Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 4, 1984

УДК 531.36

НЕКОТОРЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМАХ

Зевин А. А.

Для неавтономных гамильтоновых систем методом продолжения по параметру [1] найдены достаточные условия существования и единственности периодических решений (для векторных уравнений второго порядка аналогичные результаты установлены другими методами в [2, 3]). С помощью теоремы о направленной широте областей устойчивости [4] получены критерии устойчивости в первом приближении указанных решений. Исследовано влияние малых диссипативных сил на устойчивость.

Рассмотрены системы, в которых некоторые из обобщенных координат являются угловыми. Получены условия существования, единственности и устойчивости, а также верхние оценки решений, отвечающих периодическим вращательным движениям угловых координат с любыми наперед заданными средними скоростями, кратными частоте возмущающего воздействия.

В качестве примера рассмотрены периодические колебательные и вращательные движения двух связанных маятников.

1. Рассматривается система

$$x_i^{\boldsymbol{\cdot}} = \frac{\partial H}{\partial x_{i+n}}, \quad x_{i+n}^{\boldsymbol{\cdot}} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, n \tag{1.1}$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — обобщенные координаты, $x_{n+1}, \ldots, x_{2n}$ — импульсы; функция Гамильтона $H(x_1, \ldots, x_{2n}, \omega t)$ дважды дифференцируема по x_i и 2π-периодична по ωt.

Решению $\mathbf{x}(t)$ системы (1.1) отвечает уравнение в вариациях

$$J\mathbf{y}^{\boldsymbol{\cdot}} = A(\mathbf{x}(t), \omega t)\,\mathbf{y} \tag{1.2}$$

$$J = \begin{Vmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{Vmatrix}, \quad A(\mathbf{x}, \omega t) = \| a_{ik}(\mathbf{x}, \omega t) \|, \quad a_{ik} = \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_k}$$

где I_n — единичная матрица порядка n.

Предположим, что матрица $A(\mathbf{x}, \omega t)$ знакоопределена при всех $\mathbf{x}, t$ и элементы ее ограничены в R^{2n+1}. Тогда найдутся такие постоянные знакоопределенные матрицы A_- и A_+ одного знака с $A(\mathbf{x}, \omega t)$, что $A_- \leqslant A(\mathbf{x}, \omega t) \leqslant A_+$, т. е. для любого вектора $\mathbf{c}$ порядка $2n$ и любых $\mathbf{x}, t$ соответствующие квадратичные формы удовлетворяют неравенству

$$(\mathbf{c}, A_-\mathbf{c}) \leqslant (\mathbf{c}, A(\mathbf{x}, \omega t)\,\mathbf{c}) \leqslant (\mathbf{c}, A_+\mathbf{c}) \tag{1.3}$$

В силу знакоопределенности A_- и A_+ собственные значения матриц $J^{-1}A_-$ и $J^{-1}A_+$ мнимые [4]; обозначим их соответственно $\pm i\omega_k^-$ и $\pm i\omega_k^+$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Теорема 1. Если

$$\omega \notin \frac{1}{m}[\omega_k^-, \omega_k^+], \quad k = 1, \ldots, n; \quad m = 1, 2, \ldots \tag{1.4}$$

то в системе (1.1) существует единственное периодическое решение с периодом $T = 2\pi/\omega$.

При условии

(1.5) $$\omega \notin \frac{1}{m}[\omega_i^- + \omega_k^-, \omega_i^+ + \omega_k^+], \quad i, k = 1, \ldots, n; \quad m = 1, 2, \ldots$$

это решение устойчиво в первом приближении.

Доказательство. Положим в (1.1) $H = H(\mathrm{x}, \omega t, \varepsilon) = (\mathrm{x}, A_-\mathrm{x}) + \varepsilon[H(x, \omega t) - (\mathrm{x}, A_-\mathrm{x})]$. Покажем, что при $\varepsilon \in [0, 1]$ выполняются следующие условия: все решения $x(t, \varepsilon)$ продолжимы на $(0, \infty)$; любое T-периодическое решение $\mathrm{x}(t, \varepsilon)$ допускает не зависящую от ε оценку $(\mathrm{x}(0, \varepsilon), \mathrm{x}(0, \varepsilon)) \leqslant N$; соответствующее уравнение (1.2) не имеет T-периодических решений; при $\varepsilon = 0$ T-периодическое решение существует. Как показано в [1], при этих условиях заданная система (ей отвечает $\varepsilon = 1$) имеет T-периодическое решение.

Представим (1.1) в виде

$$J\mathrm{x}^\cdot = H_\mathrm{x}(\mathrm{x}, \omega t, \varepsilon) = \int_0^1 H_{\mathrm{x}\theta}(\theta\mathrm{x}, \omega t, \varepsilon)\, d\theta + H_\mathrm{x}(\theta\mathrm{x}, \omega t, \varepsilon)|_{\theta=0} =$$

$$= \int_0^1 H_{\mathrm{xx}}(\theta\mathrm{x}, \omega t, \varepsilon)\,\mathrm{x}\, d\theta + \varepsilon H_\mathrm{x}(0, \omega t)$$

Таким образом, любое решение $\mathrm{x}(t, \varepsilon)$ системы (1.1) удовлетворяет также уравнению

(1.6) $$J\mathrm{x}^\cdot = A_*(t, \varepsilon)\,\mathrm{x} + \varepsilon \mathrm{f}(t)$$

$$A_*(t, \varepsilon) = \int_0^1 A(\theta\mathrm{x}(t, \varepsilon), \omega t, \varepsilon)\, d\theta, \qquad \mathrm{f}(t) = \mathrm{f}(t + T) = H_\mathrm{x}(0, \omega t)$$

причем $A_- \leqslant A_*(t, \varepsilon) \leqslant A_+$ при $\varepsilon \in [0, 1]$, так как $A_- \leqslant A(\mathrm{x}, \omega t, \varepsilon) \leqslant A(\mathrm{x}, \omega t) \leqslant A_+$.

