

УДК 531.36

## ВЫНУЖДЕННЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Акуленко Л. Д.

При помощи методов Пуанкаре и последовательных приближений [1] исследуются вынужденные периодические движения квазилинейного осциллятора. Предполагается, что возмущающая функция содержит переменные с отклоняющимся аргументом. На основе первого метода Ляпунова [1] и результатов перенесения теории Флоке — Ляпунова на дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами [2, 3] получены достаточные условия асимптотической устойчивости по показательному закону построенных периодических движений. Рассмотрены конкретные примеры возмущений, в частности аналог уравнения Дуффинга. Результаты могут быть полезными при исследовании задач управления колебательными и вращательными системами при помощи малых управляющих воздействий с существенным запаздыванием времени. Запаздывание обуславливается обычно конечной скоростью передачи различных сигналов в системе управления, затратами времени на обработку данных измерений и инерцией исполнительных органов [4]. В системах, содержащих распределенные элементы, запаздывание вызывается конечной скоростью распространения волновых процессов, определяемых свойствами среды [5], и т. п. Методы малого параметра для исследования колебательных систем с запаздыванием времени развивались Н. Н. Красовским [6], С. Н. Шимановым [2, 7] и др. (см. библиографию в [3, 5]).

1. Постановка задачи. Рассматривается квазилинейная система

$$(1.1) \quad z'' + \omega^2 z = G(t) + \varepsilon g(t, z, z', z_\tau, z_\tau'), \quad |t| < \infty$$

Здесь  $z$  — скалярная переменная,  $z = z(t)$ ,  $z_\tau = z(t - \tau)$ ; точками обозначены производные по времени  $t$ ; параметры  $\omega$  — частота невозмущенных колебаний (случай  $\omega = 0$  рассматривается также),  $\tau$  — отклонение аргумента,  $|\tau| < \infty$ ;  $\varepsilon$  — малый параметр,  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ . Считается, что функции  $G$ ,  $g$  кусочно-гладкие по  $t$ ,  $T_\nu$ -периодичны ( $T_\nu = 2\pi/\nu$ ,  $\nu > 0$ ) и могут допускать на интервале  $t \in [t_0, t_0 + T_\nu]$  конечное число точек разрыва первого рода. Предполагается, что порождающая система (при  $\varepsilon = 0$ ) имеет  $T$ -периодическое решение  $z_0$ , которое можно представить тригонометрическим рядом

$$(1.2) \quad z_0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{G^{(k)}}{\omega^2 - k^2\nu^2} e^{ik\nu t}, \quad G(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} G^{(k)} e^{ik\nu t}$$

При построении частного решения (1.2) требуется, чтобы  $\omega \neq k\nu$  или  $G^{(k)} = 0$ , если  $\omega = k\nu$ . Подстановкой  $z = z_0 + x$  уравнение (1.1) приводится к виду

$$(1.3) \quad x'' + \omega^2 x = \varepsilon f(t, x, x', x_\tau, x_\tau'), \quad |t| < \infty$$

Функция  $f$  известна и  $T_\nu$ -периодична по  $t$ ; она просто строится на основе функции  $g$  и замены  $z = z_0 + x$ . Считается, что функция  $f$  кусочно-гладкая по  $t$  и достаточно гладкая по другим аргументам в некоторой области ее определения; свойства гладкости и другие специальные свойства системы (1.3) уточняются ниже.

Для системы с отклоняющимся аргументом (1.3) ставится задача построения возмущенного периодического решения для любого  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ , где  $\varepsilon_0$  достаточно мало, и исследования его устойчивости при  $t \rightarrow \pm\infty$ .

Периодическое решение уравнения (1.3) — колебательное или вращательное (при  $\omega = 0$ ) — может быть построено на основе конструктивных методов Пуанкаре или последовательных приближений [1, 8]. Следует отметить, что при построении  $T$ -периодических решений случаи запаздывания или опережения аргумента не различаются; начальная функция не задается, а определяется в процессе решения краевой задачи. Построенное на некотором интервале времени  $t \in [t_0, t_0 + T]$  решение системы (1.3) периодически гладким образом продолжается для всех  $t > t_0 + T$  или  $t < t_0$ . Устойчивость периодических движений исследуется для случая запаздывающего аргумента:  $t \in [t_0, \infty)$ ,  $\tau > 0$  или  $t \in (-\infty, t_0]$ ,  $\tau < 0$ ; движения для системы с опережающим аргументом неустойчивы.

При исследовании устойчивости обычно рассматриваются так называемые простые случаи, когда числа критических характеристических показателей и соответствующих им периодических решений совпадают ([1—3, 5—7] и др.). Эти случаи имеют место для системы (1.3) при  $\omega > 0$  в нерезонансном и резонансном случаях; случай  $\omega = 0$  относится к особому критическому.

Ниже рассматриваются следующие случаи вынужденных периодических движений системы (1.3): нерезонансные колебания ( $\omega \neq (n/m)\nu$ , где  $n, m$  — взаимно простые целые числа), резонансные колебания ( $\omega = (n/m)\nu$ ), особые колебания или вращения ( $\omega = 0$ ).

