УДК 531.36 + 62—50

К ТЕОРИИ ДВОЙСТВЕННОСТИ В СИСТЕМАХ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Мордухович Б. Ш.

Рассматриваются некоторые вопросы управления и наблюдения [1—3] для линейных динамических систем с последействием, которые описываются дифференциальными и интегральными уравнениями с отклоняющимся аргументом. Развивается теория двойственности для задачи минимизации выпуклого функционала Больца на траекториях функционально-дифференциальной системы нейтрального типа при наличии запаздывания в переменных управления, состояния и скорости. Вводятся новые понятия управляемости рассматриваемой системы с последействием при наличии фазовых ограничений и двойственные им понятия идеальной наблюдаемости сопряженной системы интегральных уравнений с опережением в условиях неполной информации. При этом введенные понятия наблюдаемости связаны с восстановлением обобщенного конечного состояния системы, содержащего минимальную информацию для однозначного вычисления движения в будущем. Полученные конструкции и результаты допускают использование в дифференциально-игровых задачах динамики систем с последействием [4—6].

1. Задача оптимального управления. Рассмотрим линейную систему управления, динамика которой на отрезке $[t_0, t_1]$ описывается дифференциальными уравнениями с отклоняющимся аргументом нейтрального типа

$$\begin{aligned}x^{\cdot}(t) = A(t)\cdot x(t) + A_1(t)\, x(t-h) + A_2(t)\, x^{\cdot}(t-h) + \\ + B(t)\, u(t) + B_1(t)\, u(t-h)\end{aligned} \tag{1.1}$$

где $h > 0$ — запаздывание в переменных управления, состояния и скорости.

Системы с последействием типа (1.1) возникают в задачах механики, автоматического регулирования, экономики и др. (см. многочисленные примеры в [7]). Учет эффекта последействия оказывается принципиально важным для описания реальных динамических систем и связанных с ними процессов управления и наблюдения.

Будем рассматривать задачу минимизации функционала Больца

$$I(x, u) = \Phi(x(t_0), x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} F(x(t), u(t), t)\, dt \to \inf \tag{1.2}$$

на множестве абсолютно непрерывных траекторий x: $[t_0, t_1] \to R^n$ и суммируемых управлений u: $[t_0, t_1] \to R^m$, удовлетворяющих системе (1.1) с начальными условиями и ограничениями

$$x(t) = \varphi(t), \quad t_0 - h \leqslant t < t_0; \quad u(t) = \varphi_1(t), \quad t_0 - h \leqslant t < t_0 \tag{1.3}$$

$$(x(t_0),\; x(t_1)) \in D \subset R^{2n}; \quad u(t) \in U(t) \subset R^m, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \tag{1.4}$$

В дальнейшем предполагаем выполненными следующие условия на параметры задачи (1.1)—(1.4):

а) функция Φ: $R^{2n} \to (-\infty, \infty]$ выпукла и полунепрерывна снизу, причем

$$\operatorname{dom} \Phi \overset{\text{def}}{=} \{(x_0, x_1) \in R^{2n}\colon\ \Phi(x_0, x_1) < \infty\} = D$$

б) функция $F(x, u, t)$ выпукла по (x, u), измерима и существенно ограничена по t, причем $\operatorname{dom} F(\cdot, \cdot, t) = R^n \times R^m$ для почти всех $t \in [t_0, t_1]$;

в) многозначное отображение U: $[t_0, t_1] \to 2^{R^m}$ измеримо [3, 8] и принимает выпуклые, замкнутые значения, причем функция $d(t) = \inf \{|u|: u \in U(t)\}$ существенно ограничена на $[t_0, t_1]$;

г) компоненты $(n \times n)$-матриц $A(t)$, $A_1(t)$ суммируемы, а компоненты $(n \times n)$-матрицы $A_2(t)$ и $(n \times m)$-матриц $B(t)$, $B_1(t)$ измеримы и существенно ограничены на $[t_0, t_1]$;

д) вектор-функция φ: $[t_0 - h, t_0] \to R^n$ абсолютно непрерывна, вектор-функция φ_1: $[t_0 - h, t_0] \to R^m$ суммируема;

е) выполняется следующее условие регулярности типа Слейтера: существует допустимый в (1.1)—(1.4) процесс $\{x(t), u(t)\}$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, удовлетворяющий включениям

$$(x(t_0), x(t_1)) \in \operatorname{ri} D; \quad u(t) \in \operatorname{ri} U(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \tag{1.5}$$

где $\operatorname{ri} X$ означает относительную внутренность множества X [9]. Если множество

$$\operatorname{epi} \Phi \overset{\text{def}}{=} \{(x_0, x_1, \mu) \in R^{2n+1}: \mu \geqslant \Phi(x_0, x_1), \ (x_0, x_1) \in D\}$$

полиэдрально [9], то первое включение в (1.5) может быть ослаблено до $(x(t_0), x(t_1)) \in D$. Отметим, что условие е) заведомо выполняется, если на правый конец $x(t_1)$ не наложено ограничений.

Всюду в дальнейшем штрих означает транспонирование, $|\cdot|$ — норма в конечномерном пространстве, $\delta(\cdot \mid X)$ — индикаторная функция множества X [9].

