Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 4, 1984

УДК 531.36 + 62—50

ВВЕДЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ НА МНОЖЕСТВЕ ТРАЕКТОРИЙ УПРАВЛЯЕМОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Панасюк А. И.

Рассматривается задача стабилизации управляемой механической системы. Управления, обеспечивающие устойчивость в целом, определяются при помощи введения новых алгебраических операций. Рассматривается пример управления механической системой при помощи двух моментов.

1. Введение. Рассмотрим систему управления (звездочка означает транспонирование)

$$x^{\cdot} = f(x, u); \quad x = (x_1, \ldots, x_n)^*, \quad u = (u_1, \ldots, u_m)^* \tag{1.1}$$

Решение (1.1) $x(t)$, отвечающее управлению $u(t)$, называем траекторией (1.1). Множество всех пар $x(t), u(t)$ вектор-функций, удовлетворяющих (1.1), обозначим W. Пределы изменения t, обычно бесконечные, считаем определенными решаемой задачей (конкретизировать их здесь нет необходимости). Цель работы — введение абстрактных законов сложения $\oplus$ и умножения на число $\odot$ элементов множества W, согласованных с динамикой системы.

Частным случаем системы (1.1) служит линейная система

$$x^{\cdot} = Ax + Bu \tag{1.2}$$

где A и B — матрицы $n \times n$ и $n \times m$ соответственно. Для системы (1.2) операции сложения двух траекторий $x'(t)$ и $x''(t)$ определяются этими же операциями в евклидовом пространстве

$$x'''(t) = x'(t) + x''(t), \quad \lambda x(t) \tag{1.3}$$

поэтому для (1.2) можно положить $\oplus \equiv +$, $\odot \equiv \cdot$. Законам (1.3) для траекторий соответствуют законы композиции для управлений

$$u'''(t) = u'(t) + u''(t), \quad \lambda u(t) \tag{1.4}$$

Траекториям $x'(t)$ и $x''(t)$ системы (1.2) с начальными условиями $x'(0)$ и $x''(0)$ отвечает траектория $x'''(t)$ с начальным условием $x'''(0) = x'(0) + x''(0)$, т. е. начальные значения подчиняются тем же законам композиции, что и траектории.

Законы композиции (1.3), (1.4) лежат в основе методов анализа и синтеза линейных систем автоматического управления. Поэтому естественно стремление перенести их как-то и на нелинейные системы. При этом можно выделить два пути. Первый — законы композиции на множестве W индуцировать из R^n, R^m, т. е. определять согласно (1.3). Это приводит к методам линеаризации. Второй путь — перейти к новым законам композиции $\oplus$, $\odot$, увязывая их с законами динамики (1.1). Этому пути следует данная работа.

Когда законы $\oplus$, $\odot$ введены, система (1.1) оказывается линейной, но не в смысле операций $+$, $\cdot$ (1.3), индуцированных из R^n, а в смысле новых законов $\oplus$, $\odot$, причем не приближенно, как в методах линеаризации, а точно. Функциональное отображение вход ($u(t)$) — выход ($x(t)$) становится линейным (не приближенно, а точно) для законов композиции $\oplus$, $\odot$. Выполняется принцип суперпозиции: управлению $u'(\cdot)\oplus u''(\cdot)$ отвечает траектория $x'(\cdot)\oplus x''(\cdot)$; аналогично $\lambda\odot u(\cdot)$ отвечает $\lambda\odot x(\cdot)$.

Отсюда может быть извлечено немало следствий, связанных, например, с перенесением методов анализа и синтеза линейных систем на нелинейные, но в операциях $\oplus$, $\odot$. Одним из таких приложений является представленный ниже метод синтеза регулятора нелинейной системы с заданными требованиями к динамике путем нелинейного продолжения регулятора линеаризованной системы из окрестности согласования на все фазовое пространство системы. Предлагаемый подход применим к системам вида (3.1), (3.11) при условии (3.12) в случае, если система (5.8) однозначно разрешима относительно $p_1, \ldots, p_m$. Точные условия указаны в теореме 7.1.

Для избежания недоразумений, не оговаривая этого особо, всюду ниже полагаем

(1.5) $$1 \leqslant m < n$$

2. Новый закон $\oplus$ сложения в R^n. Закон композиции $\oplus_x$ на множестве R^n введем как дифференцируемую вектор-функцию $\varphi(x', x'')$, которая двум векторам $x', x'' \in R^n$ ставит в соответствие третий вектор $x''' \in R^n$, что обозначим в виде

(2.1) $$x''' = \varphi(x', x'') = x' \oplus_x x''$$

Закон композиции $\oplus_u$ для управления $u(t)$ ищем в виде функции

(2.2) $$u''' = \psi(x', u', x'', u'') = u' \oplus_u u''$$

которая каждым двум состояниям x', x'' и векторам управления u', u'' ставит в соответствие третий вектор управления $u''' \in R^m$.

