Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 4, 1984

УДК 531.36 + 62—50

К ИЗУЧЕНИЮ МИНИМАКСНЫХ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Покотило В.Г.

Изучается задача апостериорного минимаксного оценивания [1] неизвестных параметров нелинейных систем достаточно общего вида. На основе нелинейной теории двойственности описаны аппроксимации информационных множеств, связанных с процессом наблюдения. В том случае, когда возмущения представимы в виде случайных процессов, получено также описание асимптотических свойств минимаксных оценок.

Задачи минимаксного наблюдения применительно к нелинейным системам изучались в работах [2, 3].

1. Пусть наблюдаемый сигнал формируется в соответствии с уравнением

$$y(t) = g(t, z, w(t)), \quad t \in [0, T] \tag{1.1}$$

где неизвестные вектор параметров $z \in R^n$ и возмущения $w(T; \cdot) = \{w(t), t \in [0, T]\}$ удовлетворяют ограничениям вида

$$z \in Z^\circ, \quad w(t) \in W(t) \subseteq W, \quad t \in [0, T]$$

Относительно m-вектор функции $g(\cdot, \cdot, \cdot)$ и исходных данных предполагается следующее:

1) Z° и W — компакты в R^n и R^s соответственно;

2) $g(t, z, w)$ непрерывна по совокупности переменных и, кроме того, для любых $z \in Z^\circ$ множество функций $\{g(t, z, \cdot), t \geqslant 0\}$ равностепенно непрерывно;

3) класс допустимых возмущений определяется множеством

$$E = \{w(T; \cdot) \in C^s[0, T]: w(t) \in W(t), t \in [0, T]\}$$

4) множество возможных выходов системы (1.1)

$$G(z) = \{f(T; \cdot): f(t) = g(t, z, w(t)); \quad w(T; \cdot) \in E\} \tag{1.2}$$

замкнуто в пространстве $C^m[0, T]$.

Определение 1.1 ([1], с. 169). Множество

$$Z(T; y(\cdot)) = \{z': y(T; \cdot) \in G(z')\}$$

называется информационным множеством, совместимым с реализовавшимся сигналом $y(T; \cdot) = \{y(t), t \in [0, T]\}$.

Каким-то образом выделенные точки $z_*(T) \in Z(T; y(\cdot))$ назовем апостериорными минимаксными оценками вектора параметров z.

Для описания слабой зависимости случайных процессов, моделирующих возмущения в стохастической системе используется

Определение 1.2 ([4], с. 149). Случайный процесс $\{w(t), t \geqslant 0\}$ на вероятностном пространстве $\{\Omega, \Sigma, P\}$ с фазовым пространством $\{R^s, \Delta\}$ называется вполне регулярным, если

$$\alpha(\tau) = \sup_{A \in \Gamma_0^t,\, B \in \Gamma_{t+\tau}^\infty,\, t \geqslant 0} |P(AB) - P(A)P(B)| \to 0$$

при $\tau \to \infty$, где Γ_a^b, $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$, — σ-алгебра, порожденная $\{w(t), a \leqslant t \leqslant b\}$.

Приведем без доказательства одно утверждение, характеризующее вполне регулярные процессы.

Лемма 1.1. Пусть $\{w(t),\ t \geqslant 0\}$ — вполне регулярный случайный процесс и $A_i \in \Gamma_{t_{i-1}}^{t_i}$, $t_i \geqslant t_{i-1}$, такие, что

$$P(A_i) < 1 - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad i = 1, 2, \ldots; \quad t_i \to \infty$$

при $i \to \infty$.

Тогда

$$P(\bigcap_{i=1}^{N} A_i) \to 0, \quad N \to \infty$$

2. Пусть A и B — замкнутые множества в R^n. Обозначим через $\delta(A, B)$ уклонение множества A от множества B ([5], с. 45)

$$\delta(A, B) = \inf\{\varepsilon \geqslant 0: A \subset B + \varepsilon S\}$$

Здесь и далее S — единичный шар в соответствующем пространстве.