2. Двойственная задача и условия оптимальности. Рассмотрим сопряженные [9] функции

$$\Phi^*(\psi_0, \psi_1) = \sup \{x_0'\psi_0 + x_1'\psi_1 - \Phi(x_0, x_1): (x_0, x_1) \in R^{2n}\}$$
$$F^*(w, y, t) = \sup \{u'y + x'w - F(x, u, t): u \in U(t), \ x \in R^n\}$$

и построим двойственную к (1.1)—(1.4) задачу минимизации функционала

$$\begin{aligned} J(\psi, w) = \int_{t_0}^{t_0+h} \psi'(t)[A_1(t)\varphi(t-h) + A_2(t)\varphi^{\cdot}(t-h) + \\ + B_1(t)\varphi_1(t-h)]\,dt + \int_{t_0}^{t_1} F_0^*(w(t), B'(t)\psi(t) + \\ + B_1'(t+h)\psi(t+h), t)\,dt + \Phi^*(\psi(t_0) - A_2'(t_0+h)\psi(t_0+h), \\ -\psi(t_1)) \to \inf \end{aligned} \tag{2.1}$$

на множестве суммируемых управлений w: $[t_0, t_1] \to R^n$ и существенно ограниченных траекторий ψ: $[t_0, t_1] \to R^n$ интегральной системы с опережением

$$\begin{aligned} \psi(t) = \psi(t_1) + \int_t^{t_1} [A'(\tau)\psi(\tau) + A_1'(\tau+h)\psi(t+h) - w(\tau)]\,dt + \\ + A_2'(t+h)\psi(t+h), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1; \quad \psi(t) \equiv 0, \quad t_1 < t \leqslant t_1 + h \end{aligned} \tag{2.2}$$

Отметим, что в силу (2.2) функция $\psi(t) - A_2'(t+h)\psi(t+h)$ абсолютно непрерывна на $[t_0, t_1]$, а условие конечности функционала (2.1) приводит к ограничениям, выраженным через эффективные множества [9] сопряженных функций Φ^*, F_0^*

(2.3) $\quad (\psi(t_0) - A_2'(t_0 + h)\psi(t_0 + h), \quad -\psi(t_1)) \in \operatorname{dom}\Phi^*$

(2.4) $\quad w(t) \in \operatorname{dom} F_0^*(\cdot, B'(t)\psi(t) + B_1'(t+h)\psi(t+h), t),$
$t_0 \leqslant t \leqslant t_1$

Система (2.2) представляет собой совокупность интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода с опережающим аргументом. Если матрица $A_2(t)$ абсолютно непрерывна на $[t_0, t_1]$, то в силу (2.2) получаем, что траектория $\psi(t)$ кусочно-непрерывна на $[t_0, t_1]$, причем точки разрыва имеют вид $\tau_i = t_1 - ih$, $i = 1, 2, \ldots$, и $\psi(t)$ является абсолютно непрерывной на каждом промежутке непрерывности. Продифференцировав (2.2), приходим в этом случае к эквивалентной системе функционально-дифференциальных уравнений с опережением нейтрального типа

(2.5) $$\dot\psi(t) = -A'(t)\psi(t) - A_1'(t+h)\psi(t+h) + d/dt\,[A_2'(t + h)\psi(t+h)] + w(t)$$
$$t_0 \leqslant t \leqslant t_1; \quad \psi(t) \equiv 0, \quad t_1 < t \leqslant t_1 + h$$

с условиями скачков траектории

(2.6) $$\psi(\tau_i - 0) - \psi(\tau_i + 0) = A_2'(\tau_i + h)[\psi(\tau_i + h - 0) - \psi(\tau_i + h + 0)] + \Big[\prod_{k=1}^{i} A_2'(t_1 + (k-i)h]\psi(t_1), \quad \tau_i = t_1 - ih, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Из (2.6) следует отсутствие скачков траектории $\psi(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, если $A_2(t_1) = 0$ либо граничное условие (2.3) влечет $\psi(t_1) = 0$.

Отметим, что множество управления в (2.4) не будет зависеть от переменных состояния системы (2.2), т. е. в задаче (2.1) — (2.4) нет фазовых ограничений, если $F(x, u, t) = F_1(x, t) + F_2(u, t)$ и функция $F_2(u, t) + \delta(u|U(t))$ кофинитна по u [9] при почти всех $t \in [t_0, t_1]$. Это имеет место, если данная функция удовлетворяет условию роста типа Нагумо — Тонелли при $|u| \to \infty$ [8], в частности, множество $U(t)$ равномерно ограничено либо $F_2(\cdot, t)$ растет на бесконечности быстрее, чем $|u|$.

Следующий результат устанавливает соотношение двойственности между экстремальными значениями функционалов в задачах (1.1) — (1.4), (2.1) — (2.4) и связанные с ним необходимые и достаточные условия оптимальности. В приведенных ниже соотношениях через $\partial\Phi(x_0, x_1)$ обозначен субдифференциал в смысле выпуклого анализа [9] функции $\Phi(\cdot, \cdot)$ в точке (x_0, x_1), $\partial_x F(x, u, t)$ — субдифференциал функции F по первому аргументу. Отметим, что субдифференциальные многозначные отображения принимают выпуклые, замкнутые значения и сводятся к обычным производным в случае гладких выпуклых функций.