Положим $\varphi(t, \varepsilon) = (\mathrm{x}(t, \varepsilon), \mathrm{x}(t, \varepsilon))$. В силу (1.6)

$$\varphi^\cdot = 2(\mathrm{x}, \mathrm{x}^\cdot) = 2(\mathrm{x}J^{-1}A_*\mathrm{x} + \varepsilon J^{-1}\mathrm{f})$$

откуда из неравенства Коши—Буняковского найдем

$$\varphi^\cdot \leqslant 2(\lambda_+\varphi + c\varphi^{1/2}), \quad c = \max(\mathrm{f}(t), \mathrm{f}(t))^{1/2}$$

где λ_+ — наибольшее собственное значение матрицы A_+. Используя теорему Чаплыгина о дифференциальных неравенствах, получим

(1.7) $$\varphi(t, \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\lambda_+^2}[(\lambda_+\varphi^{1/2}(0, \varepsilon) + c)\exp(\lambda_+ t) - c]^2 \quad \text{при} \quad t > 0$$

Как следует из (1.7), решение $\mathrm{x}(t, \varepsilon)$ продолжимо на $(0, \infty)$. Рассмотрим самосопряженную краевую задачу

(1.8) $$J\mathrm{y}^\cdot = \lambda Q(t)\,\mathrm{y}, \quad \mathrm{y}(0) = \mathrm{y}(T)$$

Пусть λ_i, λ_i^-, λ_i^+ $(i = 1, 2, \ldots)$ — расположенные в порядке возрастания положительные собственные значения задачи (1.8) при $Q = A(\mathrm{x}(t, \varepsilon), \omega t)$, $Q = A_-$ и $Q = A_+$ соответственно. Так как при $\varepsilon \in [0, 1]$ справедливо неравенство $A_- \leqslant A(\mathrm{x}, \omega t) \leqslant A_+$, то $\lambda_i^+ \leqslant \lambda_i \leqslant \lambda_i^-$ [5]. Очевидно, что спектры λ^- и λ^+ образованы из величин $m\omega/\omega_k^-$ и $m\omega/\omega_k^+$ $(k = 1, \ldots, n;\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, поэтому при условии (1.4) $\lambda_i \neq 1$. Следовательно, при $\varepsilon \in [0, 1]$ уравнение (1.2), отвечающее любому периодическому решению $\mathrm{x}(t, \varepsilon)$, не имеет T-периодических решений.

При $Q = A_*(t, \varepsilon)$ собственные функции $\mathrm{y}_k(t, \varepsilon)$ задачи (1.8) образуют полную (в силу $A_*(t, \varepsilon) > 0$) систему, причем $A_*\mathrm{y}_i$ и y_k ортогональны на $[0, T]$ при $i \neq k$ [5]. Полагая, что $\mathbf{y}_k(t, \varepsilon)$ соответствующим образом нормированы, представим периодическое решение уравнения (1.6) в виде

$$
\mathbf{x}(t,\varepsilon)=\varepsilon\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{f_k(\varepsilon)\,\mathbf{y}_k(t,\varepsilon)}{\lambda_k(\varepsilon)-1},\qquad f_k(\varepsilon)=\int_0^T(\mathbf{f}(t),\mathbf{y}_k(t,\varepsilon))\,dt \tag{1.9}
$$

где $\lambda_k(\varepsilon)$ — собственные значения задачи (1.8) при $Q = A_*(t, \varepsilon)$; $\lambda_k(\varepsilon) > 0$ при $k > 0$, $\lambda_k(\varepsilon) \leqslant 0$ при $k \leqslant 0$.

Пусть λ_- — минимальное собственное значение матрицы A_-, $\delta = \min(1, |\lambda_k^- - 1|, |\lambda_k^+ - 1|)$ при $k > 0$. Учитывая, что $A_*(t, \varepsilon) \geqslant A_-$, $\lambda_k(\varepsilon) \in [\lambda_k^+, \lambda_k^-]$, с помощью (1.9) найдем при $\varepsilon \in [0, 1]$

$$
\int_0^T\varphi\,dt\leqslant\frac{1}{\lambda_-}\int_0^T(A_*\mathbf{x},\mathbf{x})\,dt=\frac{\varepsilon^2}{\lambda_-}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{f_k^2(\varepsilon)}{(\lambda_k(\varepsilon)-1)^2}< \tag{1.10}
$$

$$
<\frac{1}{\lambda_-\delta^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}f_k^2(\varepsilon)=\frac{1}{\lambda_-\delta^2}\int_0^T(A_*^{-1}\mathbf{f},\mathbf{f})\,dt\leqslant\frac{1}{\lambda_-^2\delta^2}\int_0^T(\mathbf{f},\mathbf{f})\,dt=N_1
$$

где постоянная N_1 не зависит от ε. В силу (1.7) и (1.10) $\varphi(0, \varepsilon)$ также допускает не зависящую от ε верхнюю оценку.

При $\varepsilon = 0$ система (1.1) имеет T-периодическое решение $x(t, 0) = 0$. Таким образом, приведенные выше условия существования T-периодического решения $x(t)$ выполняются.

При указанных условиях любое периодическое решение $\mathbf{x}(t, \varepsilon)$ может быть единственным образом продолжено по ε на $[0, 1]$ [1], поэтому число периодических решений одинаково для любого $\varepsilon \in [0, 1]$. Так как $\omega \neq \omega_k^-/m$ ($k = 1, \ldots, n$; $m = 1, 2, \ldots$), то решение $\mathbf{x}(t, 0)$ и, следовательно, $\mathbf{x}(t, 1) = \mathbf{x}(t)$ единственно.

Обозначим $\pm i\omega_k(s)$ — собственные значения матрицы $J^{-1}(A_- + s(A_+ - A_-))$. Так как $\omega_k(s) \in [\omega_k^-, \omega_k^+]$ при $s \in [0, 1]$, то при условии (1.5) $(\omega_k(s) + \omega_i(s))\,T \neq 2\pi m$ ($i, k = 1, \ldots, n$; $m = 1, 2, \ldots$). Поэтому уравнение

$$
J\mathbf{x}^{\cdot} = (A_- + s(A_+ - A_-))\,\mathbf{x}
$$

для любого $s \in [0, 1]$ сильно устойчиво, т. е. все мультипликаторы лежат на единичной окружности и являются дефинитными. В соответствии с теоремой о направленной широте областей устойчивости [4] уравнение (1.2) также сильно устойчиво, т. е. решение $\mathbf{x}(t)$ устойчиво в первом приближении. Теорема доказана.

2. Рассмотрим системы, описываемые уравнениями Лагранжа

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial x_i^{\cdot}}\right)-\frac{\partial(K-V)}{\partial x_i}=0,\qquad i=1,\ldots,n \tag{2.1}
$$

$$
K(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{\cdot}, \omega t) = K(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{\cdot}, \omega t + 2\pi),\quad V(\mathbf{x}, \omega t) = V(\mathbf{x}, \omega t + 2\pi)
$$

где $K(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{\cdot}, \omega t)$ и $V(\mathbf{x}, \omega t)$ — кинетическая и потенциальная энергия.