**2. Колебания в нерезонансном случае. Построение решения.**  $T_\nu$ -периодическое решение  $x = x(t, \varepsilon)$  строится в виде  $x = \varepsilon y$ , где неизвестная функция  $y$  определяется из уравнения ( $\varepsilon > 0$ )

$$(2.1) \quad y'' + \omega^2 y = f(t, \varepsilon y, \varepsilon y', \varepsilon y_\tau, \varepsilon y_\tau')$$

Если функция  $f$  аналитична по  $x, x', x_\tau, x_\tau'$  в малой окрестности точки  $x = x' = x_\tau = x_\tau' = 0$ , то искомое решение  $y = y(t, \varepsilon)$  строится разложениями по степеням малого параметра  $\varepsilon$

$$(2.2) \quad y = y_0 + \varepsilon y_1 + \dots, \quad y_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f_p^{(k)} e^{ik\nu t}}{\omega^2 - k^2\nu^2}, \quad p = 0, 1, \dots$$

Здесь  $f_p^{(k)}$  — коэффициенты Фурье функций  $f_p(t)$ , определяемых последовательно, например

$$(2.3) \quad \begin{aligned} f_0(t) &= f(t, 0, 0, 0, 0) \\ f_1(t) &= (f_x')_0 y_0 + (f_{x'})_0 y_0' + (f_{x_\tau})_0 y_{0\tau} + (f_{x_\tau}')_0 y_{0\tau}' \end{aligned}$$

Разложения (2.2), (2.3) не содержат особенностей, так как заведомо  $\omega \neq k\nu$ . При  $\varepsilon > 0$  достаточно малом они сходятся к единственному  $T_\nu$ -периодическому решению уравнения (2.1), что устанавливается методом мажорирующих рядов.

Если функция  $f$  не аналитична по  $x, x', x_\tau, x_\tau'$ , то решение строится методом последовательных приближений по рекуррентной схеме ( $p = 0, 1, \dots, y_{(0)} \equiv y_0$ )

$$(2.4) \quad \begin{aligned} y_{(p+1)}(t, \varepsilon) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f_{(p+1)}^{(k)} e^{ik\nu t}}{\omega^2 - k^2\nu^2}, \quad f_{(p+1)}(t) = f(t, \varepsilon y_{(p)}, \\ &\varepsilon y_{(p)}', \varepsilon y_{(p)\tau}, \varepsilon y_{(p)\tau}') \end{aligned}$$

Последовательные приближения (2.4) равномерно сходятся к единственному  $T_v$ -периодическому решению уравнения (2.1) при  $\varepsilon > 0$  достаточно малом, если функция  $f$  удовлетворяет условиям Липшица по  $x, x', x_\tau, x_\tau'$  с не зависящими от  $t$  постоянными в малой окрестности порождающего нулевого решения. Это устанавливается на основе принципа Шаудера и теоремы Банаха об операторе сжатия [9]. Строгие утверждения по обоснованию методов возмущений формулируются и доказываются аналогично [6, 7]. Оценки радиуса сходимости по  $\varepsilon, |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$  ряда (2.2) или последовательных приближений (2.4) получаются стандартным образом [4, 7].

*Исследование устойчивости.* Анализ устойчивости построенного периодического решения (соответствующие определения см. в [3, 5]) проводится на основе вычисления критических характеристических показателей линейного уравнения с периодическими коэффициентами в вариациях [2]

$$(2.5) \quad \xi'' + \omega^2 \xi = \varepsilon (f_x' \xi + f_x' \xi' + f_{x_\tau}' \xi_\tau + f_{x_\tau}' \xi_\tau')$$

Здесь  $\xi$  — вариация решения, производные от функции  $f$  берутся на построенном периодическом решении  $x = \varepsilon y(t, \varepsilon)$ . Как отмечалось, рассматриваемый случай относится к критическому: при  $\varepsilon = 0$  уравнение (2.5) допускает пару чисто мнимых корней  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ .

Известно [3], и это нетрудно на простых примерах уравнения (2.5) установить для  $|\varepsilon| > 0$ , что при  $t \rightarrow +\infty$  для  $\tau < 0$  или при  $t \rightarrow -\infty$  для  $\tau > 0$  (случай опережающего аргумента) движение будет сильно неустойчивым. Случай запаздывающего аргумента:  $\tau > 0, t \rightarrow +\infty$  или  $\tau < 0, t \rightarrow -\infty$  требуют дополнительного исследования, связанного с вычислениями указанных двух критических характеристических показателей  $\lambda_{1,2}$  с учетом  $\varepsilon$ . В работе для обоснования применяемого подхода используются результаты, аналогичные результатам теории Флоке [2, 3]: для линейных однородных  $T_v$ -периодических дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом (для определенности далее считается  $t \geq 0, \tau \geq 0$ ) каждое решение с любой степенью точности по шкале экспонент аппроксимируется линейной комбинацией решений вида  $t^k e^{\lambda_r t} u(t)$ ,  $k = 0, 1, \dots, k_r$ , где  $u(t + T_v) \equiv u(t)$ , постоянные  $\lambda_r$  имеют смысл характеристических показателей.

Согласно этому положению, решение уравнения в вариациях (2.5) строится разложениями

$$(2.6) \quad \xi = e^{\lambda t} u, \quad u(t + T_v) \equiv u(t), \quad \xi_\tau = e^{\lambda(t-\tau)} u_\tau \\ \lambda = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \dots, \quad u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 \dots$$

Подстановка (2.6) в (2.5) и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях  $\varepsilon$  приводит к искомым выражениям для  $\lambda_0, u_0, \lambda_1, u_1, \dots$ . В частности,  $\lambda_0 = \pm i\omega, u_0 = c_1^0 + c_2^0 e^{-2\lambda_0 t}$ . Из условия  $T_v$ -периодичности  $u_0$  следует, что  $c_2^0 = 0$ . Далее, из условия  $T_v$ -периодичности  $u_1$  находится величина  $\lambda_1$

$$(2.7) \quad \lambda_1 = \frac{1}{2T_v} \int_0^{T_v} \left[ \frac{1}{\lambda_0} (f_x')_0 + (f_x')_0 + \frac{1}{\lambda_0} (f_{x_\tau}')_0 e^{-\lambda_0 \tau} + (f_{x_\tau}')_0 e^{-\lambda_0 \tau} \right] dt$$