Теорема 2.1. При выполнении предположений а) — е) в задаче (2.1) — (2.4) существует решение и справедливо экстремальное соотношение двойственности

(2.7) $$\inf I(x, u) = -\min J(\psi, w) < \infty$$

где inf и min берутся по всем допустимым процессам в задачах (1.1) — (1.4) и (2.1) — (2.4) соответственно. Для оптимальности процесса $\{x^\circ(t), u^\circ(t)\}$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, в задаче (1.1) — (1.4) необходимо, а при $F(x, u, t) = F_1(x, t) + F_2(u, t)$ и достаточно выполнение для почти всех $t \in [t_0, t_1]$ следующих условий

(2.8) $$[(\psi^\circ(t))' B(t) + (\psi^\circ(t+h))' B_1(t+h)]\,u^\circ(t) - F(x^\circ(t), u^\circ(t), t) = \sup\{[(\psi^\circ(t))' B(t) + (\psi^\circ(t+h))' B_1(t+h)]\,u - F(x^\circ(t), u, t) \colon u \in U(t)\}$$

$$(2.9)\qquad w^\circ(t) \in \partial_x F(x^\circ(t), u^\circ(t), t)$$

$$(2.10)\qquad (\psi^\circ(t_0) - A_2'(t_0+h)\psi^\circ(t_0+h), -\psi^\circ(t_1)) \in \partial\Phi(x^\circ(t_0), x^\circ(t_1))$$

где $\{\psi^\circ(t), w^\circ(t)\}$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$,— оптимальный процесс в двойственной задаче (2.1) — (2.4).

Доказательство. В соответствии со схемой [1] сведем исходную задачу оптимального управления (1.1) — (1.4) для системы с последействием к задаче минимизации выпуклого функционала Больца на траекториях линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть N — натуральное число, такое, что

$$(N-1)h < t_1 - t_0 \leqslant Nh$$

Рассмотрим на отрезке $[0, h]$ вектор-функции $p(t)$, $\nu(t)$ размерности Nn и Nm соответственно

$$(2.11)\qquad \begin{gathered} p(t) = (p_1(t), \ldots, p_N(t)),\quad p_i(t) = x(t_0 + t + (i-1)h) \\ \nu(t) = (\nu_1(t), \ldots, \nu_N(t)),\quad \nu_i(t) = u(t_0 + t + (i-1)h), \\ i = 1, \ldots, N \end{gathered}$$

Можно проверить, что система (1.1) эквивалентна следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций (2.11):

$$(2.12)\qquad p^\cdot(t) = M^{-1}(t)K(t)p(t) + M^{-1}(t)L(t)\nu(t) + M^{-1}(t)g(t),\quad 0 \leqslant t \leqslant h$$

$$K(t) = (K_{ij}(t)),\quad L(t) = (L_{ij}(t)),\quad M(t) = (M_{ij}(t)),\quad 1 \leqslant i,\ j \leqslant N$$

$$K_{ij}(t) = \begin{cases} A(t_0 + t + (i-1)h), & j = i,\quad i = 1, \ldots, N \\ A_1(t_0 + t + (i-1)h), & j = i-1,\quad i = 2, \ldots, N \\ 0 & \text{для всех других } i, j \end{cases}$$

$$L_{ij}(t) = \begin{cases} B(t_0 + t + (i-1)h), & j = i,\quad i = 1, \ldots, N \\ B_1(t_0 + t + (i-1)h), & j = i-1,\quad i = 2, \ldots, N \\ 0 & \text{для всех других } i, j \end{cases}$$

$$M_{ij}(t) = \begin{cases} E_n, & j = i,\quad i = 1, \ldots, N \\ -A_2(t_0 + t + (i-1)h), & j = i-1,\quad i = 2, \ldots, N \\ 0 & \text{для всех других } i, j \end{cases}$$

$g(t) = (f(t), 0, \ldots, 0)$, $f(t) = A_1(t_0+t)\varphi(t_0+t-h) + B_1(t_0+t)\varphi_1(t_0+t-h) + A_2(t_0+t)\varphi^\cdot(t_0+t-h)$ (E_n — единичная матрица размером $n \times n$).

Функционал Больца (1.2) и ограничения (1.4) записываются при этом в виде

$$(2.13)\qquad \Phi(p_1(0), p_N(h)) + \int_0^h \sum_{i=1}^N F(p_i(t), \nu_i(t), t_0 + t + (i-1)h)\,dt \to \inf$$

$$(2.14)\qquad \begin{gathered} (p_1(0), p_N(h)) \in D,\quad p_i(h) = p_{i+1}(0),\quad i = 1, \ldots, N-1 \\ \nu(t) \in U(t_0+t) \times U(t_0+t+h) \times \ldots \times U(t_0+t+(N-1)h),\quad 0 \leqslant t \leqslant h \end{gathered}$$

К полученной задаче оптимального управления (2.12) — (2.14) применяются результаты [10], которые в свою очередь основаны на редукции к обобщенной вариационной задаче Больца [8] и использовании теории двойственности для задачи выпуклого программирования в функциональ-

[1] *Мордухович Б. Ш., Сасонкин А. М.* Двойственность в задачах оптимального управления системами нейтрального типа с приложением к управляемости и наблюдаемости, I. Минск.— Деп. в ВИНИТИ, 1980, № 5266—80. 39 с.