Решению $x(t)$ отвечает уравнение в вариациях

$$
[M(t)\,\mathbf{z}^{\cdot} + Q(t)\,\mathbf{z}]^{\cdot} - Q'(t)\,\mathbf{z}^{\cdot} + [U(t) - P(t)]\,\mathbf{z} = 0 \tag{2.2}
$$

где штрих означает транспонирование, а элементы матриц M, Q, P и U равны вычисляемым при $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ производным

$$
m_{ik}=\frac{\partial^2K}{\partial x_i^{\cdot}\partial x_k^{\cdot}},\qquad q_{ik}=\frac{\partial^2K}{\partial x_i^{\cdot}\partial x_k}
$$

$$
p_{ik}=\frac{\partial^2K}{\partial x_i\partial x_k},\qquad u_{ik}=\frac{\partial^2V}{\partial x_i\partial x_k}
$$

Уравнение (2.2) приводится к виду (1.2), причем [4]

$$(2.3)\qquad A=\begin{Vmatrix} U-P+Q'M^{-1}Q & -Q'M^{-1} \\ -M^{-1}Q & M^{-1}\end{Vmatrix},\quad \mathbf{y}=\mathbf{z}+M\mathbf{z}^{\cdot}+Q\mathbf{z}$$

т. е. вектор y равен прямой сумме векторов z и $Mz^{\cdot}+Qz$.

Если кинетическая энергия не зависит от координат ($K=K(\mathbf{x}^{\cdot}, \omega t)$), то $P=Q=0$, поэтому неравенство (1.3) будет выполнено, если в качестве A_- и A_+ принять квазидиагональные матрицы с элементами U_-, M_+^{-1} и U_+, M_-^{-1}, где $0<U_-\leqslant U\leqslant U_+$, $0<M_-\leqslant M\leqslant M_+$. В результате в условиях (1.4), (1.5) ω_i^- и ω_i^+ будут равны квадратным корням из собственных значений матриц $M_+^{-1}U_-$ и $M_-^{-1}U_+$ соответственно. Заметим, что для рассматриваемого случая условия существования и единственности (1.4) получены другими методами [2, 3].

Обычно $K={}^1/_2(\mathbf{x}^{\cdot}, M(\mathbf{x},\omega t)\mathbf{x}^{\cdot})$, причем матрица $M(\mathbf{x},\omega t)$ положительно определена при всех $\mathbf{x}$ и t. Однако матрица U во многих случаях (например, в системах с угловыми координатами, с интенсивным параметрическим возбуждением и др.) не является положительно-определенной, в результате условие $A>0$ не выполняется. В следующей теореме на матрицу U накладывается более слабое условие положительной определенности в среднем, т. е.

$$(2.4)\qquad \langle U\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T U(\mathbf{x}(t),\omega t)\,dt>0$$

Пусть $K={}^1/_2(\mathbf{x}^{\cdot}, M(\omega t)\mathbf{x}^{\cdot})$, $0<M_-\leqslant M(\omega t)$, $U(\mathbf{x},\omega t)\leqslant U_+$, ω_n^{+2} — наибольшее собственное значение матрицы $M_-^{-1}U_+$.

Теорема 2. T-периодическое решение уравнения (2.1) при $\omega>2\omega_n^+$ и условии (2.4) устойчиво в первом приближении.

Доказательство. Так как K не зависит от $\mathbf{x}$, то $Q=P=0$. Рассмотрим уравнение

$$(2.5)\qquad J\mathbf{y}^{\cdot}=\lambda A(t)\mathbf{y},\qquad A(t)=\begin{Vmatrix} U(\mathbf{x}(t),\omega t) & 0 \\ 0 & M^{-1}(\omega t)\end{Vmatrix}$$

Пусть $\rho_i(\lambda)$, $\mathbf{y}_i(t,\lambda)$ — мультипликаторы и соответствующие им решения (2.5) ($\mathbf{y}_i(t+T,\lambda)=\rho_i\mathbf{y}_i(t,\lambda)$). Учитывая, что $\mathbf{y}_i=\mathbf{z}_i+M\mathbf{z}_i^{\cdot}$, найдем

$$(2.6)\qquad q_i=\int_0^T(A\mathbf{y}_i,\mathbf{y}_i)\,dt=\frac{1}{\lambda}\int_0^T(J\mathbf{y}_i^{\cdot},\mathbf{y}_i)\,dt=$$

$$=\frac{2}{\lambda}\int_0^T(M\mathbf{z}_i^{\cdot},\mathbf{z}_i^{\cdot})\,dt-\frac{1}{\lambda}(M\mathbf{z}_i^{\cdot},\mathbf{z}_i)\Big|_0^T$$

Ввиду (2.4) $\langle A\rangle>0$, поэтому при малых λ все мультипликаторы первого рода смещаются из точки $\rho(0)=1$ на верхнюю, второго рода — на нижнюю полуокружность [5]. Так как при $|\rho_i|=1$ внеинтегральный член в (2.6) равен нулю, то $q_i>0$ и, следовательно, при возрастании λ $\rho_i(\lambda)$ продолжают двигаться в тех же направлениях [4]. Пусть λ_* — значение λ, при котором авангардные мультипликаторы разного рода встречаются в точке $\rho=-1$. Очевидно, что λ_* является первым собственным значением краевой задачи для уравнения (2.5) при условиях $\mathbf{y}(0)=-\mathbf{y}(T)$. Так как $A(t)<A_+=\operatorname{diag}(U_+, M_-^{-1})$, то $\lambda_*>\lambda_1^+=$ $=\pi^2(T\omega_n^+)^{-2}>1$ при $\omega>2\omega_n^+$, где λ_1^+ — первое положительное собственное значение указанной краевой задачи при $A = A_+$. Следовательно, при $\lambda = 1$ все мультипликаторы первого рода лежат на верхней, второго — на нижней полуокружности, что и доказывает устойчивость решения $\mathbf{x}(t)$.

Замечание. Если M — постоянная матрица, $V(\mathbf{x}, \omega t) = V(-\mathbf{x}, \omega t + \pi)$, то обычно рассматриваются решения вида $\mathbf{x}(t) = -\mathbf{x}(t + T/2)$ (это соотношение заведомо имеет место в случае единственности T-периодического решения, так как наряду с $\mathbf{x}(t)$ уравнению (2.1) удовлетворяет также функция $-\mathbf{x}(t + T/2)$). При этом $u_{ik}(\mathbf{x}, \omega t) = u_{ik}(-\mathbf{x}, \omega t + \pi)$, $U(t) = U(t + T/2)$, $A(t) = A(t + T/2)$, поэтому в полученных выше условиях устойчивости ω следует заменить величиной 2ω. В частности, теорема 2 становится справедливой при $\omega > \omega_n^+$.