Для действительной  $\rho_1$  и мнимой  $\mu_1$  соответственно частей показателя  $\lambda_1$  (2.7) находятся простые явные выражения, которые могут быть вычислены на основе функции  $x_0$  ( $x_0 \equiv 0$ )

$$(2.8) \quad \rho_1 = \frac{1}{2T_v} \int_0^{T_v} \left[ (f_x')_0 - \frac{1}{\omega} (f_{x_\tau}')_0 \sin \omega \tau + (f_{x_\tau}')_0 \cos \omega \tau \right] dt$$

$$\mu_1 = \frac{\mp 1}{2T_v} \int_0^{T_v} \left[ \frac{1}{\omega} (f'_{x'})_0 + \frac{1}{\omega} (f'_{x_\tau})_0 \cos \omega \tau + (f'_{x_\tau})_0 \sin \omega \tau \right] dt$$

Таким образом, справедливо

**Утверждение 1.**  $T_v$ -периодическое решение  $x(t, \varepsilon)$  системы с запаздывающим аргументом (1.3) асимптотически устойчиво при  $\varepsilon > 0$  достаточно малом, если  $\rho_1 < 0$ , и неустойчиво при  $\rho_1 > 0$ .

Случай  $\rho_1 = 0$  требует дополнительного исследования с учетом более высоких степеней  $\varepsilon$ , которое может быть проведено разложениями в ряды или последовательными приближениями по  $\varepsilon$  показателя  $\lambda$  [2]. Следует отметить, что в случае  $\tau = 0$  (система без запаздывания) или когда средние от  $(f'_{x'})_0, (f'_{x_\tau})_0$  равны нулю, выражения (2.8) совпадают с соответствующими для систем без запаздывания [1]. Из (2.8) следует, что к асимптотически устойчивым колебаниям приводит случай «позиционных» возмущений:  $f = \varphi(t) + kx_\tau$ , если  $k \sin \omega \tau > 0$ , например  $k > 0, 0 < \tau < \pi/\omega$ . И наоборот, даже при наличии линейной диссипации ( $(f'_{x'})_0 = b < 0$ ) устойчивость движения согласно (2.8) может нарушаться членами, обусловленными запаздыванием.

**3. Исследование резонансных колебаний. Построение решения.** Рассматривается система (1.3) в резонансном случае:  $\omega = (n/m)v$ , где  $n, m$  — взаимно простые целые числа.  $T$ -периодическое решение (период  $T = mT_v$ ) строится разложением в ряд по степеням параметра  $\varepsilon$  или последовательными приближениями в виде (см. [2, 3, 5—7])

$$(3.1) \quad x(t, \varepsilon) = x_0 + \varepsilon y(t, \varepsilon), \quad x_0 = a \sin \omega t + b \cos \omega t$$

Здесь  $a, b$  — постоянные, подлежащие определению,  $y$  — неизвестная  $T$ -периодическая функция, удовлетворяющая уравнению

$$(3.2) \quad y'' + \omega^2 y = f(t, x_0, x_0', x_{0\tau}, x_{0\tau}') + \\ + \varepsilon [(f'_{x'})_0 y + (f'_{x'})_0 y' + (f'_{x_\tau})_0 y_\tau + (f'_{x_\tau})_0 y_\tau'] + \\ + \varepsilon^2 R(t, y, y', y_\tau, y_\tau', \varepsilon)$$

Считается, что функция  $R$  удовлетворяет условиям Липшица по  $y, y', y_\tau, y_\tau'$  с не зависящими от  $t$  постоянными в малой окрестности порождающего решения. Отбрасывание членов  $O(\varepsilon)$  в (3.2) приводит к выражениям

$$(3.3) \quad y_0 = \frac{1}{\omega} \int_0^t f_0(s, a, b) \sin \omega(t-s) ds + \alpha_0 \sin \omega t + \beta_0 \cos \omega t \\ y_0' = dy_0/dt$$

Здесь  $f_0$  — известная функция параметров  $a, b$ ,  $T$ -периодическая по  $t$ . Искомая функция  $y_0$  будет  $T$ -периодической, если

$$(3.4) \quad P(a, b) \equiv y_0(T) - y_0(0) = 0, \quad Q(a, b) \equiv y_0'(T) - y_0'(0) = 0$$

Соотношения (3.4) рассматриваются как уравнения относительно неизвестных  $a, b$ . Предполагается, что система (3.4) допускает вещественный корень  $a^*, b^*$ . Тогда функция  $x_0$  (3.1) полностью определена, а  $y_0$  в (3.3) — с точностью до параметров  $\alpha_0, \beta_0$ . Эти параметры определяются из условий периодичности следующего приближения  $y_1$ , которые приводятся к виду системы

$$(3.5) \quad P_{a^*} \alpha_0 + P_{b^*} \beta_0 = -y_1^\circ(T), \quad Q_{a^*} \alpha_0 + Q_{b^*} \beta_0 = -y_1^\circ(T) \\ y_1^\circ(t) \equiv \frac{1}{\omega} \int_0^t [(f'_{x'})_0 y_0^\circ + (f'_{x'})_0 y_0^{\circ\prime} + (f'_{x_\tau})_0 y_{0\tau}^\circ + (f'_{x_\tau})_0 y_{0\tau}^{\circ\prime}] \times \\ \times \sin \omega(t-s) ds$$

Здесь  $y_0^\circ(t)$  — функция  $y_0$  в (3.3) при  $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ . Если  $a^*, b^*$  — простой корень системы (3.4) т. е.

$$(3.6) \quad \Delta(\tau) = \left| \frac{\partial(P, Q)}{\partial(a, b)} \right|_{a^*, b^*} \neq 0$$

