k)\, u^1$$

(1.7) $$A_2(h, k)\, u^1 + A_1(h, k)\, v^1 + A(h)\, v^2 = \lambda_1 B(h)\, v^2 + \mu B(h)\, v^1 + \mu B_1(h, k)\, u^1 + \lambda_1 B_1(h, k)\, v^1 + \lambda_1 B_2(h, k)\, u^1 + \eta B(h)\, u^1$$

Здесь $A_1(h, k)$, $B_1(h, k)$ — матрицы с компонентами $(\nabla a_{ij}, k)$ и $(\nabla b_{ij}, k)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$ соответственно, причем

$$\nabla a_{ij} = \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial h_1}, \ldots, \frac{\partial a_{ij}}{\partial h_n}\right)(h), \quad \nabla b_{ij} = \left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial h_1}, \ldots, \frac{\partial b_{ij}}{\partial h_n}\right)(h)$$

$A_2(h, k)$ и $B_2(h, k)$ — матрицы с компонентами

$$\frac{1}{2}\sum_{s, t=1}^{n} \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial h_s \partial h_t}(h)\, k_s k_t, \quad \frac{1}{2}\sum_{s, t=1}^{n} \frac{\partial^2 b_{ij}}{\partial h_s \partial h_t}(h)\, k_s k_t, \quad i, j = 1, 2, \ldots, m$$

Для дальнейшего удобно ввести обозначения (f^l — векторы размерности n)

(1.8) $$C(h) = A(h) - \lambda_1 B(h)$$
$$C_i(h, k) = A_i(h, k) - \lambda_1 B_i(h, k), \quad i = 1, 2$$
$$f^l = \sum_{i, j=1}^{m} u_i^1 u_j^l (\nabla a_{ij} - \lambda_1 \nabla b_{ij})(h), \quad l = 1, \ldots, m$$

Здесь u_j^l — компоненты собственных векторов u^l, $j, l = 1, 2, \ldots, m$. Заметим, что ввиду симметрии матриц A и B матрицы C_i, A_i, B_i $(i = 1, 2)$ и C симметричны.

Умножая скалярно уравнение (1.6) на вектор u^1, используя симметрию матриц $A(h)$ и $B(h)$, условия (1.2) и равенство (1.5), получим

$$\mu = (C_1(h, k)\, u^1, u^1) = (f^1, k)$$

Если h — вектор, реализующий решение поставленной задачи оптимизации, то необходимо, чтобы для любых векторов $k = (k_1, \ldots, k_n)$ выполнялось равенство $\mu = 0$ при $(f^\circ, k) = 0$. Отсюда следует равенство

(1.9) $$f^1 = df^\circ$$

с некоторой постоянной d, что дает необходимое условие экстремума в рассматриваемой задаче максимизации наименьшего собственного значения λ_1.

Будем полагать, что условие (1.9) выполняется, и запишем уравнение (1.6) с учетом равенства $\mu = 0$ в виде

(1.10) $$C(h)\, v^1 = -C_1(h, k)\, u^1$$

где матрица C_1 определена равенством (1.8).

Вектор v^1 можно представить в виде линейной комбинации векторов u^l $(l = 1, \ldots, m)$, т. е.

(1.11) $$v^1 = c_1 u^1 + \ldots + c_m u^m$$

Подставляя это разложение в уравнение (1.10) и последовательно умножая его скалярно на векторы u^l, с учетом (1.5) и обозначений (1.8) получим

$$v^1 = c_1 u^1 - \sum_{l=2}^{m} \frac{(f^l, k)}{\lambda_l - \lambda_1} u^l \tag{1.12}$$

Постоянная c_1 определяется из условия нормировки и не влияет на последующие выкладки.

Умножим скалярно уравнение (1.7) на вектор u^1, используя (1.5), равенство $\mu = 0$ и условие (1.2). В итоге получим выражение для второй поправки к собственному значению

$$\eta = (C_2(h, k)\, u^1, u^1) + (C_1(h, k)\, u^1, v^1)$$

где C_1 и C_2 определены в (1.8). Введем обозначение

$$d_{st} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} u_i^1 u_j^1 \left(\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial h_s \partial h_t} - \lambda_1 \frac{\partial^2 b_{ij}}{\partial h_s \partial h_t} \right)(h)$$

а через $D(h)$ обозначим матрицу с компонентами d_{st}; $s, t = 1, \ldots, n$. Учитывая равенство (1.12), условие стационарности $(f^1, k) = 0$ и введенные выше обозначения (1.8), имеем

$$\eta = (D(h)\, k, k) - \sum_{l=2}^{m} \frac{(f^l, k)^2}{\lambda_l - \lambda_1} \tag{1.13}$$

Выражение (1.13) определяет величину второй вариации собственного значения λ_1 при значении вектора параметров h, удовлетворяющего условию стационарности (1.9).