Введение новых законов $\oplus_x$, $\oplus_u$ позволяет упростить исследование системы, если законы $\oplus_x$, $\oplus_u$ индуцируют для нелинейной системы законы сложения траекторий и управлений точно так же, как обычный закон сложения $+$ в R^n индуцирует сложение траекторий (1.3) и управлений (1.4) линейной системы. Поэтому требуем, чтобы законы $\oplus_x$, $\oplus_u$ не выводили из множества W. Это означает, что из равенств

(2.3) $$\dot{x}'(t) = f(x'(t), u'(t)), \quad \dot{x}''(t) = f(x''(t), u''(t))$$

должно следовать

(2.4) $$\dot{x}'''(t) = f(x''', u''')$$

С другой стороны, согласно (2.1), (2.3) получаем

(2.5) $$\dot{x}'''(t) = \varphi_{x'} f(x', u') + \varphi_{x''} f(x'', u'')$$

где $\varphi_{x'}$, $\varphi_{x''}$ — соответствующие матрицы частных производных. Из (2.4), (2.5) получаем основное уравнение в частных производных

(2.6) $$f(\varphi(x', x''), u''') = \varphi_{x'}(x', x'') f(x', u') + \varphi_{x''}(x', x'') f(x'', u'')$$

Оно отражает тот факт, что новые законы композиции $\oplus_x$, $\oplus_u$, введенные как отображения $R^n \times R^n \to R^n$, $R^n \times R^m \times R^n \times R^m \to R^m$, индуцируют законы композиции для траекторий. Это означает, что если $x'(t)$, $x''(t)$ удовлетворяют на $a < t < b$ уравнению (1.1) при $u'(t)$ и $u''(t)$ соответственно, то вектор-функция $x'''(t)$, определенная при каждом t равенством

(2.7) $$x'''(t) = \varphi(x'(t), x''(t))$$

удовлетворяет (1.1) при подстановке туда вектор-функции $u'''(t)$, определенной при каждом t формулой

(2.8) $$u'''(t) = \psi(x'(t), u'(t), x''(t), u''(t))$$

Там, где из текста ясно, какие векторы складываются, x или u, вместо $\oplus_x$, $\oplus_u$ пишем просто $\oplus$.

3. Решение уравнения, определяющего законы $\oplus_x$, $\oplus_u$. Ограничимся здесь рассмотрением системы, линейной по управлению

(3.1) $$x^{\cdot} = X^{\circ}(x) + Y^{\circ}(x)u; \quad X^{\circ}(x) = \left\| \begin{matrix} F(x) \\ Z(x) \end{matrix} \right\|, \quad Z(x) = \left\| \begin{matrix} Z_1(x) \\ \cdots\cdots \\ Z_{n-m}(x) \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} X^{\circ}_{m+1}(x) \\ \cdots\cdots \\ X_n^{\circ}(x) \end{matrix} \right\|, \quad F(x) = \left\| \begin{matrix} X_1^{\circ}(x) \\ \cdots\cdots \\ X_m^{\circ}(x) \end{matrix} \right\|$$

где $X^{\circ}(x)$ — столбец, а $Y^{\circ}(x)$ — матрица $n \times m$. Область изменения u — все пространство R^m. Обозначим Γ_x образ отображения $u \to Y^{\circ}(x)u$, т. е. $\Gamma_x = Y^{\circ}(x)R^m$.

Теорема 3.1. Пусть $\varphi(x', x'')$ непрерывно дифференцируемая функция, задающая на R^n структуру коммутативной группы по формуле (2.1). Тогда всюду

(3.2) $$\operatorname{rank} \varphi_{x'}(x', x'') = \operatorname{rank} \varphi_{x''}(x', x'') = n$$

Доказательство. Пусть x_0'' — обратный по сложению $\oplus$ элемент для x''. Тогда $x \oplus x'' \oplus x_0'' = x$, что можно записать в виде $\varphi(\varphi(x, x''), x_0'') = x$. Дифференцируя это выражение по x, получим

$$\varphi_{x'}\varphi_x(x, x'') = E$$

где E — единичная матрица. Отсюда вытекает (3.2).