что и предполагается, то линейная система (3.5) однозначно разрешима относительно  $\alpha_0, \beta_0$ . Тем самым полностью определяется функция  $y_0(t)$ . Последующие приближения  $y_{(l)}$  определяются по рекуррентной схеме ( $l = 1, 2, \dots$ )

$$(3.7) \quad y_{(l+1)} = y_0^\circ(t) + \alpha_{l+1} \sin \omega t + \beta_{l+1} \cos \omega t + \varepsilon y_{(l)}^*(t, \alpha_l, \beta_l, \varepsilon)$$

$$y_{(l)}^* \equiv \frac{1}{\omega} \int_0^t [(f_x')_0 y_{(l)} + (f_{x'})_0 \dot{y}_{(l)} + (f_{x_\tau}')_0 y_{\tau(l)} + (f_{x_\tau}')_0 \dot{y}_{\tau(l)} +$$

$$+ \varepsilon R(s, y_{(l)}, \dot{y}_{(l)}, y_{\tau(l)}, \dot{y}_{\tau(l)}, \varepsilon)] \sin \omega(t-s) ds$$

причем для  $l = 1$  полагается  $R \equiv 0$ . Параметры  $\alpha_l, \beta_l$  как функции  $\varepsilon$  и других заданных параметров системы находятся на каждом шаге решением квазилинейной системы уравнений

$$(3.8) \quad P_{a^*}' \alpha_l + P_{b^*}' \beta_l = -y_1^\circ(T) + \varepsilon p_l(T, \alpha_l, \beta_l, \varepsilon)$$

$$Q_{a^*}' \alpha_l + Q_{b^*}' \beta_l = -y_1^{\circ\circ}(T) + \varepsilon p_l^\circ(T, \alpha_l, \beta_l, \varepsilon)$$

$$p_l(t, \alpha_l, \beta_l, \varepsilon) \equiv -\frac{1}{\omega} \int_0^t [(f_x')_0 y_{(l-1)}^* + (f_{x'})_0 \dot{y}_{(l-1)}^* +$$

$$+ (f_{x_\tau}')_0 y_{\tau(l-1)}^* + (f_{x_\tau}')_0 \dot{y}_{\tau(l-1)}^* +$$

$$+ R(s, y_{(l)}, \dot{y}_{(l)}, y_{\tau(l)}, \dot{y}_{\tau(l)}, \varepsilon)] \sin \omega(t-s) ds$$

Функции  $p_l, p_l^\circ$  удовлетворяют условиям Липшица по  $\alpha_l, \beta_l$  в малой окрестности  $\alpha_0, \beta_0$ . Поэтому система (3.8) допускает единственный корень  $\alpha_l(\varepsilon), \beta_l(\varepsilon)$ , обращающийся в  $\alpha_0, \beta_0$  при  $\varepsilon = 0$ . В итоге построена рекуррентная схема последовательных приближений (3.7), (3.8). На основе общих теорем [9] и исследований [6, 7, а также 3, 5], можно установить, что пределом при  $l \rightarrow \infty$  является единственное  $T$ -периодическое решение системы (3.2)  $y(t, \varepsilon)$ , а согласно замене (3.1) функция  $x(t, \varepsilon)$  есть искомое  $(n/m)$ -резонансное решение системы (1.3). При этом имеет место степенная сходимость приближений  $x_{(l)} = x_0 + \varepsilon y_{(l)}$  к искомому  $T$ -периодическому решению  $x^*(t, \varepsilon)$ . В случае аналитической функции  $f$  решение строится разложениями, аналогичными (2.2).

*Условия устойчивости.* Исследование асимптотической устойчивости проводится на основе уравнения в вариациях аналогично п. 2 [2]. Нетривиальное решение и критические характеристические показатели ищутся в виде

$$\lambda = \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \dots, \quad u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 \dots, \quad u(t+T) \equiv u(t)$$

Для  $u_0$  получается выражение  $u_0 = A \sin \omega t + B \cos \omega t$ .  $T$ -периодическая функция  $u_1$  определяется из уравнения

$$u_1'' + \omega^2 u_1 = -2\lambda_1 u_0' + (f_x')_0 u_0 + (f_{x_\tau}')_0 u_{\tau 0} + (f_{x'})_0 \dot{u}_0 +$$

$$+ (f_{x_\tau}')_0 \dot{u}_{\tau 0}$$

Условия периодичности  $u_1$  приводят к соотношениям

$$(3.9) \quad \omega P_{a^*}' A + (\omega P_{b^*}' - \Lambda) B = 0$$

$$(Q_{a^*}' - \Lambda) A + Q_{b^*}' B = 0, \quad \Lambda \equiv \lambda_1 T \omega$$

Из (3.9) следует, что определитель системы должен обращаться в нуль для искомых значений  $\lambda_1$ , т. е.

$$(3.10) \quad \Lambda^2 - \Lambda \delta(\tau) - \omega \Delta(\tau) = 0, \quad \delta = Q_{a^*}' + \omega P_{b^*}'$$

Анализ корней уравнения (3.10) дает следующие необходимые и достаточные условия отрицательности вещественных частей обеих корней  $\Lambda_{1,2}$

$$(3.11) \quad \Delta(\tau) < 0, \quad \delta(\tau) < 0$$

Определитель  $\Delta(\tau)$  вычисляется согласно (3.6) и отличен от нуля; величина  $\delta(\tau)$  аналогична  $\rho_1$  в (2.8) и равна

$$(3.12) \quad \delta(\tau) = \int_0^T [\omega (f_{x'}')_0 - (f_{x'}')_0 \sin \omega \tau + \omega (f_{x_\tau}')_0 \cos \omega \tau] dt$$

*Утверждение 2.* Условия (3.11) достаточны для асимптотической устойчивости построенного  $(n/m)$ -резонансного решения системы (1.3) при  $\varepsilon > 0$  достаточно малом. Если имеет место хотя бы одно обратное неравенство, то решение неустойчиво.