ном пространстве. Воспользовавшись спецификой задачи (2.12) — (2.14) и переходя от сопряженной к (2.12), (1.1) гибридной системы с опережением к интегральному виду (2.2), получаем двойственную задачу оптимизации в форме (2.1) — (2.4) и экстремальное соотношение двойственности (2.7), из которого по обычной для выпуклых задач схеме выводятся необходимые и достаточные условия оптимальности (2.8) — (2.10). Теорема доказана.

Замечания. 2.1. Достаточность соотношений (2.8)—(2.10) для оптимальности процесса $\{x^\circ(t), u^\circ(t)\}$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, в задаче (1.1)—(1.4) имеет место и без условия регулярности е).

2.2. Условия оптимальности (2.8)—(2.10) представляют собой аналог теоремы Куна — Таккера из выпуклого программирования [9] для рассматриваемого класса линейно-выпуклых задач оптимизации систем с последействием. В случае гладких функций F, Φ они приводят к усиленному варианту принципа максимума Понтрягина [11] (в нормальной форме), в котором сопряженная траектория является решением двойственной задачи оптимизации. Впервые результаты такого типа были установлены Н. Н. Красовским [1] для специального класса линейно-выпуклых задач оптимального управления и в дальнейшем развивались в работах [1—4, 8, 10, 12] и др. для задач управления обыкновенными динамическими системами и системами с запаздыванием.

2.3. По аналогии с результатами [8] для обыкновенных систем полученные условия оптимальности можно сформулировать в эквивалентных (2.8)—(2.10) лагранжевой и гамильтоновой формах, а также в виде теоремы о седловой точке [1, 3, 4] с использованием формализма теории игр. Отметим, что для специального класса функций F, Φ двойственная задача (2.1)—(2.4) допускает интерпретацию в виде задачи оптимального наблюдения по типу конструкций [1, 3, 13, 14].

3. Управляемость и наблюдаемость. С использованием теории двойственности выпуклых экстремальных задач и установленных выше результатов рассмотрим некоторые понятия управляемости и наблюдаемости линейных систем с последействием типа (1.1) и (2.2). Будем рассматривать систему управления (1.1) на отрезке $[t_0, t_1]$ с начальными условиями

$$x(t) = \varphi(t), \quad u(t) \equiv 0, \quad t_0 - h \leqslant t \leqslant t_0 \tag{3.1}$$

где φ: $[t_0 - h, t_0] \to R^n$ — абсолютно непрерывная вектор — функция. В качестве допустимых в (1.1) управлений полагаем вектор—функции $u(\cdot) \in L_\infty([t_0, t_1], R^m)$ и считаем, что параметры системы (1.1) удовлетворяют условию г).

Пусть $C(t)$ — $(k \times n)$-матрица, $D(t)$ — $(k \times m)$-матрица с измеримыми и существенно ограниченными на $[t_0, t_1]$ компонентами. Введем ограничения

$$\alpha_{x,u}(t) \overset{\text{def}}{=} C(t)\,x(t) + D(t)\,u(t) \equiv 0, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \tag{3.2}$$

на допустимые процессы системы (1.1), (3.1), относящиеся к ограничениям смешанного типа на фазовые координаты и управление.

Обозначим через $x_t(\cdot)$ набор $\{x(t);\ x(t+\theta),\ -h \leqslant \theta < 0\}$, который будем называть состоянием системы (1.1) в момент времени t. Пусть Ω — произвольное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_\Omega$, содержащее конечное состояние $x_{t_1}(\cdot)$ системы (1.1); P — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_P$, которое содержит функции $\alpha_{x,u}(\cdot)$ вида (3.2), порожденные допустимыми в (1.1) процессами $\{x(t), u(t)\}$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Определение 3.1. Система (1.1), (3.1) называется Ω-аппроксимативно нуль-управляемой на отрезке $[t_0, t_1]$ при P-аппроксимации ограничений (3.2), если для каждого начального состояния $x_{t_0}(\cdot)$ по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое управление $u(\cdot) \in L_\infty([t_0, t_1], R^m)$ и соответствующая ему в силу (1.1), (3.1) траектория $x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, что

$$\| x_{t_1}(\cdot) \|_\Omega + \| \alpha_{x,u}(\cdot) \|_P \leqslant \varepsilon$$

Замечания. 3.1. Если $\| x_{t_1}(\cdot) \|_\Omega = | x(t_1) |$ и ограничения (3.2) отсутствуют, то введенная аппроксимативная нуль-управляемость системы (1.1), (3.1) совпадает с точной управляемостью в нуль при $t = t_1$, однако в общем бесконечномерном случае понятия аппроксимативной и точной (или полной в смысле [15]) нуль-управляемости неэквивалентны для рассматриваемого класса допустимых управлений.

3.2. Вектор-функцию $\alpha_{x,u}(t)$ в (3.2) можно рассматривать в качестве выхода [3, 10] системы (1.1) и интерпретировать введенное понятие управляемости как аппроксимативную нуль-управляемость системы (1.1), (3.1) по выходу (3.2).