Уравнение (2.6) перепишется для системы (3.1) в виде

(3.3) $$X^{\circ}(\varphi) + Y^{\circ}(\varphi)\psi = \varphi_{x'}[X^{\circ}(x') + Y^{\circ}(x')u'] + \varphi_{x''}[X^{\circ}(x'') + Y^{\circ}(x'')u'']$$

Теорема 3.2. Для того чтобы нашлась непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(x', x'')$ и функция $\psi(x', u', x'', u'')$, которые удовлетворяли бы уравнению (3.3) при всех x', x'', u', u'', необходимо, чтобы при всех x', $x'' \in R^n$,

(3.4) $$\varphi_{x'}\Gamma_{x'} \subset \Gamma_{\varphi}$$

(3.5) $$\varphi_{x'}X^{\circ}(x') + \varphi_{x''}X^{\circ}(x'') - X^{\circ}(\varphi) \in \Gamma_{\varphi}$$

Если φ задает на R^n структуру коммутативной группы и при всех $x \in R^n$

(3.6) $$\operatorname{rank} Y^{\circ}(x) = m$$

то (3.4) эквивалентно равенству

(3.7) $$\varphi_{x'}\Gamma_{x'} = \Gamma_{\varphi}$$

Обратно, если $\varphi(x', x'')$ непрерывно дифференцируемая коммутативная функция, для которой при всех $x', x'' \in R^n$ выполнены условия (3.4), (3.5), то найдется функция $\psi(x', u', x'', u'')$, такая, что ψ, φ удовлетворяют уравнению (3.3) при всех $x', x'' \in R^n$, $u', u'' \in R^m$.

Доказательство. Пусть $\varphi(x', x'')$ — дифференцируемая функция, удовлетворяющая (3.3) с некоторой функцией ψ. Полагая в (3.3) $u' =$

$= u'' = 0$, получим для некоторого $u_0 = \psi(x', 0, x'', 0) \in R^m$

(3.8) $\qquad X^\circ(\varphi) + Y^\circ(\varphi)\, u_0 = \varphi_{x'} X^\circ(x') + \varphi_{x''} X^\circ(x'')$

что как раз и означает (3.5). Вычтем (3.8) из (3.3)

(3.9) $\qquad Y^\circ(\varphi)(\psi - u_0) = \varphi_{x'} Y^\circ(x')\, u' + \varphi_{x''} Y^\circ(x'')\, u''$

Чтобы уравнение (3.9) было разрешимым относительно ψ при любых u', u'', необходимо и достаточно, чтобы

(3.10) $\qquad \Gamma_\varphi \supset \varphi_{x'}\Gamma_{x'} + \varphi_{x''}\Gamma_{x''}$

что в свою очередь эквивалентно двум включениям

$$\varphi_{x'}\Gamma_{x'} \subset \Gamma_\varphi, \quad \varphi_{x''}\Gamma_{x''} \subset \Gamma_\varphi$$

Если выполнено (3.6), то $\dim \Gamma_x = m$ при любых x. Если к тому же φ задает группу, то согласно теореме 3.1 имеет место (3.2). Тогда $\dim \varphi_{x'}\Gamma_{x'} = m$ и включение (3.4) переходит в равенство (3.7).

Обратно из (3.5) следует существование u_0, удовлетворяющего (3.8). Для коммутативной функции $\varphi(x', x'')$ из (3.4) вытекают два последних включения, откуда следует разрешимость (3.9) относительно ψ. Складывая (3.8) и (3.9), получим (3.3).

Рассмотрим теперь систему с постоянными коэффициентами при управлениях

(3.11) $\qquad Y^\circ = \begin{Vmatrix} Y \\ 0 \end{Vmatrix} = \text{const}; \quad Y = \begin{Vmatrix} Y_{11}, \ldots, Y_{1m} \\ Y_{m1}, \ldots, Y_{mm} \end{Vmatrix}$

Теорема 3.3 Пусть

(3.12) $\qquad \operatorname{rank} Y = m$

Тогда для непрерывно дифференцируемой коммутативной функции $\varphi(x', x'')$ условие (3.7) эквивалентно тому, что функции φ_i не зависят при $i > m$ от $x_1', \ldots, x_m', x_1'', \ldots, x_m''$, т. е.