3. Предположим, что функция $V(\mathbf{x}, \omega t)$ 2π-периодична по $x_1, \ldots, x_l$ $(l \leqslant n)$; $K = {}^1/_2(\mathbf{x}^\cdot, M(\omega t)\mathbf{x}^\cdot)$, $M(\omega t) = M(-\omega t)$, $V(\mathbf{x}, \omega t) = V(-\mathbf{x}, -\omega t)$. Рассмотрим решение $\mathbf{x}(t)$ следующего вида:

$$x_i(t) = n_i\omega t + \psi_i(t),\ x_i(0) = 0,\ i = 1, \ldots, n \tag{3.1}$$

где $n_i = 0$ при $i > l$, n_i — любое целое число при $i \leqslant l$; $\psi_i(t) = \psi_i(t + T)$ — колебательная составляющая решения. При $n_i = 0$ соответствующей координате x_i отвечает периодическое колебательное, при $n_i \neq 0$ — вращательное движение со средней угловой скоростью $n_i\omega$. Так как функция $\mathbf{v}(t) = -\mathbf{x}(-t)$ также удовлетворяет уравнению (2.1) и $\mathbf{v}(0) = \mathbf{x}(0)$, $\mathbf{v}^\cdot(0) = \mathbf{x}^\cdot(0)$, то $\mathbf{x}(t) = -\mathbf{x}(-t)$.

Заметим, что решения вида (3.1) типичны для систем, содержащих угловые координаты [6].

Теорема 3. При $\omega > \omega_n^+$ и любых заданных n_i уравнение (2.1) имеет единственное решение вида (3.1).

Доказательство. Положим $M(\omega t, \varepsilon) = M_- + \varepsilon[M(\omega t) - M_-]$, $V(\mathbf{x}, \omega t, \varepsilon) = \varepsilon V(\mathbf{x}, \omega t)$. Пусть $\mathbf{x}(t, \varepsilon)$ — решение краевой задачи для уравнений (2.1) при условиях $x_i(0) = 0$, $x_i(T/2) = \pi n_i$, $i = 1, \ldots, n$; очевидно, что решение $\mathbf{x}(t, \varepsilon)$, будучи продолжено по t, имеет вид (3.1), $\mathbf{x}(t, 1) = \mathbf{x}(t)$. Соответствующая краевая задача для уравнения в вариациях

$$[M(\omega t, \varepsilon)\mathbf{z}^\cdot]^\cdot + \lambda U(\mathbf{x}(t, \varepsilon), \omega t, \varepsilon)\mathbf{z} = 0,\ \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}(T/2) = 0 \tag{3.2}$$

Так как $M(\omega t, \varepsilon) \geqslant M_-$, $U(\mathbf{x}(t, \varepsilon), \omega t, \varepsilon) \leqslant U_+$ при $\varepsilon \in [0, 1]$, то первое положительное собственное значение задачи (3.2) $\lambda_1 \geqslant \lambda_1^+ = 4\pi^2(T\omega_n^+)^{-2} > 1$ при $\omega > \omega_n^+$, где λ_1^+ — собственное значение при $M = M_-$, $U = U_+$. Поэтому при $\lambda = 1$ и любом $\varepsilon \in [0, 1]$ задача (3.2) не имеет нетривиальных решений.

Следовательно, если при некотором $\varepsilon_* \in [0, 1]$ решение вида (3.1) существует, то оно может быть единственным образом продолжено по ε в некоторой окрестности ε_* [7]. Поэтому указанные выше условия [1], обеспечивающие единственность продолжения периодического решения $\mathbf{x}(t, \varepsilon)$ по ε на $[0, 1]$ и тем самым существование и единственность $\mathbf{x}(t, 1) = \mathbf{x}(t)$, достаточны и для решений вида (3.1).

Представив (2.1) в гамильтоновой форме и положив

$$\varphi(t, \varepsilon) = (\boldsymbol{\psi}(t, \varepsilon) + M(\omega t, \varepsilon)\boldsymbol{\psi}^\cdot(t, \varepsilon),\ \boldsymbol{\psi}(t, \varepsilon) + M(\omega t, \varepsilon)\cdot \cdot\boldsymbol{\psi}^\cdot(t, \varepsilon))$$

аналогично доказательству теоремы 1 найдем, что в рассматриваемом случае при $\varepsilon \in [0, 1]$ справедливы оценки (1.7), (1.10), поэтому любое решение $\mathbf{x}(t, \varepsilon)$ продолжимо на $(0, \infty)$, а для решений (3.1) справедлива оценка $(\varphi(0, \varepsilon), \varphi(0, \varepsilon)) \leqslant N$. Очевидно, что при $\varepsilon = 0$ уравнение (2.1) имеет единственное решение вида (3.1): $x_i(t, 0) = n_i\omega t$ $(i \leqslant l)$, $x_i(t, 0) = 0$ $(i > l)$. Таким образом, условия, обеспечивающие существование и единственность решения $\mathbf{x}(t, 1) = \mathbf{x}(t)$, выполняются.

Замечание. Так как функция $V(\mathbf{x}, \omega t)$ 2π-периодична по $x_1, \ldots, x_l$ и $V(\mathbf{x}, \omega t) = V(-\mathbf{x}, -\omega t)$, то $V(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0, \omega t) = V(-(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0), -\omega t)$, где $x_{i0} = 0$ при $i > l$, $x_{i0} = 0$ либо $x_{i0} = \pi$ при $i \leqslant l$. Поэтому при $\omega > \omega_n^+$ существует единственное периодическое решение вида $x_i(t) = x_{i0} + n_i\omega t + \psi_i(t)$. Таким образом, при заданных средних скоростях вращения $n_i\omega$ $(i = 1, \ldots, l)$ существует 2^l решений уравнения (2.1), отвечающих различным $\mathbf{x}_0$.

Отметим также, что доказанная теорема не исключает наличия решений другого типа с частотой $\omega > \omega_n^+$.

Ввиду периодичности $V(\mathbf{x}, \omega t)$ по $x_1, \ldots, x_l$ матрица $U(\mathbf{x}, \omega t)$ не является положительно-определенной. Для исследования устойчивости рассматриваемых решений можно воспользоваться теоремой 2.

Покажем, что при достаточно больших ω решение (3.1) существует, даже если элементы матрицы $U(\mathbf{x}, \omega t)$ не ограничены при $\mathbf{x} \in R^n$. Для этого предварительно найдем верхние оценки решений, которые представляют и самостоятельный интерес.