Рассмотрим далее сопряженную к (1.1), (3.1) систему наблюдения

$$\psi(t) = \psi(t_1) + \int_t^{t_1} [A'(\tau)\psi(\tau) + A_1'(\tau+h)\psi(\tau+h)]\,d\tau + \tag{3.3}$$

$$+ A_2'(t+h)\psi(t+h) + \int_t^{t_1} [\gamma(\tau) - C'(\tau)v(\tau)]\,d\tau, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1$$

$$\psi(t) \equiv 0, \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + h; \quad \gamma(t) \equiv 0, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1 - h$$

$$z(t) = B'(t)\psi(t) + B_1'(t+h)\psi(t+h) - D'(t)v(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \tag{3.4}$$

в которой эффект последействия (опережения) проявляется в уравнениях объекта наблюдения (3.3) и измерительного устройства (3.4).

Отметим, что доступная измерению m-мерная выходная величина $z(t)$ зависит как от n-мерной траектории $\psi(t)$ системы (3.3), так и от порождающего ее k-мерного неопределенного возмущения $v(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Величина $\psi_{t_1}(\cdot) = \{\psi(t_1);\ \gamma(t),\ t_1 - h \leqslant t \leqslant t_1\}$ играет роль начального состояния системы с опережением (3.3), которое для любых $\psi(t_1) \in R^n$, $\gamma(\cdot) \in L_1([t_1 - h, t_1], R^n)$ полностью определяет существенно ограниченную траекторию $\psi(t)$ на $[t_0, t_1]$ при известных возмущениях $v(\cdot) \in L_1([t_0, t_1], R^k)$.

Определение 3.2. Минимальным состоянием системы (3.3) в момент времени $t_* \leqslant t_1 - h$ называется величина

$$\psi_{t_*}^0(\cdot) = \Big\{\psi(t_*) - A_2'(t_*+h)\psi(t_*+h) + \int_{t_*}^{t_*+h} A_1'(\tau)\psi(\tau)\,d\tau; \tag{3.5}$$

$$\int_{t_*}^{t_*+\theta} A_1'(\tau)\psi(\tau)\,d\tau - A_2'(t_*+\theta)\psi(t_*+\theta), \quad 0 < \theta \leqslant h\Big\}$$

Основное свойство величины (3.5) состоит в том, что информация о $\psi_{t_*}^0(\cdot)$ как о предыстории системы (3.3) является минимальной (необходимой и достаточной) для однозначного вычисления траектории $\psi(t)$ на $(-\infty, t\,)$ при известных возмущениях $v(t)$, $t < t_*$, и условии, что матрицы $A(t)$, $A_1(t)$, $A_2(t)$ доопределены на $(-\infty, t_0)$ с сохранением своих свойств. Более точно имеет место следующее утверждение.

Предложение 3.1. Пусть матрицы $A(t)$, $A_1(t)$, $A_2(t)$ доопределены на $(-\infty, t_0)$ таким образом, что справедливо условие г) на каждом конечном промежутке. Тогда для любого $t_* \leqslant t_1 - h$ выполнение свойства $\psi_{t_*}^\circ(\cdot) = 0$ вдоль произвольной траектории системы (3.3) при $v(t) \equiv 0$, $t < t_*$, эквивалентно тому, что $\psi(t) \equiv 0$ при почти всех $t < t_*$.

Доказательство. Сопряженная система (3.3) при $v(t) \equiv 0$, $t < t_*$, допускает следующее представление:

(3.6) $$\psi(t) = \psi(t_*) - A_2'(t_* + h)\psi(t_* + h) - \int_{t_*}^{t} [A'(\tau)\psi(\tau) + A_1'(\tau + h)\psi(\tau + h)]\, d\tau + A_2'(t + h)\psi(t + h), \quad t < t_*$$

Путем замены переменных преобразуем (3.6) к виду неоднородного уравнения Вольтерра

(3.7) $$\psi(t) = -\int_{t_*}^{t} A'(\tau)\psi(\tau)\, d\tau + q(t)$$

$$q(t) \stackrel{\text{def}}{=} \psi(t_*) - A_2'(t_* + h)\psi(t_* + h) + \int_{t_*}^{t_*+h} A_1'(\tau)\psi(\tau)\, d\tau + A_2'(t + h)\psi(t + h) - \int_{t_*}^{t+h} A_1'(\tau)\psi(\tau)\, d\tau, \quad t < t_*$$

Из (3.7) следует, что если $\psi_{t_*}{}^{\circ}(\cdot) = 0$, то $q(t) \equiv 0$ и $\psi(t) \equiv 0$ последовательно на промежутках $[t_* - h, t_*)$, $[t_* - 2h, t_* - h)$ и т. д. Обратно, пусть $\psi(t) \equiv 0$, $t < t_*$. Тогда из (3.7) при $t \in [t_* - 2h, t_* - h)$ вытекает равенство нулю первой компоненты в (3.5), а при $t \in [t_* - h, t_*)$ — равенство нулю и второй компоненты для почти всех $0 < \theta \leqslant h$.