Критический случай  $\Delta(\tau) = 0$  исключается условием (3.6); при  $\Delta = 0$  аналогично случаю резонансных колебаний в системе без запаздывания [1] требуются дополнительные исследования условий существования  $T$ -периодических решений, связанных, как правило, с разложениями по дробным степеням параметра  $\varepsilon$ . Если же определяемая согласно (3.12) величина  $\delta(\tau) = 0$ , то устойчивость устанавливается учетом более высоких степеней  $\varepsilon$  при вычислении критических характеристических показателей [1, 2].

**4. Особый случай ( $\omega = 0$ ).** При  $\omega = 0$  система (1.3) может иметь решения, которые описывают как колебательные, так и вращательные движения. В случае вращений дополнительно требуется, чтобы функция  $f$  была  $2\pi$ -периодической по  $x, x_\tau$  [8]. Такие движения могут иметь место в периодических силовых полях под действием высокочастотных возмущений [1, 10].

Действительно, пусть рассматривается колебательная или вращательная система с одной степенью свободы общего вида [8, 10]

$$q'' = Q(\Omega s, q, q', q_\sigma, q_\sigma')$$

Здесь  $q = q(s)$  — обобщенная координата, штрих означает производную по аргументу  $s$ ,  $q_\sigma = q(s - \sigma)$ ,  $\sigma$  — запаздывание аргумента. Предполагается, что справедливо соотношение

$$\Omega^{-2} Q(t, x, \Omega x', x_\tau, \Omega x_\tau') = \varepsilon f(t, x, x', x_\tau, x_\tau')$$

в котором  $\varepsilon$  — малый параметр,  $t = \Omega s$  — новый аргумент,  $x(t) = q(s)$  — обобщенная координата,  $\tau = \Omega \sigma$  — запаздывание аргумента  $t$ . Тогда в новых переменных  $t, x$  рассматриваемая система принимает вид (1.3), где  $\omega = 0$ .

*Квазистационарные колебания.* Решение строится в виде (3.1), где  $\omega = 0$ , т. е.  $x_0 = b = \text{const}$ ;  $T_v$ -периодическая функция  $y$  определяется уравнением (3.2). Достаточные условия существования и единственности периодического решения при  $\varepsilon > 0$  достаточно малом приводят к требованию разрешимости уравнения относительно неизвестной  $b$  и простоты корня  $b^*$ , т. е.

$$(4.1) \quad Q(0, b) \equiv Q_0(b) = 0, \quad Q_0'(b^*) \neq 0$$

Последовательные приближения строятся аналогично построениям из п. 3 (при  $\omega = 0$ ). В частности

$$(4.2) \quad y_0 = \beta_0 + \alpha_0^* t + \int_0^t (t-s) f_0^* ds, \quad \alpha_0^* = -\frac{1}{T_v} \int_0^{T_v} (T_v - s) f_0^* ds$$

Постоянная  $\beta_0$  определяется из условия периодичности  $y_1$ , которое имеет вид второго уравнения (3.5) при  $\omega \rightarrow 0$ . Обоснование метода последовательных приближений проводится аналогично [8]. Таким образом, искомое  $T_v$ -периодическое движение  $x(t, \varepsilon)$  близко стационарной точке:  $x = b^* + \varepsilon y$ .

*Вращательные движения.* Возмущенное решение, отвечающее комбинационному резонансу  $n/m$ , строится в виде [8, 10]

$$(4.3) \quad x = (n/m) vt + b + \varepsilon y, \quad y(t+T) \equiv y(t), \quad T = mT_v$$

Условия существования и единственности  $T$ -периодического решения уравнения (3.2), где  $\omega = 0$ , имеют вид (4.1). Дальнейшие построения сходны с приведенными в п. 3. Вопросы обоснования исследуются на основе [1, 7—9]. Случаи, когда  $Q_0'(b^*) = 0$  или  $Q_0 \equiv 0$ , требуют дополнительных исследований, аналогичных проводимым для систем без отклонения аргумента [1, 8, 10].

*Исследование устойчивости.* Как отмечалось в п. 1, рассматриваемый критический случай относится к особому: при  $\varepsilon = 0$  двукратному нулевому характеристическому показателю отвечает одна группа периодических решений [1]. На основе рассуждений, аналогичных приводимым для обыкновенных систем, и результатов [2] можно установить, что эти показатели имеют порядок  $\sqrt{\varepsilon}$ . Разложениями характеристических показателей и решения уравнения в вариациях (2.5) вида

$$(4.4) \quad \lambda = \sqrt{\varepsilon} \lambda_1 + \varepsilon \lambda_2 + O(\varepsilon^{3/2}), \quad u = u_0 + \sqrt{\varepsilon} u_1 + \varepsilon u_2 + \varepsilon^{3/2} u_3 + O(\varepsilon^2)$$

из условий  $T$ -периодичности функций  $u_0, u_1, u_2, u_3$  получаются выражения для искомых коэффициентов  $\lambda_1, \lambda_2$

$$(4.5) \quad \lambda_1^2 = T^{-1} Q_0'(b^*) \\ \lambda_2 = \frac{1}{2T} \int_0^T [(f_{x'})_0 - (f_{x_\tau})_0 \tau + (f_{x_\tau}')_0] dt$$

*Утверждение 3.* Из соотношений (4.4), (4.5) следует, что периодическое (квазистационарное или вращательное) движение системы с запаздыванием (1.3) при  $\omega = 0$  асимптотически устойчиво по показательному закону для достаточно малых  $\varepsilon > 0$ , если  $Q_0'(b^*) < 0$  (необходимое условие),  $\lambda_2 < 0$ , и неустойчиво в противном случае.