Теорема 2.1. Пусть $\{w(t),\ t \geqslant 0\}$ — вполне регулярный случайный процесс, реализации которого P почти наверное являются допустимыми возмущениями, и для любых $t \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$ и $w_* \in W(t)$

$$P\{w(t) \in (w_* + \varepsilon S) \cap W(t)\} \geqslant \pi(\varepsilon) > 0 \tag{2.1}$$

Тогда с вероятностью единица

$$\lim_{T\to\infty} \delta(Z(T; y(\cdot)), I(z)) = 0$$
$$I(z) = \{z' \in Z^\circ: \sup_{\gamma>0} \lim_{t\to\infty} \delta(g(t, z, W(t)), g(t, z' + \gamma S, W(t))) = 0\}$$

Доказательство. Точке $z_* \notin I(z)$ поставим в соответствие последовательности $\{t_s,\ s = 1, 2, \ldots\}$, $\{w_s \in W(t_s),\ s = 1, 2, \ldots\}$ и положительные числа $\gamma(z_*)$, $\varepsilon(z_*)$, такие, что

$$g(t_s, z, w_s) \notin g(t_s, z_* + \gamma(z_*) S, W(t_s)) + \varepsilon(z_*) S$$

Функцию $\gamma(\cdot)$ можно выбрать полунепрерывной снизу в точке z_*.

В самом деле, пусть для некоторой последовательности $z_k \to z_*$ существует $\nu_* > 0$, такое, что $\gamma(z_k) < \gamma(z_*) - \nu_*$ для всех достаточно больших k. Так как без ограничения общности можно считать, что $\varepsilon(z_k) \leqslant \varepsilon(z_*)$, то для любых t_s и $w_s \in W(t_s)$, $s = 1, 2, \ldots$ имеем

$$g(t_s, z, w_s) \in g(t_s, z_k + (\gamma(z_*) - \nu_*) S, W(t_s)) + \varepsilon(z_*) S; \ s, k = 1, 2,$$

Следовательно, для достаточно больших k

$$g(t_s, z, w_s) \in g(t_s, z_* + \gamma(z_*) S, W(t_s)) + \varepsilon(z_*) S$$

что противоречит определению $\gamma(z_*)$ и $\varepsilon(z_*)$.

Зафиксируем произвольное $\delta > 0$ и рассмотрим компактное множество $K_\delta = Z^\circ \setminus (I(z) + \delta S)$. Пусть $\gamma = \min\{\gamma(z),\ z \in K_\delta\}$ и точки z_i, $i = 1, 2, \ldots, N$ образуют γ-сеть множества K_δ. Тогда

$$\{\delta(Z(T; y(\cdot)), I(z)) > \delta\} = \{Z(T; y(\cdot)) \cap K_\delta \neq \varnothing\} \subset \subset \bigcup_{i=1}^{N} \{Z(T; y(\cdot)) \cap (z_i + \gamma S) \neq \varnothing\} \tag{2.2}$$

Для каждого $i = 1, 2, \ldots, N$ определим последовательности t_s^i, $w_s^i \in W(t_s^i)$, $s = 1, 2, \ldots$; $t_s^i \to \infty$, $s \to \infty$ и числа ε_i, такие, что

$$g(t_s^i, z, w_s^i) \notin g(t_s^i, z_i + \gamma S, W(t_s^i)) + \varepsilon_i S; \quad s = 1, 2, \ldots$$

При сделанных предположениях относительно функции $g(\cdot, \cdot, \cdot)$ из последнего соотношения следует, что

$$g(t_s^i, z, w_s^i + \delta_i S) \notin g(t_s^i, z_i + \gamma S, W(t_s^i)); \quad s = 1, 2, \ldots$$

для некоторых $\delta_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, N$.

Следовательно

$$\{Z(T;y(\cdot))\cap(z_i+\gamma S)\neq\varnothing\}\subset\bigcap_{s=1}^{R_i(T)}\{w(t_s^i)\notin w_s^i+\delta_i S\}$$

$$R_i(T)=\max\{s:t_s^i\leqslant T\}$$

и в силу (2.2) справедливо включение

$$\{\delta(Z(T;y(\cdot)),I(z))>\delta\}\subset\bigcup_{i=1}^{N}\bigcap_{s=1}^{R_i(T)}\{w(t_s^i)\notin w_s^i+\delta_i S\} \tag{2.3}$$

Используя условие переноса меры P на пространство непрерывных функций с борелевской σ-алгеброй ([6], с. 372), можно показать, что в рассматриваемых условиях

$$\{\delta(Z(T;y(\cdot)),I(z))>\delta\}\in\Sigma$$

Из (2.3) вытекает, таким образом, неравенство

$$P\{\delta(Z(T;y(\cdot)),I(z))>\delta\}\leqslant\sum_{i=1}^{N}P(\bigcap_{s=1}^{R_i(T)}\{w(t_s^i)\notin w_s^i+\delta_i S\})$$