Утверждение 1. Достаточное условие локального экстремума стационарного значения вектора h выражается неравенством $\eta(h, k) < 0$ для любых вариаций $k = (k_1, \ldots, k_n)$, удовлетворяющих равенству (1.4).

Это условие эквивалентно условию отрицательной определенности формы (1.13), рассматриваемой как квадратичная форма от компонент вектора k, на гиперплоскости $(f^\circ, k) = 0$.

Очевидно, что условие отрицательной определенности матрицы $D(h)$ является достаточным для оптимальности стационарного вектора h, поскольку второй член в (1.13) всегда неположителен вследствие $\lambda_1 < \lambda_l$ $(l = 2, 3, \ldots, m)$.

Рассмотрим частный случай, когда зависимость матриц A и B задачи (1.1) от компонент вектора h линейная, при этом $D \equiv 0$. Если ранг r системы векторов $\{f^l\}$ $(l = 1, 2, \ldots, m)$ равен размерности вектора h, т. е. $r = n$ (что возможно при $m \geqslant n$), то $\eta < 0$ для любых ненулевых векторов k. Действительно, в этом случае $\eta \leqslant 0$ и $\eta = 0$ лишь при $(f^l, k) = 0$ $(l = 1, 2, \ldots, m)$. Ввиду $r = n$ отсюда следует $k \equiv 0$. Заметим, что вследствие условий (1.4), (1.9) вектор k должен удовлетворять условию $(f^1, k) = 0$. Если же $r < n$, то всегда существуют ненулевые векторы k, такие, что $(f^l, k) = 0$ $(l = 1, 2, \ldots, m)$. В этом случае вопрос об экстремуме решается с привлечением вариаций более высокого порядка. Таким образом, при линейной зависимости матриц A и B от компонент вектора h условие $r = n$ является достаточным для оптимальности стационарного вектора h.

2. Рассмотрим случай, когда вектору h, реализующему решение задачи максимизации минимального собственного значения задачи (1.1), соответствует двукратное собственное значение $\lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_3 \leqslant \lambda_4 \ldots$ Как и в п. 1, предполагается, что собственным значениям λ_i отвечают ортогональные и нормированные в смысле (1.2) собственные векторы u^i ($i = 1, 2, \ldots, m$). Любая линейная комбинация векторов u^1 и u^2

$$u^\circ = \gamma_1 u^1 + \gamma_2 u^2, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 \neq 0 \tag{2.1}$$

также является собственным вектором, соответствующим двукратному $\lambda_1 = \lambda_2$.

Придадим вектору h приращение εk, ε — малое положительное число и вычислим приращения собственного значения λ_1. Используя в этом случае разложения [11] $\lambda = \lambda_1 + \varepsilon\mu + \varepsilon^2\eta + o(\varepsilon^2)$ и $u = u^\circ + \varepsilon v^1 + \varepsilon^2 v^2 + o(\varepsilon^2)$, придем к уравнениям (1.5) — (1.7) с той лишь разницей, что вместо u^1 будет стоять $u^\circ = \gamma_1 u^1 + \gamma_2 u^2$. Постоянные γ_1 и γ_2 также подлежат определению из уравнений метода возмущений.

Умножая уравнение (1.6) скалярно на u^1 и u^2, получим систему линейных однородных уравнений относительно γ_1 и γ_2. Приравнивая определитель этой системы нулю, придем к квадратному уравнению для определения μ

$$\begin{gathered}\mu^2 - (\alpha_{11} + \alpha_{22})\,\mu + (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}) = 0 \\ \alpha_{ij} = (C_1(h, k)\, u^i, u^j), \quad i, j = 1, 2\end{gathered} \tag{2.2}$$

где матрица $C_1(h, k)$ определяется вторым равенством (1.8). Ввиду симметрии матрицы C_1 коэффициент $\alpha_{12} = \alpha_{21}$, что обеспечивает вещественность корней уравнения (2.2). Введем векторы размерности n

$$f_s^{\,l} = \sum_{i,\, j=1}^{m} u_i^{\,l} u_j^{\,s} (\nabla a_{ij} - \lambda_1 \nabla b_{ij})(h), \quad l, s = 1, \ldots, m \tag{2.3}$$

Заметим, что $f_s^{\,l} = f_l^{\,s}$ ввиду симметрии a_{ij}, b_{ij}. С учетом этого и обозначений (1.8) α_{ij} запишем в виде

$$\alpha_{ij} = (f_j^{\,i}, k), \quad i, j = 1, 2 \tag{2.4}$$

Если вектор h реализует решение задачи оптимизации, то необходимо $\mu_1\mu_2 \leqslant 0$, где μ_1 и μ_2 — корни квадратного уравнения (2.2). Это означает, что минимальное собственное значение λ_1 является максимальным и допустимые вариации εk не приводят к его увеличению [12].