Равенство  $Q_0'(b^*) = 0$  исключается условием (4.1). Если  $\lambda_2 = 0$ , то требуется дополнительное исследование, связанное с более точным определением величины  $\lambda$  из условий периодичности коэффициентов  $u_4, u_5, \dots$  что приводит к усилению требований гладкости функции  $f$ .

5. *Примеры.* Рассматриваются конкретные выражения возмущающей функции  $f$  в (1.3). Исследуются условия существования, единственности и устойчивости периодических движений в резонансном случае.

*Линейная система.* Пусть

$$(5.1) \quad f = \varphi + gx + hx' + \chi x_\tau + \kappa x_\tau'$$

где  $\varphi, g, h, \chi, \kappa$  —  $T_\nu$ -периодические функции  $t$ . Тогда условие существования и единственности  $T$ -периодического решения заключается в невырожденности матрицы определяющих линейных уравнений относительно неизвестных параметров  $a, b$  ( $\theta = \omega\tau$ ), см. (3.1), (3.4)

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \varphi_s &= [-g_{ss} - \omega h_{sc} - \chi_{ss} \cos \theta + \chi_{sc} \sin \theta - \omega (\kappa_{sc} \cos \theta + \\ &+ \kappa_{ss} \sin \theta)] a + [-g_{sc} + \omega h_{ss} - \chi_{sc} \cos \theta - \chi_{ss} \sin \theta + \omega (\kappa_{ss} \cos \theta - \\ &- \kappa_{sc} \sin \theta)] b \\ -\varphi_c &= [g_{cs} + \omega h_{cc} + \chi_{cs} \cos \theta - \chi_{cc} \sin \theta + \omega (\chi_{cc} \cos \theta - \\ &- \kappa_{cs} \sin \theta)] a + [g_{cc} - \omega h_{cs} + \chi_{cc} \cos \theta + \chi_{cs} \sin \theta - \\ &- \omega (\kappa_{cs} \cos \theta - \kappa_{cc} \sin \theta)] b \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты типа  $\varphi_s, \varphi_c, g_{ss}, g_{sc}, g_{cc}$  и др. получаются интегрированием на интервале  $t \in [0, T]$  функций из (5.1)  $\varphi(t), g(t)$  и др., умноженных на  $\sin^k \omega t \cos^l \omega t$ ; степени  $k, l = 0, 1, 2$  и определяются нижними индексами.

Если определитель матрицы для линейной системы (5.2)  $\omega \Delta(\tau) < 0$ , то  $T$ -периодическое решение асимптотически устойчиво при условии  $\delta(\tau) < 0$ , т. е.

$$(5.3) \quad T^{-1}\delta(\tau) = \omega h_0 - \chi_0 \sin \theta + \omega \kappa_0 \cos \theta < 0$$

Здесь  $h_0, \chi_0, \kappa_0$  — средние значения функций  $h, \chi, \kappa$ . В частности, если в (5.1)  $g = h = \kappa \equiv 0$ , то достаточные условия существования, единственности и асимптотической устойчивости  $n$ -резонансного решения имеют вид

$$(5.4) \quad \Delta(\tau) = \chi_{sc}^2 - \chi_{ss}\chi_{cc} < 0, \quad T^{-1}\delta(\tau) = -\chi_0 \sin \theta < 0$$

В другом частном случае, когда  $g = h \equiv 0$ , а  $\chi, \kappa = \text{const}$ , эти условия записываются следующим образом:

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \omega \Delta(\tau) &= -(\chi \cos \theta + \omega \kappa \sin \theta)^2 - (\chi \sin \theta - \omega \kappa \cos \theta)^2 < 0 \\ T^{-1}\delta(\tau) &= -\chi \sin \theta + \omega \kappa \cos \theta < 0 \end{aligned}$$

Следует отметить, что при  $\chi^2 + \kappa^2 > 0$  в выражении (5.5) для  $\Delta$  при всех значениях  $\tau$  выполняется строгое неравенство. В соотношениях (5.3)–(5.5) выражения для  $\Delta, \delta$  представлены как функции параметра  $\tau$  для сравнения с соответствующими системами без запаздывания аргумента.

*Уравнение типа Дуффинга.* Пусть

$$(5.6) \quad f = f_0 \sin \nu t + dx^3 + kx_\tau \quad (f_0, \nu, d, k = \text{const})$$

Для системы (1.3), (5.6) исследуются условия существования, единственности и устойчивости основного резонансного решения  $\omega = \nu$ . Уравнения типа (3.4), определяющие постоянные  $a, b$ , содержат пять параметров и имеют вид кубических уравнений ( $r^2 = a^2 + b^2$ ):

$$(5.7) \quad \begin{aligned} f_0 + \frac{3}{4}dar^2 + k(a \cos \omega\tau + b \sin \omega\tau) &= 0 \\ \frac{3}{4}dbr^2 + k(-a \sin \omega\tau + b \cos \omega\tau) &= 0 \end{aligned}$$

При  $\tau = 0$  система (5.7) совпадает с хорошо изученной определяющей системой для уравнения Дуффинга [1]. Простыми преобразованиями система (5.7) приводится к кубическому уравнению относительно  $r^2$ , которое содержит только два безразмерных параметра и представимо в следующем удобном для графического исследования виде:

$$(5.8) \quad \begin{aligned} A &= [(\gamma A + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta]^{-1} \equiv \Phi(A, \gamma, \theta) \\ A &= k^2 f_0^{-2} r^2 \geq 0, \quad \gamma = \frac{3}{4} dk^{-3} f_0^2, \quad \theta = \omega\tau \end{aligned}$$