Так как $R_i(T)\to\infty$ при $T\to\infty$, $i=1,2,\ldots,N$, то из (2.1) и леммы 1.1 следует, что

$$P\left(\bigcap_{s=1}^{R_i(T)}\{w(t_s^i)\notin w_s^i+\delta_i S\}\right)\to 0,\quad T\to\infty$$

для любого $i=1,2,\ldots,N$. Поэтому

$$P\{\delta(Z(T;y(\cdot)),I(z))>\delta\}\to 0,\quad T\to\infty$$

т. е. $\delta(T)=\delta(Z(T;y(\cdot)),I(z))\to 0$ по вероятности P. Сходимость с вероятностью единица просто следует из монотонности $\delta(T)$ по T. Теорема доказана.

Следствие 2.1. Если параметры из Z° различимы по сигналу (1.1) в том смысле, что $I(z)\doteq\{z\}$ для любых $z\in Z^\circ$, то минимаксные оценки $z_*(T)$ являются строго состоятельными.

Замечание 2.1. Если сигнал (1.1) формируется на выходе линейной системы, $g(t,z,w)=\theta(t)z+w$ и $\|\theta(t)\|$ ограничена при $t\geqslant 0$, то

$$I(z)=\{z'\in Z^\circ:\lim_{t\to\infty}\|\theta(t)(z-z')\|=0\}$$

В этом случае условие $I(z)=\{z\}$ можно представить в виде

$$\lim_{t\to\infty}\|\theta(t)z\|>0,\quad\forall z\in R^n,\quad z\neq 0$$

3. Для описания аппроксимаций информационных множеств воспользуемся методами нелинейной теории двойственности. Следуя работам [7, 8], рассмотрим следующее обобщение понятий сопряженной функции и субдифференциала в выпуклом анализе.

Пусть $\varphi(\cdot,\cdot)$: $R^p\times R^n\to\bar R=R\cup\{-\infty,+\infty\}$; $f(\cdot)$: $R^n\to\bar R$ и $g(\cdot)$: $R^p\to\bar R$ — произвольные функции.

Определение 3.1. [8]. Функции

$$f^{\cap}(\psi)=\inf\{f(x)+\varphi(\psi,x),\ x\in R^n\}$$

$$g^{\cup}(x)=\sup\{g(\psi)-\varphi(\psi,x),\ \psi\in R^p\}$$

назовем соответственно нижней и верхней φ-сопряженными функциями функций $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$.

Определение 3.2. Вектор $\psi\in R^p$ называется φ-субдифференциалом функции $f(\cdot)$ в точке x_0, если

$$f(x)+\varphi(\psi,x)\geqslant f(x_0)+\varphi(\psi,x_0),\quad\forall x\in R^n$$

Множество φ-субдифференциалов функции $f(\cdot)$ в точке x_0 обозначается через $\partial_\varphi f(x_0)$.

В дальнейшем предполагается, что функция $\varphi(\psi, x)$ непрерывна по x. Одновременно с опорной функцией $\rho(\cdot \mid X)$ множества X будем рассматривать также φ-опорную функцию этого множества, определяемую равенством

$$\rho_\varphi(\psi \mid X) = \inf\{\varphi(\psi, x),\ x \in X\}$$

Предполагая, что аппроксимация множеств $Z(T; y(\cdot))$ производится по измерениям сигнала (1.1) только в конечном числе точек, рассмотрим множество Π кусочно-постоянных функций на $[0, T]$.

Теорема 3.1. Справедливо включение

$$Z(T; y(\cdot)) \subset \{z' :\ \varphi(\psi, z') \geqslant \gamma(T; \psi), \quad \forall \psi \in R^p\}$$
$$\gamma(T; \psi) = \sup\{F^{\cap}(\lambda(\cdot); \psi) - \langle \lambda(\cdot), y(\cdot)\rangle;\ \lambda(\cdot) \in \Pi\}$$
$$F(\lambda(\cdot); z) = \rho(\lambda(\cdot) \mid G(z));\ \langle \lambda(\cdot), y(\cdot)\rangle = \int_0^T d\lambda(t)\, y(t)$$

Доказательство. По определению информационного множества, $z \in Z(T; y(\cdot))$ тогда и только тогда, когда

$$\langle \lambda(\cdot), y(\cdot)\rangle - \langle \lambda(\cdot), f(\cdot)\rangle \geqslant 0, \quad \forall \lambda(\cdot) \in V^m[0, T] \tag{3.1}$$