Если матрица $A_2(t)$ абсолютно непрерывна на $[t_0, t_1]$, то интегральная система (3.3) приводится к дифференциально-разностной форме

(3.8) $$\begin{gathered} \psi^{\cdot}(t) = -A'(t)\psi(t) - A_1'(t + h)\psi(t + h) + d/dt\,[A_2'(t + h)\psi(t + h)] + C'(t)v(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1 - h \\ \psi^{\cdot}(t) = -A'(t)\psi(t) - \gamma(t) + C'(t)v(t), \quad t_1 - h \leqslant t \leqslant t_1 \\ \psi(t_1) = \psi_1 \in R^n \end{gathered}$$

с условиями скачков (2.6).

Можно показать, что минимальное состояние (3.5) системы (3.8), (2.6) представляется в виде

$$\Big\{\psi(t_* - 0);\ A_2'(\tau_{t_*})[\psi(\tau_{t_*} - 0) - \psi(\tau_{t_*} + 0)];\ A_1'(t_* + \theta)\psi(t_* + \theta) - \frac{d}{dt}[A_2'(t_* + \theta)\psi(t_* + \theta)],\ 0 < \theta \leqslant h\Big\}$$

где τ_t — ближайшая справа к t точка разрыва вида $t_1 - ih$, $i = 1, 2, \ldots$.

Пусть $\Lambda \subset R^n \times L_1([t_1 - h, t_1], R^n)$ — банахово пространство начальных состояний $\psi_{t_1}(\cdot) = \{\psi(t_1);\ \gamma(t),\ t_1 - h \leqslant t \leqslant t_1\}$ системы (3.3), $Q \subset L_1([t_0, t_1], R^k)$ — пространство возмущений $v(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Определение 3.3. Система (3.3), (3.4) называется идеально Λ-наблюдаемой в момент времени t_0 при возмущениях из пространства Q, если из условия $z(t) \equiv 0$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, следует $\psi_{t_0}{}^{\circ}(\cdot) = 0$ при любых $\psi_{t_1}(\cdot) \in \Lambda$, $v(\cdot) \in Q$.

Замечания. 3.3. Если система (3.3) доопределена на $(-\infty, t_0)$ при $v(t) \equiv 0$, $t < t_0$, то в силу предложения 3.1 введенная наблюдаемость эквивалентна возможности восстановления по выходу $z(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, траектории $\psi(t)$ системы (3.3) для почти всех $t < t_0$ при любых $\psi_{t_1}(\cdot) \in \Lambda$, $v(\cdot) \in Q$.

3.4. Предлагаемое понятие идеальной наблюдаемости систем с последействием впервые введено [16] в случае системы с запаздыванием по состоянию для конкретного вида пространств Λ, Q (при отсутствии возмущений оно сводится к наблюдаемости на продолжении[2]). В случае системы обыкновенных дифференциальных уравнений при

[2] *Мордухович Б. Ш., Сасонкин А. М.* Двойственность в задачах оптимального управления системами нейтрального типа с приложением к управляемости и наблюдаемости, II. Минск. — Деп. в ВИНИТИ, 1980. № 5267—80, 34 с.

$D(t) \equiv 0$ введенное понятие эквивалентно идеальной наблюдаемости в смысле [17] (см. также [3] и приведенную там библиографию). Если при этом $\psi(t_1) = 0$, то рассматриваемая наблюдаемость близка по духу к понятию условной идеальной наблюдаемости, которое вводилось и использовалось в [3] при решении игровых задач динамики.

3.5. Если $\psi(t_1) = 0$ и матрица $A_2(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, непрерывна, то траектория $\psi(t)$ системы (3.3) непрерывна на $[t_0, t_1]$. Если при этом матрица $A_2(t)$ абсолютно непрерывна на $[t_0, t_1]$, то соответствующая наблюдаемость системы (3.8), (2.6) эквивалентна наблюдаемости системы (3.8) без условия скачков траектории (2.6), причем в качестве минимального состояния системы (3.8) можно рассматривать величину

$$\{\psi(t_*);\ A_1'(t_* + \theta)\psi(t_* + \theta) - d/dt\,[A_2'(t_* + \theta)\psi(t_* + \theta)],\ 0 < \theta \leqslant h\}$$

которая несет необходимую и достаточную информацию для однозначного вычисления абсолютно непрерывной траектории системы (3.8) на $(-\infty, t_*)$. Отметим, что подобные конструкции для систем с последействием типа (1.1) названы в [18] информатором решения в момент t_*.

4. Принцип дуальности. В теории управляемости и наблюдаемости обыкновенных линейных систем известен принцип двойственности (дуальности) Калмана [19] (см. также [1—3, 10, 20]), который устанавливает двойственное соответствие между понятиями управляемости исходной и наблюдаемости сопряженной динамических систем.

Различные соотношения двойственности между управляемостью и наблюдаемостью линейных систем с запаздыванием получены в [13, 14, 16, 18, 21]. Отметим, что в работах [10, 16, 20] двойственность между управляемостью и наблюдаемостью линейных систем выводится непосредственно из двойственного соответствия в теории выпуклых экстремальных задач, т. е. принцип дуальности Калмана вкладывается в общую теорию двойственности выпуклого анализа. При этом рассматриваемые задачи управляемости сводятся к соответствующим задачам минимизации функционала типа нормы на траекториях линейной системы управления со свободным правым концом. Ниже на таком пути устанавливаются соотношения двойственности между введенными понятиями управляемости и наблюдаемости рассматриваемых систем с последействием.