Анализ множества точек пересечения луча  $A \geq 0$  и двухпараметрического семейства кривых  $\Phi$  показывает, что для  $|\gamma|_1 < \infty$  и  $\theta \in [0, \pi] \pmod{\pi}$  имеется один или три корня:  $A_1 \leq A_2 < A_3$ , причем для некоторых значений  $\gamma, \theta$  корни  $A_1$  и  $A_2$  могут совпадать. Например, это справедливо для  $\cos \theta = \pm 1, \gamma = \mp \frac{4}{27}$ ; тогда  $A_1 = A_2 = \frac{9}{4}$ . При  $\cos \theta = 1, 0 > \gamma > -\frac{4}{27}$  или  $\cos \theta = -1, 0 < \gamma < \frac{4}{27}$  уравнение (5.8) допускает три различных корня:  $A_1 < A_2 < A_3$ . В общем случае свойство совпадения корней  $A_1 = A_2$  определяется соотношением (5.8) и условием  $\Phi'_A = 1$ , которые приводят к квадратному уравнению относительно  $z = \gamma A + \cos \theta$ . Дискриминант этого уравнения равен  $D = 4(1 - 4 \sin^2 \theta)$ ; поэтому кратные корни могут иметь место для значений  $\theta$ , удовлетворяющих неравенству  $\sin^2 \theta \leq \frac{1}{4}$ . Соответствующие значения  $\gamma$  и  $A_{1,2} = A$  таковы:

$$(5.9) \quad \begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{27} \left[ \left( \cos \theta \pm \frac{1}{2} D^{1/2} \right)^2 + 9 \sin^2 \theta \right] \left( -2 \cos \theta \pm \frac{1}{2} D^{1/2} \right)^{-1} \\ A &= 9 \left( -2 \cos \theta \pm \frac{1}{2} D^{1/2} \right)^2 \left[ \left( \cos \theta \pm \frac{1}{2} D^{1/2} \right)^2 + 9 \sin^2 \theta \right]^{-1} \end{aligned}$$

Для построения семейства корней  $A_j(\gamma, \theta)$  удобно разрешить квадратное уравнение (5.8) относительно  $\gamma$ ,  $|\gamma| < \infty$ :

$$(5.10) \quad \gamma = -w \cos \theta \pm w(w - \sin^2 \theta)^{1/2}, \quad w = A^{-1} > 0$$

Из выражения (5.10) следует, что для любого  $\theta$  решение  $w$  существует, причем  $w \geq \sin^2 \theta$ . Граница  $\Gamma$  множества допустимых значений  $w$  для заданных  $\theta$  определяется на плоскости параметров  $(\gamma, w)$  равенством  $w = \sin^2 \theta$  и (5.10); в результате

$$(5.11) \quad \Gamma = \mp w(1 - w)^{1/2}, \quad 0 < w \leq 1$$

Семейство кривых  $\gamma(w, \theta_i)$ ,  $0 \leq \theta_i \leq \pi/2$  для значений  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_2 = \arccos 0,95$ ,  $\theta_3 = \pi/6$ ,  $\theta_4 = \arccos 2/3$ ,  $\theta_5 = \arccos 0,4$ ,  $\theta_6 = \pi/2$  и кривая  $\Gamma(w)$  приведены в соответствии с (5.10), (5.11) на фигуре. Кривые для  $\theta \in [\pi/2, \pi]$  получаются из построенных] отражением относительно оси абсцисс; этим искомого семейство кривых полностью построено. Следует отметить, что поведение кривых  $\gamma(w, \theta)$  при больших  $w$ ,  $w \gg 1$  (малых  $A$ ,  $0 < A \ll 1$ ) согласно (5.10) определяется приближенной формулой  $\gamma \approx -w \cos \theta \pm w^{3/2}$ . Важное качественное свойство семейства кривых  $\gamma(w, \theta)$  заключается в том, что в точках  $\gamma \in \Gamma$  касательные вертикальны, т. е. производные  $\partial\gamma/\partial w$  неограничены. Указанная выше кратность корней  $A_j$  связана с поведением кривых  $\gamma(w, \theta)$  при  $\sin^2 \theta \leq 1/4$ . Предельное кратное значение  $w$ , отвечающее  $\sin^2 \theta = 1/4$ , равно  $w = 1/3$  (на фигуре кривая 3).

Зависимости  $\gamma_j^*(w, \theta)$  дают решение задачи существования и единственности основного резонансного движения системы (1.3), (5.6) и позволяют без дальнейших вычислений построить его с погрешностью  $O(\varepsilon)$  для  $t \in [0, \infty)$ , если  $w^*$  — простой корень. При известном значении  $w^*$  величина  $r^2 = f_0^2 (w^* k^2)^{-1}$ , а искомые параметры  $a, b$  находятся однозначно из линейной системы (5.7).

Нетрудно установить, что условия  $P = Q = 0$ ,  $\Delta(\tau) = 0$  и кратности корней  $w^*$ , т. е.  $\Phi = A$ ,  $\Phi_A' = 1$  ( $A = w^{-1}$ ), эквивалентны и выполняются лишь при  $\sin^2 \theta \leq 1/4$ .