Пусть матрица $M(\omega t)$ приведена к диагональному виду, т. е. $M(\omega t) = \operatorname{diag}[m_1(\omega t), \ldots, m_n(\omega t)]$, причем $0 < m_i^- \leqslant m_i(\omega t) \leqslant m_i^+$. При заданных n_i систему уравнений (2.1) запишем в виде

$$(3.3) \qquad [m_i(\psi_i^{\cdot} + n_i\omega)]^{\cdot} + f_i(\psi_1, \ldots, \psi_n, t) = 0, \quad i = 1, \ldots, n$$

Предположим, что при некоторых постоянных $c_{ik} \geqslant 0$, $p_i > 0$ и $\omega > \omega_n^+$ имеют место неравенства

$$(3.4) \qquad |f_i(\psi_1, \ldots, \psi_n, t)| < \sum_{k=1}^{n} c_{ik}|\psi_k| + p_i|\sin\omega t|, \qquad i = 1, \ldots, n$$

Пусть ω_*^2 — наибольшее действительное собственное значение матрицы $M_-^{-1}C$ $(M_- = \operatorname{diag}(m_1^-, \ldots, m_n^-)$, $C = \|c_{ik}\|)$, $\psi_i^+(t) = A_i^+\sin\omega t$ — решение системы

$$(3.5) \qquad m_i^-\psi_i^{\cdot\cdot} + \sum_{k=1}^{n} c_{ik}\psi_k + p_i\sin\omega t = 0, \qquad i = 1, \ldots, n$$

Теорема 4. При $\omega > \omega_*$ справедлива оценка

$$(3.6) \qquad |\psi_i(t)| < A_i^+\sin\omega t \text{ на } (0, \pi/\omega), \quad i = 1, \ldots, n$$

Доказательство. Положим в (3.5) $c_{ik}(\varepsilon) = \varepsilon c_{ik}$. Так как $\omega_*(\varepsilon) = \varepsilon\omega_*$, то при $\varepsilon \in [0, 1]$ существует решение $\psi_i^+(t, \varepsilon) = A_i^+(\varepsilon)\sin\omega t$. Покажем, что $A_i^+(\varepsilon) > 0$. При $\varepsilon = 0$ это неравенство выполняется; пусть $A_k^+(\varepsilon_*) = 0$, $A_i^+(\varepsilon_*) \geqslant 0$ при некотором $\varepsilon_* \in [0, 1]$. Но тогда $\psi_k^{+\cdots}(t, \varepsilon_*) \equiv 0$, что, однако, невозможно, так как в силу k-го уравнения (3.5) $m_k^-\psi_k^{+\cdots}(t, \varepsilon_*) < 0$ на $(0, \pi/\omega)$.

Пусть $\boldsymbol{\psi}(t, \varepsilon)$ $(\boldsymbol{\psi}(0, \varepsilon) = \boldsymbol{\psi}(\pi/\omega, \varepsilon) = 0$, $\varepsilon \in [0, 1])$ — решение системы

$$(3.7) \qquad [m_i(\omega t, \varepsilon)(\psi_i^{\cdot} + n_i\omega)]^{\cdot} + \varepsilon f_i(\psi_1, \ldots, \psi_n, t) = 0, \quad i = 1, \ldots, n$$

где $m_i(\omega t, \varepsilon) = m_i^- + \varepsilon(m_i(\omega t) - m_i^-)$. При $\varepsilon = 0$ справедливость оценок (3.6) очевидна. Если при $\varepsilon = 1$ они не выполняются, то найдутся такие k, $t_1 \in [0, \pi/\omega]$ и $\varepsilon_* \in (0, 1]$, что $|\psi_k(t_1, \varepsilon_*)| = \psi_k^+(t_1)$, $|\psi_k^{\cdot}(t_1, \varepsilon_*)| = |\psi_k^{+\cdot}(t_1)|$, $|\psi_i(t, \varepsilon_*)| \leqslant \psi_i^+(t)$ $(i = 1, \ldots, n;$ $t \in$

$\in [0, \pi/\omega]$). Так как

$$m_k(\omega t, \varepsilon_*) > m_k^-, \qquad \varepsilon_* |f_k(\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t), t)| <$$
$$< \sum_{r=1}^{n} c_{kr}\psi_r^+(t) + p_k \sin\omega t \quad \text{на} \quad (0, \pi/\omega)$$

то из сравнения k-го уравнения (3.5) и (3.7) следует, что $|\psi_k(t, \varepsilon_*)| < \psi_k^+(t)$ на $(0, \pi/\omega)$, $|\psi_k^{\cdot}(0, \varepsilon_*)| < \psi_k^{+\cdot}(0)$, $|\psi_k^{\cdot}(\pi/\omega), \varepsilon_*| < -\psi_k^{+\cdot}(\pi/\omega)$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Выделим в окрестности $\psi = 0$ область $\Omega \subset R^n$. Пусть при $\psi \in \Omega$ выполняются неравенства (3.4) и $U(\mathrm{x}(t), \omega t) \leqslant U_+$. Так как $A_i^+(\omega) \to 0$ при $\omega \to \infty$, то $\psi^+(t) \in \Omega$ при достаточно больших ω; следовательно, и $\psi(t, \varepsilon) \in \Omega$ при $\varepsilon \in [0, 1]$. Поэтому при условиях $\omega > \omega_*(\Omega)$, $\omega > \omega_n^+(\Omega)$ в области Ω существует единственное решение рассматриваемого типа.

4. Исследуем влияние малых диссипативных сил на устойчивость периодических колебаний. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d}{dt}\left[M(\omega t)\frac{d\mathrm{x}}{dt}\right] + \mu F(\omega t)\frac{d\mathrm{x}}{dt} + \frac{\partial V(\mathrm{x}, \omega t)}{\partial \mathrm{x}} = 0 \tag{4.1}$$

где $F(\omega t) = F(\omega t + 2\pi)$ — симметричная положительно-определенная матрица $n \times n$, μ — малый положительный параметр.