С использованием (2.2), (2.4) условию $\mu_1\mu_2 \leqslant 0$ придадим вид

$$L(h, k) = (f_1^{\,2}, k)^2 - (f_1^{\,1}, k)(f_2^{\,2}, k) \geqslant 0 \tag{2.5}$$

для любых k, удовлетворяющих изопериметрическому условию (1.4). Как показано в [12], из (2.5) и (1.4) следует линейная зависимость векторов

$$\xi_0 f^\circ + \xi_1 f_1^{\,1} + \xi_2 f_2^{\,2} + \xi_3 f_1^{\,2} = 0 \tag{2.6}$$

где ξ_i ($i = 0, 1, 2, 3$) — постоянные, удовлетворяющие неравенству

$$\xi_1\xi_2 \geqslant {}^1\!/_4\,\xi_3^2 \tag{2.7}$$

Замечание. Условие (2.7) — необходимое условие максимума минимального двукратного собственного значения, если ранг системы векторов f°, $f_1^{\,1}$, $f_2^{\,1}$, $f_2^{\,2}$ равен 3. Если он равен 2, то выберем, например, векторы f°, $f_2^{\,1}$ в качестве базисных и разложим по ним векторы $f_1^{\,1}$, $f_2^{\,2}$: $f_1^{\,1} = \alpha_0 f^\circ + \alpha_1 f_2^{\,1}$, $f_2^{\,2} = \beta_0 f^0 + \beta_1 f_2^{\,1}$. Подставляя эти разложения в (2.5), получим вместо (2.7) следующее необходимое условие: $1 - \alpha_1\beta_1 \geqslant 0$.

Ниже для простоты будем предполагать, что ранг системы векторов f°, $f_1^{\,1}$, $f_2^{\,2}$, $f_2^{\,1}$ равен 3.

Если форма (2.5) строго положительна при всех ненулевых k, удовлетворяющих условию (1.4), то $\mu_1\mu_2 < 0$. Таким образом, положительная определенность формы (2.5) — достаточное условие оптимальности вектора параметров h.

Однако при размерности вектора параметров $n > 3$ всегда существуют ненулевые вариации k, при которых форма (2.3) обращается в нуль. В частности, если неравенство (2.7) выполняется строго, то $L(h, k) = 0$ тогда и только тогда, когда

$$(f_s^l, k) = 0, \quad (f^\circ, k) = 0, \quad l, s = 1, 2 \tag{2.8}$$

Согласно (2.4), (2.2), отсюда следует $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Обозначим множество векторов k, удовлетворяющих условию (2.8), через K.

Итак, если выполняются необходимые условия экстремума (2.6), (2.7), причем (2.7) выполняется со знаком строгого неравенства, то при всех допустимых вариациях $k \notin K$ имеем $L(h, k) > 0$ и $\mu_1\mu_2 < 0$. Форма $L(h, k) = 0$ лишь при $k \in K$. Этому случаю соответствуют значения $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Следовательно, при вариациях $k \in K$ двукратное собственное значение λ_1 не расщепляется в первом приближении и вопрос об экстремальности вектора h $(n > 3)$ может быть решен с привлечением вторых вариаций двукратного собственного значения λ_1 на множестве вариаций $k \in K$.

Прежде всего определим вектор v^1. Для этого представим v^1 в виде разложения (1.11) по собственным векторам, заменим в уравнении (1.6) u^1 на $u^\circ = \gamma_1 u^1 + \gamma_2 u^2$ и умножим (1.6) скалярно на u^i $(i = 3, 4, \ldots, m)$. Отсюда с учетом $\mu = 0$ найдем коэффициенты c_l. Окончательно получим

$$v^1 = c_1 u^1 + c_2 u^2 - \sum_{l=3}^{m} \frac{(C_1(h, k) u^\circ, u^l)}{\lambda_l - \lambda_1} u^l \tag{2.9}$$

где постоянные c_1 и c_2 определяются из условия нормировки и не существенны для последующих выкладок.

Далее заменим в уравнении (1.7) u^1 на $u^\circ = \gamma_1 u^1 + \gamma_2 u^2$ и умножим его последовательно на u^1 и u^2. С учетом (2.9) и условия $\mu = 0$ получим систему линейных однородных уравнений относительно γ_1 и γ_2. Из условия равенства определителя этой системы нулю получим квадратное уравнение относительно η

$$\eta^2 - \eta(\beta_{11} + \beta_{22}) + \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2 = 0 \tag{2.10}$$

$$\beta_{ij} = (C_2(h, k) u^i, u^j) - \sum_{l=3}^{m} \frac{(C_1(h, k) u^i, u^l)(C_1(h, k) u^j, u^l)}{\lambda_l - \lambda_1}, \quad i, j = 1, 2$$

Матрицы C_1 и C_2, как и прежде, определяются соотношениями (1.8). В силу симметрии коэффициентов β_{ij} корни уравнения (2.10) вещественны.

Таким образом, вторые вариации двукратного собственного значения λ_1 на классе вариаций $k \in K$ определяются из уравнения (2.10).

