Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 4, 1984

УДК 531.36

О ДИНАМИКЕ СИСТЕМ С ОДНОСТОРОННИМИ СВЯЗЯМИ

Иванов А. П., Маркеев А. П.

Показана возможность распространения канонического формализма на системы с идеальными односторонними связями. В качестве примера рассмотрена задача о движении тяжелой материальной точки в вертикальной плоскости не ниже некоторой гладкой кривой.

1. Рассмотрим механическую систему M с функцией Лагранжа вида

$$L = T - \Pi,\ T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}(q_0, \mathbf{q})\, q_i^{\cdot} q_j^{\cdot} \tag{1.1}$$

$$\Pi = \Pi(q_0, \mathbf{q}, t),\ \mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$$

и идеальной односторонней связью $q_0 \geqslant 0$. В промежутках между ударами о связь движение системы описывается уравнениями [1]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_0^{\cdot}} - \frac{\partial L}{\partial q_0} = F_0,\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_k^{\cdot}} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{1.2}$$

где F_0 выражает реакцию напряженной связи, $F_0 = 0$ при $q_0 \neq 0$.

Исследование систем с односторонними связями до недавнего времени сводилось к рассмотрению системы (1.2) на конечных промежутках времени между ударами и «припасовыванию» граничных условий на концах этих промежутков (см., например, [2]). В работе [3] получены уравнения движения системы M на произвольном временно́м интервале и рассмотрены возможности применения этих уравнений, имеющих форму Рауса, для решения некоторых задач механики.

Цель данной работы состоит в распространении на системы с идеальными односторонними связями канонического формализма, что позволит применять для их исследования развитые методы гамильтоновой механики.

Сделаем в системе M замену обобщенных координат по формулам

$$q_0 = Q_0,\quad q_k = \varphi_k(Q_0, \mathbf{Q}),\quad J = \det\left\|\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{Q}}\right\| \neq 0 \tag{1.3}$$

$$\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n),\ \mathbf{Q} = (Q_1, \ldots, Q_n)$$

где функции φ_k выберем так, чтобы в выражении кинетической энергии в новых координатах

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=0}^{n} A_{ij}(Q_0, \mathbf{Q})\, Q_i^{\cdot} Q_j^{\cdot}$$

выполнялись соотношения $A_{0m} \equiv 0$ $(m = 1, \ldots, n)$.

Поскольку

$$q_k^{\cdot} = \sum_{m=0}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial Q_m} Q_m^{\cdot}$$

то эти соотношения могут быть записаны в виде равенств

$$0 = A_{0m} = \frac{\partial^2 T}{\partial Q_0^{\cdot} \partial Q_m^{\cdot}} = \frac{\partial}{\partial Q_0^{\cdot}} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial q_j^{\cdot}} \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial Q_m} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(a_{0j} + \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial \varphi_i}{\partial Q_0} \right) \frac{\partial \varphi_j}{\partial Q_m}$$

представляющих собой однородную систему линейных уравнений относительно

$$x_j = a_{0j} + \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial \varphi_i}{\partial Q_0} \quad (j = 1, \ldots, n)$$

определитель которой в силу (1.3) отличен от нуля. Следовательно, $x_j = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$, т. е.

$$(1.4) \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (Q_0, \varphi) \frac{\partial \varphi_i}{\partial Q_0} = -a_{0j} (Q_0, \varphi) \quad (j = 1, \ldots, n)$$

Определитель линейной относительно $\partial \varphi_i / \partial Q_0$ системы (1.4) является главным минором матрицы кинетической энергии T, поэтому он отличен от нуля, и система (1.4) разрешима относительно производных $\partial \varphi_i / \partial Q_0$. Полагая

$$(1.5) \qquad \varphi_i \mid_{Q_0=0} = Q_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

поставим для функций φ_i задачу Коши (1.4), (1.5), в которой Q_0 играет роль независимой переменной, а Q_i — начальных условий. Поскольку якобиан J при $Q_0 = 0$ в силу (1.5) равен единице, то условие обратимости замены (1.3) выполняется, по крайней мере, для достаточно малых значений Q_0.

Будем далее считать, что замена (1.3) в системе (1.1) уже проведена и $a_{0m} \equiv 0$ $(m = 1, \ldots, n)$. Тогда первое из уравнений (1.2) при $q_0 = q_0^{\cdot} = 0$ имеет вид

$$(1.6) \qquad a_{00} q_0^{\cdot\cdot} - \left. \frac{\partial L}{\partial q_0} \right|_{q_0=+0} = F_0$$

Поскольку $a_{00} > 0$, то, следуя [1], получим, что

$$(1.7) \qquad F_0 = \max \left\{ 0, - \left. \frac{\partial L}{\partial q_0} \right|_{q_0=+0} \right\}$$

Определим вспомогательную систему M^* при помощи функции Лагранжа $L(q_0, \mathbf{q}, q_0^{\cdot}, \mathbf{q}^{\cdot}, t) = L(| q_0 |, \mathbf{q}, q_0^{\cdot}, \mathbf{q}^{\cdot}, t)$ и обобщенной силы (1.7).