Предположим, что при $\mu = 0$ уравнение (4.1) имеет T-периодическое решение $\mathrm{x}(t)$, причем соответствующее уравнение в вариациях (2.2) сильно устойчиво (последнее, в частности, имеет место, если выполнено какое-либо из полученных выше условий устойчивости). Тогда уравнение (2.2) не имеет T-периодических решений, так как им отвечал бы индефинитный мультипликатор $\rho = 1$. Поэтому в соответствии с теоремой Пуанкаре ([8], с. 380) уравнение (4.1) имеет при малых μ единственное решение $\mathrm{x}(t, \mu)$, такое, что $\mathrm{x}(t, 0) = \mathrm{x}(t)$. Соответствующее уравнение в вариациях имеет вид

$$[M(\omega t)\mathrm{z}^{\cdot}]^{\cdot} + \mu F(\omega t)\mathrm{z}^{\cdot} + U(\mathrm{x}(t, \mu), \omega t)\mathrm{z} = 0 \tag{4.2}$$

Пусть $\alpha_{i0} = i\omega_{i0}$ — r_i-кратный характеристический показатель уравнения (2.2). Характеристические показатели уравнения (4.2), обращающиеся при $\mu = 0$ в α_{i0}, можно представить в виде

$$\alpha_i^k(\mu) = \alpha_{i0} + \alpha_{1i}^k(\mu) + \alpha_{2i}^k(\mu), \qquad k = 1, \ldots, r_i$$

где $\alpha_{1i}^k(\mu)$ определяются возмущением решения $\mathrm{x}(t)$ и, следовательно, коэффициентов уравнения (2.2), $\alpha_{2i}^k(\mu)$ — наличием слагаемого $\mu F\mathrm{z}^{\cdot}$. Первый из указанных факторов не нарушает гамильтонов характер системы, поэтому величины $\alpha_{1i}^k(\mu)$ являются мнимыми. Получим выражения $\alpha_{2i}^k(\mu)$.

Характеристическому показателю α_{i0} отвечают решения

$$\mathrm{z}_{ik}(t) = \exp(\alpha_{i0}t)\,\mathrm{u}_{ik}(t), \quad k = 1, \ldots, r_i$$

Положим $\mathrm{y}_{ik} = \mathrm{z}_{ik} + M\mathrm{z}_{ik}^{\cdot} = \exp(\alpha_{i0}t)\,\mathrm{v}_{ik}(t)$] и нормируем функции $\mathrm{v}_{ik} = \mathrm{u}_{ik} + M(\mathrm{u}_{ik}^{\cdot} + \alpha_{i0}\mathrm{u}_{ik})$ условием

$$((\mathrm{v}_{ip}, \gamma_i iJ\mathrm{v}_{iq})) = \frac{1}{T}\int_0^T (\mathrm{v}_{ip}, \gamma_i iJ\mathrm{v}_{iq})\,dt = \delta_{pq} \tag{4.3}$$

где $\delta_{pq} = 0$ при $p \neq q$, $\delta_{pp} = 1$; для мультипликаторов первого рода $\gamma_i = 1$, второго — $\gamma_i = -1$.

Так как дефинитному мультипликатору отвечают простые элементарные делители, то разложение $\alpha_{2i}^{k}(\mu)$ по степеням μ имеет вид [4]

$$\alpha_{2i}^{k}(\mu) = \beta_{ik}\mu + O(\mu^{1+q_{ik}^{-1}})$$

где при условии (4.3) величины β_{ik} являются собственными значениями матрицы σ с элементами

$$\sigma_{pq} = ((B\mathbf{v}_{ip}, \gamma_i iJ\mathbf{v}_{iq})), \qquad B = \operatorname{diag}(0, -FM^{-1})$$

а величины q_{ik} равны кратностям соответствующих значений β_{ik}.

Учитывая, что $|\exp(\alpha_{i0}T)| = 1$, $F' = F$, найдем

$$\sigma_{pq} = -((F\mathbf{z}_{ip}^{\cdot}, \gamma_i i\mathbf{z}_{iq})) = ((\gamma_i i\mathbf{z}_{ip}^{\cdot}, F\mathbf{z}_{iq})) = -((\gamma_i i\mathbf{z}_{ip}, F\mathbf{z}_{iq}^{\cdot})) = \bar{\sigma}_{qp}$$

т. е. матрица σ — эрмитова, поэтому ее собственные значения действительны. Если β_{ik} отрицательны для всех i, то решение $\mathbf{x}(t, \mu)$ при малых μ асимптотически устойчиво, если какое-либо β_{ik} положительно, то $\mathbf{x}(t, \mu)$ неустойчиво.

В случае скалярного уравнения второго порядка решение, устойчивое в первом приближении, становится асимптотически устойчивым при наличии малых диссипативных сил [9]. Выясним, при каких условиях аналогичное утверждение справедливо и для векторного уравнения (4.1).

Предположим, что $F = M$ (физически это означает, что коэффициенты диссипации пропорциональны инерционным коэффициентам). Тогда

$$\sigma_{pq} = -((M\mathbf{z}_{ip}^{\cdot}, \gamma_i i\mathbf{z}_{iq})) = -{}^1/_2((\mathbf{v}_{ip}, \gamma_i iJ\mathbf{v}_{iq})) = -{}^1/_2\delta_{pq}$$

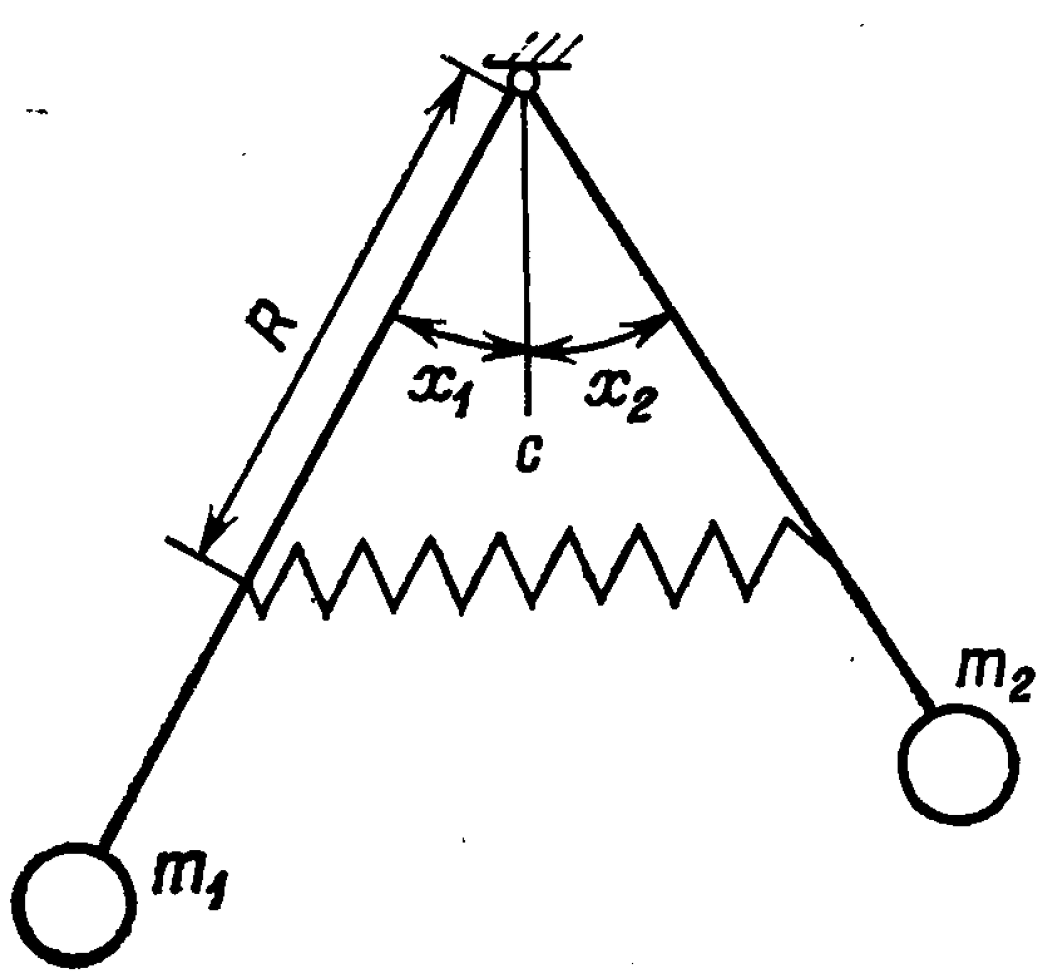
Таким образом, здесь все $\beta_{ik} = -{}^1/_2$, поэтому при малых μ решение $\mathbf{x}(t, \mu)$ асимптотически устойчиво.