при некотором возможном выходе системы (1.1). Для совместности системы неравенств (3.1) на множестве $G(z)$, определенном соотношением (1.2), необходимо

$$\langle \lambda(\cdot), y(\cdot)\rangle - F(\lambda(\cdot); z) \geqslant 0, \quad \forall \lambda(\cdot) \in V^m[0, T]$$

Воспользовавшись аналогом неравенства Юнга — Фенхеля, вытекающим из определения 3.1, получим, что для всех $\lambda(\cdot) \in V^m[0, T]$

$$\langle \lambda(\cdot), y(\cdot)\rangle - F^{\cap}(\lambda(\cdot); \psi) \geqslant -\varphi(\psi, z)$$

и, следовательно

$$\varphi(\psi, z) \geqslant \sup\{F^{\cap}(\lambda(\cdot); \psi) - \langle \lambda(\cdot), y(\cdot)\rangle;\ \lambda(\cdot) \in \Pi\}$$

Теорема доказана.

Для того чтобы получить описание аппроксимаций множеств $Z(T; y(\cdot))$ через их опорные функции, приведем без доказательства несколько утерждений.

в *Лемма 3.1.* Из положительной однородности функции $\varphi(\cdot, x)$ следует положительная однородность функции $\gamma(T; \cdot)$. Если, кроме того, $\varphi(\cdot, x)$ — вогнутая функция, то $\gamma(T; \cdot)$ — вогнутая, положительно-однородная функция.

Лемма 3.2. Если $\varphi(\cdot, x)$ и $\omega(\cdot)$: $R^p \to \bar{R}$ — положительно-однородные функции и $\omega(\psi) = \omega^{\cup\cap}(\psi)$ для всех $\psi \in R^p$, то $\omega(\cdot)$ — φ-опорная функция некоторого множества.

Из теоремы 3.1 и лемм 3.1, 3.2 получаем

Следствие 3.1. Если $\varphi(\cdot, x)$ — положительно-однородная функция, то

$$Z(T; y(\cdot)) \subset Z_1(T; y(\cdot)) \subset Z^\circ$$
$$(\rho_\varphi(\psi \mid Z_1(T; y(\cdot))) = \gamma^{\cup\cap}(T; \psi))$$

Из леммы 3.1 следует также, что для описания аппроксимаций информационных множеств можно в некоторых случаях воспользоваться замыканием функции $\gamma(T; \cdot)$ в смысле выпуклого анализа. В частности, справедливо

Следствие 3.2. Если $\varphi(\psi, z) = \langle\psi, z\rangle + \langle\psi_1, f(z)\rangle$, то

$$Z(T; y(\cdot)) \subset Z_2(T; y(\cdot)) = \{z': \ (-z', \ -f(z')) \in$$
$$\in Z_3(T; y(\cdot))\}$$
$$\rho(\psi \mid Z_3(T; y(\cdot))) = \chi^{**}(\psi); \quad \chi(\psi) = -\gamma(T; \psi)$$

Здесь $\chi^{**}(\cdot)$ — вторая сопряженная функция в обычном смысле выпуклого анализа (см., например, [5]).

Замечание 3.1. Для линейных систем в случае $g(t, z, w) = \theta(t) z + w$, положив $\varphi(\psi, z) = -\langle\psi, z\rangle$, получим $f^{\cap}(\psi) = -f^*(\psi)$ и

$$\gamma(T; \psi) = -\inf\left\{\rho(-\lambda(\cdot) \mid E) + \langle\lambda(\cdot), \ y(\cdot)\rangle : \psi = \int_0^T d\lambda(t)\,\theta(t), \ \lambda(\cdot) \in \Pi\right\}$$

Поэтому, если множества Z^0 и $W(t)$ выпуклые, а многозначное отображение $W(\cdot)$ непрерывно в метрике Хаусдорфа, то справедливо равенство ([1], с. 221)

$$\rho(\psi \mid Z(T; y(\cdot))) = -\gamma(T; \psi)$$

4. Перейдем к изучению асимптотических свойств полученных в п. 3 аппроксимаций информационных множеств.