(3.13) $\qquad \varphi_i = \varphi_i(x'_{m+1}, \ldots, x_n', x''_{m+1}, \ldots, x_n''), \quad m + 1 \leqslant i \leqslant n$

При выполнении (3.13) включение (3.5) эквивалентно уравнению

(3.14) $\qquad \varphi_{x'}^{(z)} Z(x') + \varphi_{x''}^{(z)} Z(x'') = Z(\varphi)$

$$\varphi_{x'}^{(z)} = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_{m+1}}{\partial x'_{m+1}} \cdots \dfrac{\partial\varphi_{m+1}}{\partial x_n'} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial x'_{m+1}} \cdots \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial x_n'} \end{Vmatrix}$$

Доказательство. В силу (3.11) и (3.12) $\Gamma_x = \text{const}$ является линейным подпространством, натянутым на первые m координатных осей. Отсюда следует, что для справедливости (3.7) необходимо и достаточно, чтобы координаты с $m + 1$ по n векторов $\varphi_{x'} Y^\circ u$ были нулевыми при всех $u \in R^m$. Это эквивалентно тому, чтобы все элементы матрицы $\varphi_{x'} Y^\circ$, лежащие в строках от $m + 1$ до n, были нулевыми

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} Y_{jl}^\circ = 0, \quad i = m + 1, m + 2, \ldots, n, \quad l = 1, 2, \ldots, m$$

В силу (3.12) это эквивалентно тому, что при всех x', x'' $\partial\varphi_i/\partial x_j \equiv 0$ при $i = m + 1,\ m + 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, m$, что в свою очередь эквивалентно (3.13), откуда следует эквивалентность (3.5) и (3.14).

Будем задавать закон сложения $\oplus_x$ по координатам с номерами от $m+1$ до n обычным способом

$$\varphi_i(x', x'') = x_i' + x_i'', \quad m+1 \leqslant i \leqslant n \tag{3.15}$$

Тогда уравнение (3.14) примет вид

$$Z(x') + Z(x'') = Z(\varphi), \quad Z(x) \in R^{n-m} \tag{3.16}$$

Это выражение совместно с (3.15) задает $2(n-m)$ уравнений для определения φ. Желательно, чтобы они определяли φ однозначно, но при $n > 2(n-m)$ это, вообще говоря, не так. Поэтому в случае, когда $n > 2(n-m)$, мы дополняем систему (3.16) $2m-n$ уравнениями, например, вида (3.15) с тем, чтобы получить однозначную определенность φ. Это соответствует тому, что мы рассматриваем векторное уравнение

$$X(x') + X(x'') = X(\varphi), \quad X(x) \in R^n \tag{3.17}$$

у которого первые $n-m$ уравнений совпадают с (3.16), а последние $n-m$ уравнений совпадают с (3.15)

$$X_i(x) = Z_i(x) = X_{m+i}{}^\circ(x), \quad 1 \leqslant i \leqslant n-m \tag{3.18}$$

$$X_i(x) = x_i, \quad m+1 \leqslant i \leqslant n \tag{3.19}$$

Если $n > 2(n-m)$, то компоненты $X_i(x)$, $n-m+1 \leqslant i \leqslant m$, мы задаем подходящим образом, например $X_i(x) = x_i$. Ситуация $n \leqslant 2(n-m)$ является также допустимой. В этом случае $X_i(x)$, $m+1 \leqslant i \leqslant n$, определяем согласно (3.19), а компоненты $X_i(x)$, $1 \leqslant i \leqslant m$ — согласно (3.18).

Теорема 3.4. Пусть

1) уравнение (3.17) имеет решение $\varphi(x', x'')$ при любых $x', x'' \in R^n$

2) из равенства $X(x) = X(x')$ следует, что $x = x'$

3) имеет место равенство

$$X(0) = 0 \tag{3.20}$$

4) уравнение

$$X(x) + X(x^\circ) = 0 \tag{3.21}$$

имеет решение $x^\circ(x)$ при всех x.

Тогда $\varphi(x', x'')$ задает на R^n структуру коммутативной группы.

Доказательство. Согласно (2.1), (3.17) имеем

$$X(x' \oplus x'') = X(x') + X(x'') = X(x'') + X(x') = X(x'' \oplus x')$$

Отсюда и из условия 2 теоремы получим $x' \oplus x'' = x'' \oplus x'$. Аналогично получаем

$$X((x' \oplus x'') \oplus x''') = X(x' \oplus x'') + X(x''') = X(x') + X(x'') + X(x''') = X(x') + X(x'' \oplus x''') = X(x' \oplus (x'' \oplus x'''))$$

Отсюда и из условия 2 теоремы получим, что операция $\oplus$ ассоциативна $(x' \oplus x'') \oplus x''' = x' \oplus (x'' \oplus x''')$. Так как в силу (3.20) $X(x \oplus 0) = X(x) + X(0) = X(x)$, откуда согласно условию 2 $x \oplus 0 = x$, то 0 — нулевой элемент и для операции $\oplus$. Из (3.21) следует, что $x^\circ(x)$ служит обратным элементу x. Действительно, $X(x) + X(x^\circ) = X(x \oplus x^\circ) = 0 = X(0)$. Тогда из условия 2 теоремы получаем $x \oplus x^\circ = 0$.