Сформулируем достаточные условия экстремума, предполагая, что размерность вектора h больше 3 (случай $n \leqslant 3$ рассмотрен в [12]).

Утверждение 2. Пусть выполняются условия: а) вектору h, удовлетворяющему условию (1.3), соответствует двукратное минимальное собственное значение λ_1, б) удовлетворяются необходимые условия экстремума (2.6), (2.7), причем (2.7) выполняется со знаком строгого неравенства. Тогда вектор h доставляет локальный максимум минимальному собственному значению задачи (1.1) при изопериметрическом условии (1.3), если минимальный из корней уравнения (2.10) на классе вариаций $k \in K$ меньше нуля $\eta = \min(\eta_1, \eta_2) < 0$, $k \in K$.

Доказательство. Ввиду условий а), б) форма (2.5) неотрицательна и равна нулю лишь при вариациях k, удовлетворяющих условию (2.8), т. е. при $k \in K$. Отсюда следует $\mu_1\mu_2 < 0$ при $k \notin K$ и $\mu_1 = \mu_2 = 0$ при $k \in K$. В первом случае это означает $\min(\mu_1, \mu_2) < 0$, а во втором случае расщепление двукратного собственного значения определяется вторыми вариациями η_1 и η_2. Совокупность условий $\min(\mu_1, \mu_2) < 0$, $k \notin K$ и $\min(\eta_1, \eta_2) < 0$, $k \in K$ означает наличие локального максимума.

Заметим, что условие $\eta = \min(\eta_1, \eta_2) < 0$ заведомо выполняется, если $\eta_1 + \eta_2 = \beta_{11} + \beta_{22} < 0$.

С использованием выражений для β_{ij} в (2.10) и обозначений (2.3) имеем

$$\eta_1 + \eta_2 = (D_1(h)k, k) - \sum_{l=3}^{m} \frac{(f_1^{\,l}, k)^2 + (f_2^{\,l}, k)^2}{\lambda_l - \lambda_1} \tag{2.11}$$

где $D_1(h)$ — матрица с компонентами

$$d_{st}^1 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} (u_i^1 u_j^1 + u_i^2 u_j^2) \left(\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial h_s \partial h_t} - \lambda_1 \frac{\partial^2 b_{ij}}{\partial h_s \partial h_t} \right),$$
$$s, t = 1, 2, \ldots, n$$

Выражение (2.11) представляет собой квадратичную форму относительно компонент вектора k. Из доказанного утверждения 2 следует вывод о том, что вектор h, удовлетворяющий условию (1.3) и усиленным условиям (2.6), (2.7), реализует локальный максимум минимального двукратного собственного значения, если квадратичная форма (2.11) отрицательно определена на множестве $k \in K$. Последнее условие заведомо выполняется, если матрица $D_1(h)$ отрицательно определена.

В случае линейной зависимости матриц A и B задачи (1.1) от компонент вектора h матрица $D_1 \equiv 0$. В таком случае, если ранг системы векторов $Z_1 \cup Z_2$, где $Z_1 = \{f_1^{\,l}\}$, $Z_2 = \{f_2^{\,l}\}$ $(l = 1, \ldots, m)$, равен n, то $\eta_1 + \eta_2 < 0$ и достаточное условие экстремума выполнено. Доказательство проводится аналогично рассуждениям п. 1.

3. Рассмотрение бесконечномерного случая проведем на примере задачи о потере устойчивости тонкого упругого стержня переменного сечения под действием продольной силы λ. Предполагается, что поперечные сечения стержня представляют собой геометрически подобные и одинаково ориентированные фигуры. В этом случае момент инерции $I(x) = \alpha h^2(x)$, где $h(x)$ — площадь поперечного сечения, α — постоянная, определяемая геометрией сечения.

Функция прогибов стержня $w(x)$ при потере устойчивости определяется из задачи на собственные значения, записанной в безразмерных переменных [3]

$$(h^2 w'')'' + \lambda w'' = 0, \quad 0 < x < 1 \tag{3.1}$$

Рассмотрим два вида граничных условий: «свободный конец — защемление» и «защемление — защемление»

$$(h^2 w'')_{x=0} = [(h^2 w'')' + \lambda w']_{x=0} = 0, \quad w(1) = w'(1) = 0 \tag{3.2}$$
$$w(0) = w'(0) = 0, \quad w(1) = w'(1) = 0 \tag{3.3}$$

Для непрерывных функций $h(x) > 0$, $x \in [0, 1]$ известно [13], что задача на собственные значения (3.1), (3.2) или (3.1), (3.3) обладает дискретным спектром $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots$ с собственными функциями $w_i(x)$, удовлетворяющими условию ортогональности (δ_{ij} — символ Кронекера)

$$\int_0^1 w_i' w_j' \, dx = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \ldots$$

Если функция $h(x)$ обращается в нуль на границе отрезка $[0, 1]$, например в точке $x = 0$, то для положительной определенности задачи на собственные значения достаточно потребовать ограниченности интеграла [13]

$$\int_0^1 dx \int_x^1 h^{-2}(s)\, ds < \infty \tag{3.4}$$

Будем предполагать это условие выполненным.