В дальнейшем полагаем, что $P = L_p([t_0, t_1], R^k)$, $1 \leqslant p < \infty$, а норма $\|\cdot\|_\Omega$ в пространстве пар $\{x_1;\ \beta(t),\ t_1 - h \leqslant t \leqslant t_1\}$ задается одним из следующих способов:

1) $\|(x_1, \beta(\cdot))\|_\Omega = \|x_1\|_{R^u} = |x_1|$

2) $\|(x_1, \beta(\cdot))\|_\Omega = \|\beta(\cdot)\|_{L_r}$; $L_r = L_r([t_1 - h, t_1], R^n)$, $1 \leqslant r < \infty$

3) $\|(x_1, \beta(\cdot))\|_\Omega = \|(x_1, \beta(\cdot)\|_{R^u \times L_r} = (|x_1|^r + \|\beta(\cdot)\|_{L_r}^r)^{1/r}$, $1 \leqslant r < \infty$

При этом $P^* = L_q([t_0, t_1], R^k)$, $1/q + 1/p = 1$, а сопряженное пространство Ω^* представляется в виде

1) $\Omega^* = \{(\psi_1, \gamma(\cdot)) : \psi_1 \in R^n;\ \gamma(t) \equiv 0,\ t_1 - h \leqslant t \leqslant t_1\}$

2) $\Omega^* = \{(\psi_1, \gamma(\cdot)) : \psi_1 = 0;\ \gamma(\cdot) \in L_s([t_1 - h, t_1], R^n),\ 1/s + 1/r = 1\}$

3) $\Omega^* = \{(\psi_1;\ \gamma(\cdot)) : \psi_1 \in R^n;\ \gamma(\cdot) \in L_s([t_1 - h, t_1], R^n),\ 1/s + 1/r = 1\}$

Отметим, что в случае 1) можно считать в определении наблюдаемости, что $\gamma(\cdot)$ — фиксированная функция из $L_1([t_1 - h, t_1], R^n)$, а в случае 2) считать, что ψ_1 — фиксированный вектор из R^n (при этом условие скачков (2.6) для системы (3.8) несущественно).

Теорема 4.1. При выполнении сделанных выше предположений справедлив следующий принцип дуальности: для Ω-аппроксимативной нуль-управляемости системы (1.1), (3.1) на отрезке $[t_0, t_1]$ при P-аппроксимации ограничений (3.2) необходимо и достаточно, чтобы сопряженная система (3.3), (3.4) была идеально Ω^*-наблюдаемой в момент времени t_0, при возмущениях из пространства P^*.

Доказательство. Для определенности рассмотрим случай 3) (в остальных случаях доказательство проводится аналогично по той же схеме). В соответствии с подходом [16, 20] сформируем задачу минимизации функционала

$$(4.1)\qquad I(x,u)=|x(t_1)|+\int_{t_1-h}^{t_1}|x(t)|^r\,dt+\int_{t_0}^{t_1}|C(t)x(t)+D(t)u(t)|^p\,dt\to\inf$$

на допустимых процессах системы (1.1), (3.1). Видно, что рассматриваемая управляемость эквивалентна тому, что $\inf I(x,u)=0$ в задаче (1.1), (3.1), (4.1) при любых абсолютно непрерывных функциях $\varphi(t)$ в (3.1). В силу экстремального соотношения двойственности (2.7) имеем

$$(4.2)\qquad \min J(\psi,w)=-\inf I(x,u)=0,\ \forall\varphi(\cdot)$$

где $\min J(\psi,w)$ берется в двойственной к (1.1), (3.1), (4.1) задаче (2.1)—(2.4), которую при $p=1$, $r=1$, $w=(v,\gamma)$ можно представить в виде задачи минимизации функционала

$$(4.3)\qquad J(\psi,v,\gamma)=\int_{t_0}^{t_0+h}\psi'(t)[A_1(t)\varphi(t-h)+A_2(t)\dot\varphi(t-h)]\,dt+\varphi'(t_0)[\psi(t_0)-A_2'(t_0+h)\psi(t_0+h)]\to\inf$$

на траекториях системы (3.3) при ограничениях

$$(4.4)\qquad B'(t)\psi(t)+B_1'(t+h)\psi(t+h)-D'(t)v(t)\equiv 0,\quad t_0\leqslant t\leqslant t_1$$

$$(4.5)\qquad |\psi(t_1)|\leqslant 1;\ |\gamma(t)|\leqslant 1,\ t_1-h\leqslant t\leqslant t_1;\ |v(t)|\leqslant 1,\ t_0\leqslant t\leqslant t_1$$

При $p>1$, $r>1$ в функционал (4.3) добавляется слагаемое

$$\frac{p}{q}\int_{t_0}^{t_1}|v(t)|^q\,dt+\frac{r}{s}\int_{t_1-h}^{t_1}|\gamma(t)|^s\,dt\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ \frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1\right)$$

а соответствующие ограничения в (4.5) заменяются на

$$(4.6)\qquad v(\cdot)\in L_q([t_0,t_1],R^k),\quad \gamma(\cdot)\in L_s([t_1-h,t_1],R^n)]$$

что не меняет сути дальнейших рассуждений.