Для траекторий $\mathbf{Q}(t) = (q_0(t), \mathbf{q}(t))$ и $\mathbf{Q}^*(t) = (q_0(t), \mathbf{q}^*(t))$ систем M и M^* выполняются следующие соотношения:

$$(1.8) \qquad q_0(t) = | q_0^*(t) |, \quad \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}^*(t)$$

Действительно, при $q_0^* \geqslant 0$ имеем $L^* = L$, и траектории $\mathbf{Q}(t)$ и $\mathbf{Q}^*(t)$ совпадают. Ввиду того что $\partial L^* / \partial q_0^{\cdot}$, $\partial L^* / \partial \mathbf{q}$ и $\partial L^* / \partial \mathbf{q}^{\cdot}$ — четные, а $\partial L^* / \partial q_0$ — нечетная относительно q_0 функции, уравнения движения системы M^* при $q_0^* < 0$ переходят в уравнения (1.2) посредством замены $q_0^* \to -q_0$ и соотношения (1.8) также выполняются.

На кривой $\mathbf{Q}(t)$ величины $\partial T / \partial \mathbf{q}^{\cdot}$ при ударе остаются непрерывными [4]; в силу идеальности связи кинетическая энергия T также непрерывна. Следовательно, ввиду того, что $a_{0m} \equiv 0$, непрерывна и величина $| q_0^{\cdot}(t) |$. В свою очередь, кривая $\mathbf{Q}^*(t)$ — экстремаль функционала действия

$$\int_{t_1}^{t_2} L^* (\mathbf{Q}^*(t), \mathbf{Q}^{*\cdot}(t), t) \, dt$$

поэтому в точках этой кривой $q_0^{*\cdot}(t)$, $\mathbf{q}^{*\cdot}(t)$ непрерывны. Следовательно, после удара касательные векторы траекторий $\mathbf{Q}(t)$ и $\mathbf{Q}^*(t)$ симметричны относительно плоскости $q_0 = 0$ и соотношения (1.8) сохраняют свою силу, что доказывает их справедливость во все время движения.

Полагая

$$p_j = \frac{\partial L^*}{\partial q_j^\cdot}\ (j = 0, 1, \ldots, n), \qquad H = \sum_{j=0}^{n} p_j q_j^\cdot - L^*$$

запишем уравнения движения системы M^* в канонической форме

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n) \tag{1.9}$$

где в соответствии с (1.6), (1.7) надо положить

$$\left.\frac{\partial H}{\partial q_0}\right|_{q_0=0} = \min\left\{0, \left.\frac{\partial H}{\partial q_0}\right|_{q_0=+0}\right\} \tag{1.10}$$

Каноническая система (1.9), (1.10) однозначно определяет движение системы (1.1) на произвольном интервале времени; в частности, движение при напряженной связи происходит при условии

$$dH/dq_0\,|_{q_0=+0} \geqslant 0$$

2. В качестве примера рассмотрим задачу о движении материальной точки в вертикальной плоскости не ниже гладкой кривой $y = f(x)$. Единицы измерения выберем таким образом, чтобы масса и вес точки равнялись единице. За обобщенные координаты примем $q_0 = y - f(x)$, $q_1 = x$. Функция Лагранжа имеет вид

$$L = {}^1/_2(x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2}) - y = {}^1/_2\{q_1^{\cdot 2} + [f'(q_1)q_1^\cdot + q_0^\cdot]^2\} - \\ - f(q_1) - q_0, \qquad q_0 \geqslant 0 \tag{2.1}$$

Проведем редуцирующую замену (1.3): $q_0 = Q_0$, $q_1 = \varphi(Q_0, Q_1)$, где φ — решение задачи Коши

$$\frac{\partial \varphi}{\partial Q_0} = -G(\varphi), \qquad \varphi|_{Q_0=0} = Q_1, \qquad G = \frac{f'}{1+f'^2} \tag{2.2}$$

В новых переменных лагранжиан (2.1) примет вид

$$L = \frac{E(\varphi)}{2} Q_0^{\cdot 2} + \frac{\varphi_1^2}{2E(\varphi)} Q_1^{\cdot 2} - f(\varphi) - Q_0, \qquad E = \frac{1}{1+f'^2}$$
$$\varphi_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial Q_1}$$

Уравнения движения вспомогательной системы M^* имеют каноническую форму (1.9), (1.10) с функцией Гамильтона вида

$$H = \frac{1}{2E(\psi)} P_0^2 + \frac{E(\psi)}{2\psi_1^2} P_1^2 + f(\psi) + |Q_0| \\ \psi = \varphi(|Q_0|, Q_1), \qquad \psi_1 = \frac{\partial \psi}{\partial Q_1} \tag{2.3}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи движения.