Задачу на собственные значения (3.1), (3.2) или (3.1), (3.3) можно свести к задаче с дифференциальным оператором второго порядка. Для этого используется замена $y = h^2 w''$ [14]. В результате вместо (3.1) получим уравнение

$$y'' + \lambda h^{-2} y = 0, \quad 0 < x < 1 \tag{3.5}$$

Граничные условия для функции y получим двукратным интегрированием уравнения $y'' + \lambda w'' = 0$ с использованием краевых условий (3.2) или (3.3). В итоге имеем [14]

$$y(0) = 0, \quad y'(1) = (0) \tag{3.6}$$

$$y'(0) = y'(1), \quad y(1) = y(0) + y'(0) \tag{3.7}$$

Всякой собственной функции $w_i(x)$ задачи (3.1), (3.2) или (3.1), (3.3), отвечающей собственному значению λ_i, однозначно соответствует собственная функция y_i с тем же собственным значением λ_i задачи (3.5), (3.6) или (3.5), (3.7) и наоборот, каждой собственной функции y_i, отвечающей собственному значению $\lambda_i \neq 0$, однозначно соответствует собственная функция w_i, отвечающая тому же λ_i. Отсюда следует, что спектр задач (3.5), (3.6) и (3.5), (3.7) неотрицательный, поскольку в задачах (3.1), (3.2) и (3.1), (3.3) все собственные значения положительны.

Непосредственной проверкой можно установить, что в задаче (3.5), (3.6) нет нулевых собственных значений, поэтому спектр в задачах (3.1), (3.2) и (3.5), (3.6) полностью совпадает.

В задаче (3.5), (3.7) имеется двукратное нулевое собственное значение $\lambda_0^1 = \lambda_0^2 = 0$ [15, 16], которому отвечают две линейно-независимые собственные функции 1 и x, возникающие вследствие перехода к задаче с оператором второго порядка.

Собственные функции задач (3.5), (3.6) и (3.5), (3.7) можно ортонормировать

$$\int_0^1 y_i y_j h^{-2}\, dx = \delta_{ij} \tag{3.8}$$

Система собственных функций $\{y_i\}$ полна в пространстве L_2^h функций, интегрируемых с квадратом с весом h^{-2}. Норма в этом пространстве определяется выражением

$$\| y \|^2 = \int_0^1 h^{-2} y^2\, dx, \tag{3.9}$$

Перейдем к задаче оптимизации: требуется найти непрерывную функцию $h(x) \geqslant 0$, максимизирующую первое (ненулевое) собственное значение λ_1 задачи (3.5), (3.6) или (3.5), (3.7) при ограничении на объем стержня

$$\int_0^1 h\, dx = 1 \tag{3.10}$$

Постановка этой задачи принадлежит Лагранжу и рассматривалась во многих работах [1—5, 14—18]. Известно [15, 16], что собственное значение λ_1 в задаче (3.5), (3.6) всегда простое, в то время как в задаче (3.5), (3.7) оно может оказаться двукратным. Поэтому рассмотрим эти случаи по отдельности.

4. Исследуем задачу оптимизации с граничными условиями (3.6). Можно доказать, что решение $h(x)$, удовлетворяющее необходимым условиям первого порядка, реализует локальный максимум минимального собственного значения задачи (3.5), (3.6) при ограничении (3.10).

Для доказательства воспользуемся методом возмущений и получим выражения для первой и второй вариации простого собственного значения λ_1. Придадим функции $h(x)$, подозреваемой на экстремум, приращение $\varepsilon\delta h(x)$, ε — малое положительное число. В результате первое собственное значение λ_1 и соответствующая собственная функция $y_1(x)$ получат приращения [11]

$$\lambda = \lambda_1 + \varepsilon\mu + \varepsilon^2\eta + \ldots, \quad y(x) = y_1(x) + \varepsilon v_1(x) + \varepsilon^2 v_2(x) + \ldots$$

Подставляя эти разложения в (3.5), (3.6) и собирая члены при одинаковых степенях ε, получим

$$(4.1)\qquad \begin{aligned} &y_1'' + \lambda_1 h^{-2} y_1 = 0\\ &v_1'' + \lambda_1 h^{-2} v_1 = 2\lambda_1 h^{-3}\delta h y_1 - \mu h^{-2} y_1\\ &v_2'' + \lambda_1 h^{-2} v_2 = -6\lambda_1 h^{-4}(\delta h)^2 y_1 + 2\lambda_1 h^{-3}\delta h v_1 + 2h^{-3}\mu\delta h y_1 - \mu v_1 h^{-2} -\\ &\qquad\qquad\qquad - \eta h^{-2} y_1\\ &y_1(0) = y_1'(1) = 0, \quad v_i(0) = v_i'(1) = 0, \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