Определение устойчивости заключается в проверке условий

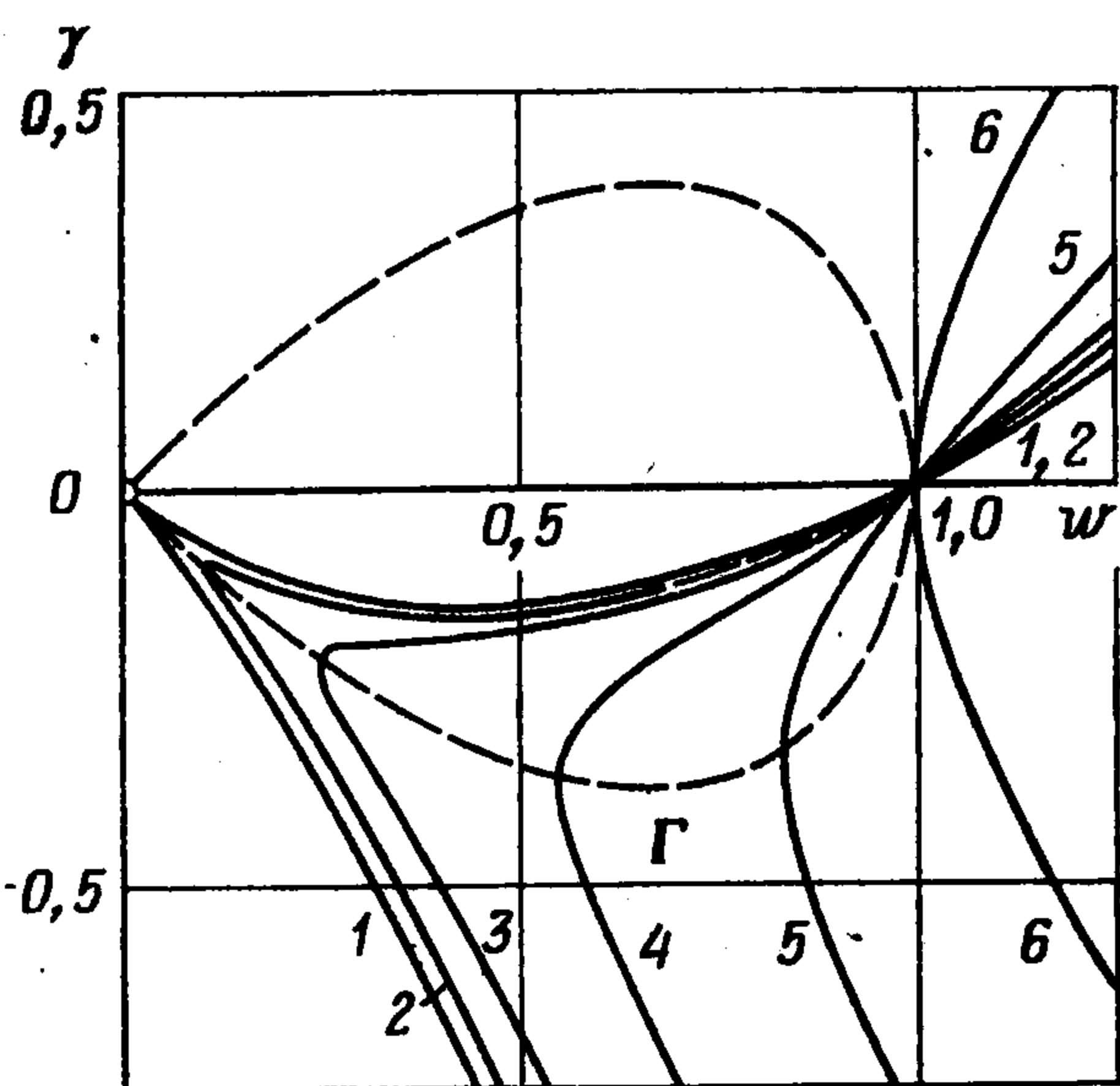
$$(5.12) \quad w_j^{*2}(\gamma, \theta) + 4\gamma w_j^*(\gamma, \theta) \cos \theta + 3\gamma^2 > 0, \quad k \sin \theta > 0$$

В отличие от движений классического осциллятора Дуффинга ( $\theta = 0$ ) [1] в системе (1.3), (5.6) при выполнении также и второго неравенства (5.12) осуществляются асимптотически устойчивые резонансные колебания. Следует отметить, что для корней  $w_j^*(\gamma, \theta)$  обеих ветвей кривых  $\gamma(w, \theta)$  (5.10) проверка выполнения первого условия (5.12) сводится к проверке следующих неравенств:

$$3w_j^* \mp 2(w_j^* - \sin^2 \theta)^{1/2} \cos \theta - 2 \sin^2 \theta > 0$$

Отсюда и из семейства кривых, представленных на фигуре, следует, что асимптотически устойчивыми при малых  $\theta$  будут движения, отвечающие корням  $A_1$  и  $A_3$  для  $\gamma < 0$  или  $A$  для  $\gamma > 0$ , если  $k > 0$ . Аналогично исследуется устойчивость основных резонансных колебаний для значений  $\theta \in [\pi/2, \pi]$ ; случай  $\theta \in [\pi, 2\pi]$  совпадает с рассмотренным.]

Автор благодарит С. А. Михайлова за помощь в проведении расчетов.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 492 с.
2. Шиманов С. Н. Об устойчивости квазигармонических систем с запаздыванием.— ПММ, 1961, т. 25, вып. 6, с. 992—1002.
3. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.
4. Красовский Н. Н. Об оптимальном регулировании в линейных системах с запаздыванием времени.— Сиб. матем. ж., 1963, т. 4, № 2, с. 295—302.
5. Рубаник В. П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М.: Наука, 1969. 288 с.
6. Красовский Н. Н. О периодических решениях дифференциальных уравнений с запаздыванием времени.— Докл АН СССР, 1957, т. 114, № 2, с. 252—255.
7. Шиманов С. Н. К теории колебаний квазилинейных систем с запаздыванием.— ПММ, 1959, т. 23, вып. 5, с. 836—844.
8. Акуленко Л. Д. Установившиеся периодические и вращательные движения в возмущенных существенно нелинейных системах с одной степенью свободы, близких к консервативным, в случае произвольного постоянного отклонения аргумента.— ПММ, 1968, т. 32, вып. 1, с. 124—130.
9. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Мир, 1969. 448 с.
10. Акуленко Л. Д. О некоторых вращательно-колебательных системах, подверженных высокочастотным возмущениям.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1968, т. 8, № 5, с. 1133—1139.

Москва

Поступила в редакцию  
7.VII.1983