Предположим, что все характеристические показатели α_{i0} простые, M и F — постоянные матрицы, а матрица $U(t)$ близка к постоянной (последнее, например, имеет место в случае вынужденных колебаний слабо нелинейных систем). Так как при этом функции $\mathbf{u}_i(t)$ также близки к постоянным, $F > 0$, $\gamma_i\omega_{i0} = |\omega_{i0}|$, то

$$\beta_i = \sigma_{ii} = -((F(\mathbf{u}_i^{\cdot} + i\omega_{i0}\mathbf{u}_i), \gamma_i i\mathbf{u}_i)) \approx -|\omega_{i0}|((F\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i)) < 0$$

Поэтому и в данном случае $\mathbf{x}(t, \mu)$ асимптотически устойчиво при малых μ.

5. Рассмотрим в качестве примера периодические колебательные и вращательные движения системы двух связанных маятников (фигура). Пусть потенциальная энергия связи $V_c = {}^1/_2c\rho^2$, где $\rho = |2R\sin{}^1/_2(x_1 + x_2)|$ — расстояние между точками ее крепления, x_1, x_2 — угловые координаты маятников. Уравнения вынужденных колебаний системы



(5.1) $$L_i x_i^{\cdot\cdot} + k_i \sin x_i + k\sin(x_1 + x_2) + F_i\sin\omega t = 0, \quad i = 1, 2$$
$$L_i = m_i l_i^2, \quad k_i = m_i g l_i, \quad k = cR^2$$

где m_i — массы, l_i — длины маятников, g — ускорение силы тяжести.

Уравнение в вариациях

$$M\mathbf{z}^{\cdot\cdot} + U(t)\mathbf{z} = 0$$

(5.2) $$M = \operatorname{diag}(L_1, L_2), \quad U(t) = \| u_{ik}(t) \|$$
$$u_{12} = u_{21} = k\cos(x_1(t) + x_2(t)), \quad u_{ii} = k_i\cos x_i(t) + k\cos(x_1(t) + x_2(t))$$

Очевидно, что $U(t) \leqslant U_+$, где U_+ — матрица с элементами $u_{ii}^+ = k_i + k$, $u_{12}^+ = u_{21}^+ = k$. Поэтому в качестве ω_i^{+2} можно принять собственные значения матрицы

$M^{-1}U_+$, т. е. корни уравнения

$$\Delta(\omega) = (k_1 + k - L_1\omega^2)(k_2 + k - L_2\omega^2) - k^2 = 0$$

Заметим, что величины $\omega^+{}_i$ равны частотам собственных малых колебаний системы.

В соответствии с замечанием к теореме 3 уравнение (5.1) при $\omega > \omega_2^+$ имеет единственное периодическое решение вида

$$x_i(t) = x_{i0} + n_i\omega t + \psi_i(t),\ \psi_i(t) = -\psi_i(-t) = \psi_i(t+T)$$

(n_i — любые заданные целые числа, $x_{i0} = 0$ либо $x_{i0} = \pi$). Если $n_1 = n_2 = 0$, то движение системы является колебательным, причем при $x_{i0} = 0$ колебания соответствующего маятника происходят относительно нижнего, при $x_{i0} = \pi$ — относительно верхнего положения равновесия. Общее число колебательных движений такого типа равно четырем.

Исследуем сначала периодические колебания системы в окрестности нижнего положения равновесия ($n_1 = n_2 = x_{10} = x_{20} = 0$). Очевидно, что неравенства (3.4) будут выполнены, если положить $C = U_+$, $p_i = |F_i|$. Поэтому при $\omega > \omega_2^+$

(5.3) $$|x_i(t)| < A_i^+ \sin\omega t \text{ на } (0, \pi/\omega)$$

$$A_1^+ = \frac{p_1(L_2\omega^2 - k_2 - k) + p_2 k}{\Delta(\omega)},\quad A_2^+ = \frac{p_2(L_1\omega^2 - k_1 - k) + p_1 k}{\Delta(\omega)}$$

Так как функция $-\mathrm{x}(t + T/2)$ также удовлетворяет уравнениям (5.1) и условиям (3.1), то в силу единственности $\mathrm{x}(t) = -\mathrm{x}(t + T/2)$. В соответствии с замечанием к теореме 2 решение $\mathrm{x}(t)$ устойчиво, если $\langle U\rangle > 0$ и $\omega > \omega_2^+$. В рассматриваемой системе

$$(c, U(t)c) = k_1 \cos x_1(t)\, c_1^2 + k_2 \cos x_2(t)\, c_2^2 + k \cos(x_1(t) + x_2(t))\times$$
$$\times(c_1 + c_2)^2$$

Поэтому $U(t) > U^-$, $\langle U\rangle > \langle U^-\rangle$ при $A_1^+ + A_2^+ \leqslant \pi$, где $U^-(t)$ — матрица, полученная из $U(t)$ заменой $x_i(t)$ их верхними оценками (5.3). Условия положительной определенности $\langle U^-\rangle$ имеют вид

(5.4) $$k_1 J_0(A_1^+) + kJ_0(A_1^+ + A_2^+) > 0$$

$$k_1k_2 J_0(A_1^+)\, J_0(A_2^+) + kJ_0(A_1^+ + A_2^+)\,[k_1 J_0(A_1^+) + k_2 J_0(A_2^+)] > 0$$

$$J_0(A) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(A \sin t)\, dt$$

где $J_0(A)$ — функция Бесселя первого рода [10].