Умножим второе уравнение (4.1) на $y_1(x)$ и результат проинтегрируем от 0 до 1. Интегрируя далее по частям и используя первое уравнение (4.1) и условие (3.8), получим выражение для первой вариации

$$\mu = 2\lambda_1 \int_0^1 h^{-3} y_1^2 \delta h\, dx \qquad \left(\int_0^1 \delta h\, dx = 0\right)$$

причем условие в скобках следует из ограничения (3.10). Вследствие произвольности вариации δh отсюда получим необходимое условие оптимальности

$$(4.2)\qquad y_1^2(x) h^{-3}(x) = \varkappa^2, \quad \varkappa = \mathrm{const}$$

Для определения неизвестных функций $y_1(x)$, $h(x)$ и значений λ_1, $\varkappa$ служат уравнения (3.5), (3.6), (4.2) и условия (3.8), (3.10). Аналитическое решение этих уравнений было впервые получено Клаузеном [17], см. также [18, 14]. Функция $h(x)$ в точке $x = 0$ обращается в нуль, причем в окрестности $x = 0$ имеем $h(x) \sim x^{2/3}$, поэтому условие (3.4) выполнено.

Перейдем к выводу выражения для второй вариации η собственного значения λ_1. Для этого сначала представим функцию $v_1(x)$ в виде разложения по собственным функциям $y_i(x)$, т. е. $v_1(x) = c_1 y_1(x) + \ldots$. Коэффициенты c_l $(l = 1, 2, \ldots)$ находятся из второго уравнения (4.1) путем умножения его на $y_i(x)$ $(i = 2, 3, \ldots)$, интегрирования от 0 до 1 и использования (3.8) и первого уравнения (4.1). В результате имеем

$$(4.3)\qquad v_1(x) = c_1 y_1(x) - 2\lambda_1 \sum_{l=2}^{\infty} (\lambda_l - \lambda_1)^{-1} g_{l1} y_l(x)$$

$$g_{ls} = \int_0^1 h^{-3} y_s y_l \delta h\, dx \quad (l, s = 1, 2, \ldots)$$

Коэффициент c_1 находится из условия нормировки и не влияет на последующие выкладки.

Из третьего уравнения (4.1) с использованием (4.3) и учетом условия $\mu = 0$ получим выражение для второй вариации

$$(4.4)\qquad \eta = -6\lambda_1 \int_0^1 h^{-4} y_1^2 (\delta h)^2\, dx - 4\lambda_1^2 \sum_{l=2}^{\infty} (\lambda_l - \lambda_1)^{-1} g_{l1}^2$$

Так как $\lambda_l > \lambda_1 > 0$ ($l = 2, 3, \ldots$), то второй член в (4.4) неположителен. Используя условие (4.2), получим оценку

$$\eta \leqslant -6\lambda_1\varkappa^2 \int_0^1 h^{-1}(\delta h)^2\,dx < 0 \tag{4.5}$$

Интеграл в (4.5) представляет собой квадрат нормы $\|\delta h\|_p^2$ в пространстве функций, интегрируемых с квадратом с весом $p = h^{-1}(x)$. Отрицательность второй вариации η означает, что функция $h(x)$, удовлетворяющая необходимым условиям экстремума, реализует локальный максимум λ_1 при условии (3.10), что и требовалось доказать.

Иное доказательство оптимальности λ_1, основанное на применении неравенства Гельдера, дано в [14]. Для трехслойных конструкций ($I(x) = \alpha h(x)$) доказательства оптимальности решений, удовлетворяющих необходимым условиям экстремума, приведены в [19].

5. Рассмотрим сформулированную в п. 3 задачу оптимизации с граничными условиями (3.7). Было показано [15, 16], что решение задачи оптимизации может характеризоваться лишь двукратным собственным значением $0 < \lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_3 \leqslant \leqslant \lambda_4 \ldots$ Докажем, что функция $h(x)$, удовлетворяющая необходимым условиям двукратного λ_1, реализует локальный максимум λ_1 при условии (3.10).

Доказательство. В п. 3 было показано, что задача (3.5), (3.7) при любых $h(x)$ имеет двукратное нулевое собственное значение $\lambda^1{}_0 = \lambda^2{}_0 = 0$ и соответствующие линейные собственные функции $y^1{}_0 = ax + b$, $y^2{}_0 = cx + d$. Предполагается, что все собственные функции ортонормированы

$$\int_0^1 y_0{}^s y_0{}^l h^{-2}\,dx = \delta_{sl}, \quad s, l = 1, 2; \quad \int_0^1 y_i y_j h^{-2}\,dx = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \ldots \tag{5.1}$$