1) При $Q_0 = P_0 = 0$ происходит движение точки по кривой. При этом $\varphi = \psi = Q_1$, $\varphi_1 = \psi_1 = 1$ и гамильтониан (2.3) имеет вид

$$H|_{Q_0=P_0=0} = {}^1/_2 E(Q_1) P_1^2 + f(Q_1)$$

Условие движения точки по кривой выглядит так:

$$\partial H/\partial Q_0\,|_{Q_0=+0} = E\,[1 + E^2 P_1^2 f''(Q_1)] = E^{1/2}(\cos\alpha + \varkappa v^2) \geqslant 0$$

где $\varkappa$ и α — кривизна кривой и угол ее наклона к оси абсцисс, v — величина скорости точки.

2) Если $f'(x_0) = 0$, то система допускает движения, для которых точка периодически подскакивает над кривой, а ее абсцисса постоянна и равна x_0. Соответствующие частные решения системы (1.9), (1.10) с гамильтонианом (2.3) имеют при $-\tau/2 \leqslant t \leqslant \tau/2$ вид

$$(2.4) \qquad Q_0 = {}^1/_2 t\,[2\,(2h)^{1/2} - |t|], \; P_0 = (2h)^{1/2} - |t|, \; Q_1 = x_0, \; P_1 = 0$$

где h — высота подскока, $\tau = 4\,(2h)^{1/2}$ — период рассматриваемого движения (т. е. промежуток времени между k-м и $k+2$-м соударениями, $k = 1, 2, \ldots$).

Исследуем орбитальную устойчивость этих периодических движений, т. е. устойчивость по отношению к возмущениям орбитального параметра h и переменных Q_1, P_1. Для этого перейдем от переменных Q_0, P_0 к переменным «действие — угол» I, w по формулам

$$(2.5) \qquad Q_0 = 2\left(\frac{3}{2\pi^2} I\right)^{2/3} w\,(\pi - |w|), \qquad P_0 = 2\left(\frac{3}{2\pi^2} I\right)^{1/3} \left(\frac{\pi}{2} - |w|\right)$$

при $-\pi \leqslant w \leqslant \pi$; замена 2π-периодична по w.

Решения (2.4) принимают вид

$$I = I_0, \qquad w = \frac{\pi}{2}\left(\frac{3\pi}{2} I_0\right)^{-1/3} t + w_0, \qquad Q_1 = x_0, \qquad P_1 = 0$$

Возмущенное движение опишем посредством переменных r, ξ, η, определяемых соотношениями

$$r = I - I_0, \; \xi = Q_1 - x_0, \; \eta = P_1$$

В силу (2.5) переменные $|Q_0|$ и P_0 при $I_0 \neq 0$ аналитичны по r, поэтому функция Гамильтона (2.3) будет гладкой функцией возмущений; наличие в уравнениях величины $|Q_0|$ приводит лишь к недифференцируемости гамильтониана по угловой переменной w.

Заметим, что указанная гладкость в правых частях уравнений возмущенного движения достигнута благодаря введению переменных «действие — угол» и обусловлена, таким образом, канонической формой уравнений движения. Для уравнений Рауса, положенных в основу метода работы [3], такой гладкости относительно возмущения орбитального параметра нет.

Регулярный характер гамильтониана возмущенного движения позволяет провести исследование устойчивости периодического решения по известным алгоритмам [5, 6].

В результате такого исследования оказалось, что область устойчивости в линейном приближении имеет вид $0 < k < {}^1/_2$, где величина $k = {}^1/_2 f''(x_0)({}^3/_2 \pi I_0)^{2/3}$ представляет собой отношение высоты подскока в периодическом решении к радиусу кривизны кривой $y = f(x)$ в точке x_0.

При $k = {}^3/_8$ характеристические показатели λ_1 и λ_2 линеаризованной системы уравнений возмущенного движения связаны резонансным соотношением третьего порядка $\lambda_1 = 3\lambda_2$. Проведенные расчеты показывают, что если при этом $f'''(x_0) \neq 0$, то исследуемое периодическое движение неустойчиво.

Для остальных значений k из интервала $(0, {}^1/_2)$ решение вопроса об устойчивости зависит от параметров

$$\varkappa_1 = \frac{f'''(x_0)}{[f''(x_0)]^2}, \qquad \varkappa_2 = \frac{f^{\mathrm{IV}}(x_0)}{[f''(x_0)]^3}$$

При $k \neq 1/4$ (нет резонанса четвертого порядка $\lambda_1 = 4\lambda_2$) в общем случае невырожденности нормальной формы имеет место орбитальная устойчивость рассматриваемых периодических решений.

В частности, вычисления, проделанные для параболы ($\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$) и синусоиды ($\varkappa_1 = 0$, $\varkappa_2 = -1$), показывают, что для этих кривых решения (2.4) устойчивы при всех значениях k из интервала $(0, 1/2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Суслов Г. К.* Теоретическая механика. М.— Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.
2. *Кобринский А. А., Кобринский А. Е.* Двумерные виброударные системы. Динамика и устойчивость. М.: Наука, 1981. 335 с.
3. *Журавлев В. Ф.* Уравнения движения механических систем с идеальными односторонними связями.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 5, с. 781—788.
4. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1960. 487 с.
5. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 167 с.
6. *Маркеев А. П.* К задаче об устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем.— ПММ, 1970, т. 34, вып. 6, с. 997—1004.

Москва

Поступила в редакцию
22.VI.1983