Преобразуя функционал (4.3) с учетом абсолютной непрерывности $\psi(t)$, $t_0-h\leqslant t\leqslant t_0$, и формулы интегрирования по частям, имеем

$$J(\psi,v,\gamma)=\int_{t_0}^{t_0+h}(\dot\varphi(t-h))'\left[A_2'(t)\psi(t)-\int_{t_0}^{t}A_1'(\tau)\psi(\tau)\,d\tau\right]dt+\varphi'(t_0)\left[\psi(t_0)-A_2'(t_0+h)\psi(t_0+h)+\int_{t_0}^{t_0+h}A_1'(t)\psi(t)\,dt\right]$$

Отсюда получаем в силу (4.2) соотношения

$$A_2'(t)\psi(t)-\int_{t_0}^{t}A_1'(\tau)\psi(\tau)\,d\tau\equiv 0,\quad t_0\leqslant t\leqslant t_0+h$$

$$\psi(t_0)-A_2'(t_0+h)\psi(t_0+h)+\int_{t_0}^{t_0+h}A_1'(t)\psi(t)\,dt=0$$

для любых допустимых в (3.3), (4.4), (4.6) процессов $\{\psi(\cdot),v(\cdot),\gamma(\cdot)\}$.

Последнее и означает соответствующую случаю 3) наблюдаемость системы (3.3), (3.4). Теорема доказана.

Замечания. 4.1. В рамках рассматриваемого подхода к задачам управляемости и наблюдаемости можно исследовать случай, когда начальная функция $\varphi(t)$ в (3.1) разрывна при $t = t_0$. В этом случае теорема 4.1 имеет место с заменой минимального состояния (3.5) в определении наблюдаемости на величину

$$\Big\{\psi(t_*) - A_2'(t_* + h)\,\psi(t_* + h);\ \int\limits_{t_*}^{t_*+h} A_1'(\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau;$$
$$\int\limits_{t_*}^{t_*+\theta} A_1'(\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau - A_2'(t_* + \theta)\,\psi(t_* + \theta),\ \ 0 < \theta \leqslant h\Big\}$$

которая несет избыточную информацию для вычисления траектории системы (3.3) на $(-\infty, t_*)$.

4.2. Вопрос о точной управляемости системы (1.1), (3.1) в заданном пространстве при выполнении ограничений (3.2) сводится в рассматриваемом подходе к получению теорем существования оптимальных управлений в соответствующей задаче оптимизации типа (1.1), (3.1), (4.1). Класс функций, в котором решение существует, является естественным классом (точной) управляемости, он же порождает линейные операции восстановления в двойственной задаче наблюдения. Результаты [8, 22] позволяют выделить общие ситуации, где эти вопросы решаются путем перехода к обобщенным импульсным воздействиям [1, 3, 6].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
2. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971. 507 с.
3. *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
4. *Красовский Н. Н.* Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
5. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
6. *Черноусько Ф. Л., Меликян А. А.* Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978. 270 с.
7. *Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981. 448 с.
8. *Rockafellar R. T.* Duality in optimal control.— Lect. Notes Math., 1978, v. 680, p. 219—257.
9. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.
10. *Мордухович Б. Ш., Сасонкин А. М.* К теории двойственности в системах управления.— Дифференц. уравнения, 1978, т. 14, № 5, с. 1371—1380.
11. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
12. *Barbu V.* Convex control problems for linear differential systems of retarded type.— Ric. mat., 1977, v. 26, No. 1, p. 3—26.
13. *Куржанский А. Б.* О двойственности задач оптимального управления и наблюдения.— ПММ, 1970, т. 34, № 3, с. 429—439.
14. *Ананьев Б. И.* О двойственности задач оптимального наблюдения и управления для линейных систем с запаздыванием.— Дифференц. уравнения, 1974, т. 10, № 7, с. 1060—1067.
15. *Красовский Н. Н.* Оптимальные процессы в системах с запаздыванием.— Тр. II конгр. ИФАК. Т. 2. М.: Наука, 1965, с. 201—210.
16. *Мордухович Б. Ш.* Аппроксимативная управляемость линейных систем с запаздыванием при наличии ограничений и двойственные задачи идеальной наблюдаемости.— Докл. АН БССР, 1982, т. 26, с. 201—204.
17. *Никольский М. С.* Идеально наблюдаемые системы.— Докл. АН СССР, 1970, т. 191, № 6, с. 1224—1227.
18. *Марченко В. М.* К управляемости и наблюдаемости систем с последействием.— Докл. АН БССР, 1981, т. 25, № 3, с. 239—242.
19. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. 400 с.
20. *Мордухович Б. Ш.* Вариационный подход к теории управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем.— Докл. Болгар. акад. наук, 1980, т. 33, № 10, с. 1325—1328.
21. *Olbrot A. W.* Control of retarded systems with function space constraints. Part II. Approximate controllability.— Control and Cybernetics, 1977, v. 6, No. 2, p. 17—69.
22. *Мордухович Б. Ш., Савиковский В. И.* Управляемость линейных систем в классе неограниченных импульсных воздействий.— Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук, 1980, № 5, с. 34—41.

Минск

Поступила в редакцию
1.VII.1982