Придадим функции $h(x)$, подозреваемой на экстремум, приращение $\varepsilon\delta h(x)$ и применим метод возмущений. Так же, как и в п. 2, первые вариации μ_1 и μ_2 двукратного λ_1 находятся из решения квадратного уравнения

$$\mu^2 - \mu(\beta_{11} + \beta_{22}) + \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}{}^2 = 0 \tag{5.2}$$

$$\beta_{ij} = 2\lambda_1 \int_0^1 h^{-3} y_i y_j \delta h\,dx, \quad i, j = 1, 2$$

Если $h(x)$ доставляет максимум двукратному λ_1, то необходимо $\mu_1\mu_2 = \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}{}^2 \leqslant 0$ для любых вариаций δh, удовлетворяющих (3.10). Отсюда следует линейная зависимость функций [12]

$$f_0 = 1, \quad f_1 = h^{-3}y_1{}^2, \quad f_2 = h^{-3}y_2{}^2, \quad f_3 = h^{-3}y_1y_2 \tag{5.3}$$

$$\xi_0 f_0 + \xi_1 f_1 + \xi_2 f_2 + \xi_3 f_3 = 0$$

с коэффициентами ξ_i, удовлетворяющими неравенству (2.7).

Из системы уравнений (3.5), (3.7), записанных для y_1, λ_1 и y_2, $\lambda_2 = \lambda_1$ и соотношений (5.3), (2.7) и (3.10), можно найти функции h, y_1, y_2 и постоянные ξ_i, $i = 0, 1, 2, 3$, реализующие экстремум поставленной задачи оптимизации. Аналитическое решение системы этих уравнений было получено в работах [15, 16], где показано, что функция $h(x) > 0$, $x \in [0, 1]$.

Если неравенство (2.7) выполняется строго, то форма $\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}{}^2$ равна нулю тогда и только тогда, когда вариации δh удовлетворяют условиям $\beta_{11} = \beta_{22} = \beta_{12} = 0$ и условию (3.10), т. е.

$$\int_0^1 f_i \delta h\,dx = 0; \quad i = 0, 1, 2, 3 \tag{5.5}$$

Обозначим через Δ класс вариаций δh, удовлетворяющих (5.5). Из (5.2) следует что $\mu_1 = \mu_2 = 0$, если $\delta h \in \Delta$. В противном случае ($\delta h \notin \Delta$) $\mu_1\mu_2 < 0$. Это означает, что такие вариации ($\delta h \notin \Delta$) доставляют максимум двукратному λ_1, так как при этом $\min(\mu_1, \mu_2) < 0$.

Итак, для доказательства оптимальности $h(x)$ следует рассмотреть вторые вариации двукратного λ_1 на классе $\delta h \in \Delta$ и убедиться в том, что по крайней мере одна из этих вариаций строго отрицательна.

Так же, как и в п. 2, вторые вариации η_1 и η_2 при $\delta h \in \Delta$ определяются из решения квадратного уравнения

$$\eta^2 - \eta(\gamma_{11} + \gamma_{22}) + \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2 = 0 \tag{5.6}$$

Минимальный корень уравнения (5.6) будет отрицательным, если $\eta_1 + \eta_2 < 0$. Сумма $\eta_1 + \eta_2$ на классе вариаций $\delta h \in \Delta$ представляется выражением

$$\eta_1 + \eta_2 = K_1 + K_2$$

$$K_1 = \lambda_1 \sum_{i=1}^{2} \left[-6 \int_0^1 y_i^2 h^{-4} (\delta h)^2 \, dx + 4 \sum_{j=1}^{2} \left(\int_0^1 y_0^j y_i h^{-3} \delta h \, dx \right)^2 \right] \tag{5.7}$$

$$K_2 = -4\lambda_1^2 \sum_{l=3}^{\infty} \sum_{i=1}^{2} (\lambda_l - \lambda_1)^{-1} g_{il}^2$$

Ввиду $\lambda_l > \lambda_1$ $(l = 3, 4, \ldots)$ $K_2 \leqslant 0$. Оценим K_1. Для этого введем вспомогательные функции $\psi_1(x) = y_1 h^{-1} \delta h$ и $\psi_2(x) = y_2 h^{-1} \delta h$. Вследствие непрерывности функций y_1, y_2, δh, $h \geqslant \delta > 0$ функции ψ_1, ψ_2 принадлежат пространству L_2^h функций, суммируемых с квадратом с весом h^{-2}

$$\| \psi_i \|^2 = \int_0^1 y_i^2 h^{-4} (\delta h)^2 \, dx < +\infty \tag{5.8}$$

Система собственных функций $y_i(x)$ задачи (3.5), (3.7) полна в L_2^h, поэтому разложим по ним $\psi_i(x)$

$$\psi_i(x) = d_0^{i,1} y_0^1(x) + d_0^{i,2} y_0^2(x) + \sum_{l=1}^{\infty} d_l^i y_l(x) \quad (i = 1, 2)$$

где

$$d_l^i = \int_0^1 \psi_i y_l h^{-2} \, dx = \int_0^1 y_i y_l h^{-3} \delta h \, dx \quad (l = 1, 2, \ldots) \tag{5.9}$$

$$d_0^{ij} = \int_0^1 y_0^j \psi_i h^{-2} \, dx = \int_0^1 y_i y_0^j h^{-3} \delta h \, dx \quad (i, j = 1, 2)$$

Заметим, что вследствие условия (5.5) коэффициенты d_l^1, d_l^2 $(l = 1, 2)$ равны нулю.