Для $L, T \geqslant 0$ и натурального l определим множества

$$\Theta(l, L, T) = \{t_k, k = 1, 2, \ldots, l; \ t_1 \geqslant T; \ t_{k+1} \geqslant t_k + L, \ k =$$
$$= 1, 2, \ldots, l\}$$
$$\Lambda(l, L, T) = \left\{\lambda(\cdot) \in \Pi: \frac{d\lambda(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \delta(t - t_k), \ \|\lambda_k\| \leqslant 1,\right.$$
$$\left.\{t_k, k = 1, 2, \ldots, l\} \in \Theta(l, L, T)\right\};$$
$$\Psi(z) = \bigcup_{l=1}^{\infty} \operatorname{con}\left(\bigcap_{L,\, T \geqslant 0} \{\partial_\varphi F(\lambda(\cdot); z);\right.$$
$$\left.\lambda(\cdot) \in \Lambda(l, L, T)\}\right); \quad \Psi = \bigcap_{z' \in Z^0} \Psi(z')$$

Здесь $\operatorname{con} X$ — коническая оболочка множества X, а $\partial_\varphi F(\lambda(\cdot); z)$ — φ-субдифференциал функции $F(\lambda(\cdot); \cdot)$ в точке z.

Теорема 4.1. В условиях теоремы 2.1

$$\rho_\varphi(\psi \mid Z_1(T; y(\cdot))) \to \varphi(\psi, z) \quad \text{при} \quad T \to \infty$$

с вероятностью единица для всех $\psi \in \Psi$.

Доказательство. Используя определение φ-субдифференциала и аналог неравенства Юнга — Фенхеля, можно показать, что

$$\gamma(T; \psi) \geqslant \varphi(\psi, z) + \omega(T; \psi, z) \tag{4.1}$$
$$\omega(T; \psi, z) = \sup\{F(\lambda(\cdot); z) - \langle\lambda(\cdot), y(\cdot)\rangle: \psi \in \partial_\varphi F(\lambda(\cdot); z);$$
$$\lambda \in \Pi\}$$

Зафиксируем $\psi \in \Psi \subset \Psi(z)$. По определению конуса $\Psi(z)$ существует $M \geqslant 0$ и натуральное l, такие, что для любых T и L найдутся $\{t_k, k = 1, 2, \ldots, l\} \in \Theta(l, L, T)$ и $\lambda(\cdot) \in \Pi$, для которых справедливо включение

$$M^{-1}\lambda(\cdot) \in \Lambda(l, L, T), \quad \psi \in \partial_\varphi F(\lambda(\cdot); z)$$

Следовательно, для каждого L можно указать множество пар $\{(\lambda_{ik}, t_{ik}), \ k = 1, 2, \ldots, l, \ i = 1, 2, \ldots\}$, такое, что

$$\{t_{ik}, k = 1, 2, \ldots, l\} \in \Theta(l, L, t_{i1}), \quad t_{i1} \to \infty, \quad i \to \infty$$
$$\|\lambda_{ik}\| \leqslant M; \quad \psi \in \partial_\varphi F(\lambda_i(\cdot); z); \quad \frac{d\lambda_i(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{l} \lambda_{ik}\delta(t - t_{ik})$$

Обозначим

$$A_i=\{\sum_{k=1}^{l}[\rho(-\lambda_{ik}\mid g(t_{ik},z,W(t_{ik}))+\lambda_{ik}g(t_{ik},z,w(t_{ik}))]\geqslant\varepsilon\}$$

В силу регулярности процесса $\{w(t),\ t\geqslant 0\}$ и условия 2.1 для некоторого $\delta>0$ и достаточно больших L справедливо неравенство $P(A_i)<$ $<1-\delta$.

Зафиксировав таким образом число L и связанное с ним множество $\{(\lambda_{ik},\ t_{ik}),\ \ k=1,2,\ldots,l,\ i=1,2,\ldots\}$, из (4.1) получаем

$$\begin{aligned}(4.2)\qquad &\{|\gamma(T;\psi)-\varphi(\psi,z)|\geqslant\varepsilon\}=\{\varphi(\psi,z)-\gamma(T;\psi)\geqslant\varepsilon\}\subset\\ &\subset\{-\omega(T;\psi,z)\geqslant\varepsilon\}\subset\bigcap_{i=1}^{N(T)}A_i,\\ &N(T)=\max\{N{:}t_{il}\leqslant T,\ i=1,2,\ldots,N\}\end{aligned}$$

Можно показать, что в рассматриваемых условиях $\{\varphi(\psi,z)-\gamma(T;\psi)\geqslant$ $\geqslant\varepsilon\}\in\Sigma$, и поэтому утверждение теоремы вытекает из (4.2), леммы 1.1 и монотонности $\gamma(T;\psi)$ по T.