Таким образом, при $A_1^+ + A_2^+ \leqslant \pi$ и условиях (5.4) решение $\mathrm{x}(t)$ устойчиво в первом приближении. Используя (5.3), можно найти ω_*, начиная с которого эти неравенства выполняются.

Очевидно, что оценки (5.3) и, следовательно, найденные условия устойчивости (5.4) справедливы при любых возмущающих силах $F_i(t)$ вида

$$F_i(t) = -F_i(-t) = -F_i(t + T/2),\quad |F_i(t)| \leqslant p_i\,|\sin\omega t|$$

Исследуем теперь решение вида (3.1) при $n_1 = -1$, $n_2 = 1$, описывающее вращение маятников в одном направлении со средней угловой скоростью ω. Предположим, что

$$R_1 = F_1 - m_1gl_1 > 0,\quad R_2 = F_2 + m_2gl_2 < 0$$

и рассмотрим сначала несвязанные маятники ($c = 0$).

Так как $\sin(\psi_1 - \omega t) = -\sin\omega t + \theta(t)\,\psi_1$, где $-1 \leqslant \theta(t) \leqslant 1$, то, положив $c_{11} = m_1gl_1$, с помощью теоремы 4 найдем: $|\psi_1(t)| \leqslant R_1[L_1\omega^2 - k_1]^{-1}\sin\omega t$ на $(0, \pi/\omega)$ при $\omega^2 > g/l_1$.

Покажем, что $\psi_1(t) > 0$ на $(0, \pi/\omega)$. Положим $\theta(t, \varepsilon) = \varepsilon\theta(t)$; при $\varepsilon = 0$ указанное неравенство выполняется, причем $\psi_1^{\cdot}(0) > 0$, $\psi_1^{\cdot}(\pi/\omega) < 0$. Если при возрастании ε на $(0, 1]$ оно нарушается, то $\psi_1(t_1, \varepsilon_*) = \psi_1^{\cdot}(t_1, \varepsilon_*) = 0$, $\psi_1(t, \varepsilon_*) \geqslant 0$ на $(0, \pi/\omega)$ при некоторых $t_1 \in [0, \pi/\omega]$ и $\varepsilon_* \in (0, 1]$. Но в силу соответствующего уравнения $\psi_1(t, \varepsilon_*) < 0$ в окрестности t_1. Полученное противоречие доказывает, что $\psi_1(t) > 0$ на $(0, \pi/\omega)$.

Если $\psi_1(t) \leqslant \pi/2$ на $(0, \pi/\omega)$, то с учетом $\psi_1(t) > 0$ имеем

$$|x_1(t)| \leqslant |x_1(\pi/\omega - t)|,\quad \cos x_1(t) \geqslant |\cos x_1(\pi/\omega - t)|$$

В результате среднее значение $\cos x_1(t)$ на $[0, \pi/\omega]$ положительно. Таким образом, в соответствии с теоремой 2 рассматриваемое движение устойчиво, если

$$\frac{R_1}{L_1\omega^2 - k_1} \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad \omega > 2\left(\frac{g}{l_1}\right)^{1/2}$$

При этом вращение может отличаться значительной неравномерностью; возможно даже, что $x_1^{\cdot}(0) > 0$, т. е. на некотором интервале маятник вращается в обратном направлении (заметим, что к таким режимам неприменимы известные критерии устойчивости вращения маятника [11, 12]). Ясно, что движение второго маятника устойчиво при

$$\frac{|R_2|}{L_2\omega^2 - k_2} \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad \omega > 2\left(\frac{g}{l_2}\right)^{1/2}$$

Пусть теперь $c \neq 0$. Очевидно, что для получения верхних оценок $|\psi_i(t)|$ следует в (5.3) заменить p_i на $|R_i|$. Предположим, что начиная с некоторого $\omega_* > 2\omega_2^+$ выполняются неравенства

$$A_1^+ \leqslant \pi/2, \quad A_2^+ \leqslant \pi/2, \quad R_1 > cR^2A_2^+, \quad R_2 < -cR^2A_1^+$$

Покажем, что соответствующее решение устойчиво. В силу первого уравнения (5.1) неравенство $\psi_1(t) > 0$ на $(0, \pi/\omega)$ не может нарушиться при некотором $c_* \leqslant c$, так как

$$R_1 \sin \omega t + c_*R^2 \sin(\psi_1 + \psi_2) > (R_1 - c_*R^2A_2^+) \sin \omega t > 0 \text{ на } (0, \pi/\omega)$$

Из второго уравнения (5.1) аналогично найдем, что $\psi_2(t) < 0$ на $(0, \pi/\omega)$. В результате среднее значение $\cos x_1(t)$, $\cos x_2(t)$, $\cos(x_1(t) + x_2(t))$ и, следовательно, матрицы $U(t)$ на $[0, \pi/\omega]$ положительно, что с учетом теоремы 2 доказывает устойчивость рассматриваемого решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Leach D. E.* On Poincare's perturbation theorem and a theorem of W. S. Loud.— J. Different. Equat., 1970, v. 7, No. 1, p. 34—53.
2. *Lazer A. C.* Application of a lemma on bilinear forms to a problem in nonlinear oscillations.— Proc. Amer. Math. Soc., 1972, v. 33, No. 1, p. 89—94.
3. *Перов А. И.* Вариационные методы в теории нелинейных колебаний. Воронеж: Изд-е Воронеж. ун-та, 1981. 196 с.
4. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 718 с.
5. *Крейн М. Г.* Основные положения теории λ-зон устойчивости канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.— В кн.: Памяти А. А. Андронова. М.: Изд-во АН СССР, 1955, с. 413—498.
6. *Блехман И. И.* Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971. 894 с.
7. *Келлер Д. Б.* Теория ветвления решений обыкновенных дифференциальных уравнений.— В кн.: Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения. М.: Мир, 1974, с. 19—34.
8. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
9. *Зевин А. А.* Устойчивость периодических колебаний в системах с мягкой и жесткой нелинейностью.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 4, с. 640—649.
10. *Коренев Б. Г.* Введение в теорию бесселевых функций. М.: Наука, 1971. 287 с.
11. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.
12. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
31.III.1982