Ввиду ортонормальности системы $\{y_i(x)\}$ имеем

$$\| \psi_i \|^2 = (d_0^{i,1})^2 + (d_0^{i,2})^2 + \sum_{l=3}^{\infty} (d_l^i)^2 \quad (i = 1, 2) \tag{5.10}$$

Из (5.7)—(5.10) следует оценка

$$\eta_1 + \eta_2 \leqslant K_1 \leqslant -2\lambda_1 (\| \psi_1 \|^2 + \| \psi_2 \|^2) = -2\lambda_1 \int_0^1 (y_1^2 + y_2^2) h^{-4} (\delta h)^2 \, dx < 0 \tag{5.11}$$

Интеграл в последнем выражении представляет собой квадрат нормы $\| \delta h \|_p^2$ в пространстве функций, интегрируемых с квадратом с весом $p = (y_1^2 + y_2^2) h^{-4}$.

Итак, из (5.11) имеем $\eta_1 + \eta_2 < 0$, следовательно, $\min(\eta_1, \eta_2) < 0$ на классе $\delta h \in \Delta$, что и требовалось доказать.

Отметим, что данные доказательства можно аналогично провести и для других случаев зависимости между моментом инерции и площадью поперечного сечения, например $I(x) = \alpha h^3(x)$, а также для других (самосопряженных) граничных условий закрепления стержня.

Авторы благодарят В. Б. Лидского и В. М. Тихомирова за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Прагер В.* Основы теории оптимального проектирования конструкций. М.: Мир, 1977. 109 с.
2. *Баничук Н. В.* Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 255 с.
3. *Ольхофф Н.* Оптимальное проектирование конструкций. М.: Мир, 1981. 277 с.

4. *Троицкий В. А., Петухов Л. В.* Оптимизация формы упругих тел. М.: Наука, 1982. 432 с.
5. *Olhoff N., Rasmussen S. H.* On single and bimodal optimum buckling loads of clamped columns.— Internat. J. Solids and Structures, 1977, v. 13, No. 7, p. 605—614.
6. *Арман Ж.-Л., Лурье К. А., Черкаев А. В.* К решению задач оптимизации собственных значений, возникающих при проектировании упругих конструкций.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 5, с. 159—162.
7. *Медведев Н. Г.* Некоторые спектральные особенности оптимальных задач устойчивости оболочек переменной толщины.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1980, № 9, с. 59—63.
8. *Choi K. K., Haug E. J.* Optimization of structures with repeated eigenvalues.— In: Optimization of Distributed Parameter Structures. Alphen aan den Rijn: Sijthoff and Noordhoff, 1981, p. 219—277.
9. *Blachut J., Gajewski A.* On unimodal and bimodal optimal design of funicular arches.— Internat. J. Solids and Structures, 1981, v. 17, No. 7, p. 653—667.
10. *Ларичев А. Д.* Нахождение минимума объема балки на упругом основании при заданной величине критической нагрузки.— В кн.: Прикладные и теоретические исследования строительных конструкций. М.: Изд-е ЦНИИСК им. В. А. Кучеренко, 1981, с. 19—25.
11. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 1. М.— Л.: Гостехтеоретиздат, 1933. 525 с.
12. *Братусь А. С., Сейранян А. П.* Бимодальные решения в задачах оптимизации собственных значений.— ПММ, 1983, т. 47, вып. 4, с. 546—554.
13. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
14. *Tadjbakhsh I., Keller J. B.* Strongest columns and isoperimetric inequalities for eigenvalues.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1962, v. 29, No. 1, p. 159—164.
15. *Сейранян А. П.* Об одном решении задачи Лагранжа.— Докл. АН СССР, 1983, т. 271, № 2, с. 337—340.
16. *Сейранян А. П.* Об одной задаче Лагранжа.— Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 2, с. 101—111.
17. *Clausen T.* Ueber die form architektonischer Säulen.— Bull. physico-math. et Astronom. Acad. de St.-Petersbourg, 1849—1853, t. 1, p. 279—294.
18. *Николаи Е. Л.* Задача Лагранжа о наивыгоднейшем очертании колонны.— Изв. Петербург. политехн. ин-та, 1907, т. 8, вып. 1, с. 255—288.
19. *Prager W., Taylor J. E.* Problems of optimal structural design.— Trans. ASME. Ser. E, J. Appl. Mech., 1968, v. 35, No 1, p. 102—106.

Москва

Поступила в редакцию 15.IV.1983