В силу замечания 3.1 доказанная теорема непосредственно обобщает основной результат работ [9, 10].

5. При применении для анализа нелинейных систем обычных концепций двойственности, основанных на понятии сопряженных функций в выпуклом анализе, характерным было бы вырождение функций $\gamma(T;\psi)$ и $\omega(T;\psi,z)$, определенных соотношениями (3.1) и (4.1) ($\gamma(T;\psi)=-\infty$ для всех $\psi\in R^p$ и $\partial_\varphi F(\lambda(\cdot);z)=\varnothing$ для всех $\lambda(\cdot)\in V^m[0,T]$) и, как следствие, вырождение условий сходимости аппроксимаций информационных множеств в стохастических системах. Покажем на простейшем примере, что использование нелинейных конструкций двойственности позволяет избежать этого.

Пример 5.1. Пусть

$$y(t)=\exp(zt)+w(t),\ w(t)\in[-1,1],\ Z^0=[0,a],\ a>0$$

В этом случае

$$F(\lambda(\cdot);z)=\int_0^T\exp(zt)\,d\lambda(t)+\mathrm{Var}\,\lambda(\cdot)$$

и для $\lambda_t(\cdot):\dfrac{d\lambda_t(s)}{ds}=\lambda_t\delta(s-t)$ и $\varphi(\psi,z)=\psi z+\psi_1 z^2,\ \lambda_t\geqslant 0$ получим

$$\partial_\varphi F(\lambda_t(\cdot);\ z)=\{(-\psi,\ \psi_1):\lambda_t t\exp(zt)+2\psi_1 z+\psi=0,\ \psi_1\geqslant 0\}$$

Видно, что при $z\geqslant 0$

$$\{\partial_\varphi F(\lambda(\cdot);z);\lambda(\cdot)\in\Lambda(1,\ L,\ T)\}\supset\{\partial_\varphi F(\lambda(\cdot);z);\lambda(\cdot)\in\Lambda\ (1,0,0)\}$$

и, следовательно, $\Psi\neq\varnothing$. В частности

$$\{(\psi,\psi_1):\psi\leqslant 0,\ \psi_1=0\}\subset\Psi,\ \ \forall a>0$$

Пример 5.2. Рассмотрим сигнал

$$y(t)=z(1+w(t)),\ w(t)\in[-1,1]$$

Здесь $F(\lambda_t(\cdot);z)=\lambda_t z-|\lambda_t|\ |z|$ и в отличие от предыдущего случая функция $F(\lambda(\cdot);\cdot)$ не является выпуклой. Поэтому применение обычных конструкций двойственности к успеху не приводит, так как $F^*(\lambda(\cdot);\psi)=-\infty$, $\forall\lambda(\cdot)\in V[0,T]$, $\psi\in R$. В то же время, выбирая $\varphi(\psi,z)=\psi z+\psi_1|z|$, получим

$$\Psi(z)\supset\mathrm{con}\,\{\partial_\varphi F(\lambda_t(\cdot);z);\ \ |\lambda_t|\leqslant 1\}$$

$$\Psi\supset\{(\psi,\psi_1);\ \ |\psi|\leqslant\psi_1\}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
2. *Шориков А. Ф.* Одна нелинейная задача наблюдения.— В кн.: Задачи управления с неполной информацией. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1976, с. 129—138.
3. *Альбрехт Э. Г.* Примеры информационных множеств нелинейных систем.— В кн.: Оценивание в условиях неопределенности. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1982, с. 5—9.
4. *Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1973. 496 с.
5. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 479 с.
6. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов. Т. 1. М.: Наука, 1971. 664 с.
7. *Balder E. J.* An extansion of duality-stability relation to nonconvex optimization problems.— SIAM J. Control and Optimiz., 1977, v. 15, No. 2, p. 329—343.
8. *Lindberg P. O.* A generalization of Fenchel conjugation, giving generalized lagrangians and simmetric nonconvex duality.— Surv. Math. Program., Proc. 9th Internat. Math. Program. Symp. V. 1, Bp., 1976, p. 249—267.
9. *Пшеничный Б. Н., Покотило В. Г.* О задаче наблюдения линейного объекта.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 2, с. 212—217.
10. *Покотило В. Г.* Об асимптотических свойствах минимаксных оценок при случайных возмущениях.— Докл. АН СССР, 1982, т. 264, № 5, с. 1084—1086.

Киев

Поступила в редакцию
7.VI.1983