При $n \geqslant 2(n-m)$ решение (3.17) удовлетворяет (3.16). При $n < 2(n-m)$ этот факт принимается в качестве предположения. Тогда доказанная теорема сводит построение операции $\oplus_x$ к решению уравнения (3.17).

Закон композиции (2.2) для векторов управлений системы (3.1), (3.11) с учетом (3.12) определим из первых m уравнений системы (3.3), которые запишем в обозначениях (3.1) в виде

(3.22) $$F(\varphi) + Y\psi = \Phi_1[X^\circ(x') + Y^\circ u'] + \Phi_2[X^\circ(x'') + Y^\circ u'']$$

$$\Phi_1 = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1'} \dots \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n'} \\ \dots\dots \\ \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1'} \dots \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_n'} \end{matrix} \right\|, \quad \Phi_2 = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1''} \dots \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n''} \\ \dots\dots \\ \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1''} \dots \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_n''} \end{matrix} \right\|$$

Поскольку Y согласно (3.12) обратима, то получим явную формулу

(3.23) $$\psi = Y^{-1}\{\Phi_1[X^\circ(x') + Y^\circ u'] + \Phi_2[X^\circ(x'') + Y^\circ u''] - F(\varphi)\}$$

4. Новые законы умножения на числа $\odot_x$, $\odot_u$. Закон умножения $\lambda \odot_x x$ определим как функцию $p(\lambda, x)$, отображающую $R \times R^n \to R^n$

(4.1) $$p(\lambda, x) = \lambda \odot_x x$$

Закон умножения $\lambda \odot_u u$ ищем в виде функции $R \times R^m \times R^n \to R^m$

(4.2) $$q(\lambda, u, x) = \lambda \odot_u u$$

Так же как и для сложения, требуем, чтобы законы (4.1), (4.2) переводили каждое решение системы (1.1) $x(t)$, отвечающее функции управления $u(t)$, в новое решение $x'(t) = p(\lambda, x(t))$, отвечающее функции управления $u'(t) = q(\lambda, u(t), x(t))$. Это означает, что из равенства

(4.3) $$x^\cdot = f(x, u)$$

должно следовать

(4.4) $$p^\cdot(\lambda, x) = f(p(\lambda, x), q(\lambda, u, x))$$

С другой стороны, в силу (4.3)

(4.5) $$p^\cdot(\lambda, x) = p_x f(x, u)$$

Из (4.4), (4.5) получаем основное уравнение в частных производных для определения законов $\odot_x$, $\odot_u$

(4.6) $$f(p(\lambda, x), q(\lambda, u, x)) = p_x(\lambda, x) f(x, u)$$

Там, где из текста ясно, какие векторы умножаются, x или u, вместо $\odot_x$, $\odot_u$ пишем просто $\odot$.

5. Решение уравнений, определяющих законы $\odot_x$, $\odot_u$. Ограничимся рассмотрением системы (3.1).

Теорема 5.1. Пусть функция $p(\lambda, x)$ непрерывно дифференцируема по x и задает умножение $\lambda \odot x$, удовлетворяющее условию $\lambda^{-1} \odot_x (\lambda \odot_x x) = x$ при $\lambda \neq 0$. Тогда при $\lambda \neq 0$

(5.1) $$\operatorname{rank} p_x(\lambda, x) = n$$

Доказательство. Дифференцируя равенство $p(\lambda^{-1}, p(\lambda, x)) = x$ по x, получим $p_x(\lambda^{-1}, p(\lambda, x))\, p_x(\lambda, x) = E$, откуда следует (5.1).

Уравнение (4.6) для системы (3.1) перепишется в виде

(5.2) $$X^\circ(p) + Y^\circ(p)\, q = p_x[X^\circ(x) + Y^\circ(x)\, u]$$

Теорема 5.2. Для того чтобы нашлась непрерывно дифференцируемая по x функция $p(\lambda, x)$ и функция $q(\lambda, u, x)$, которые удовлетворяли бы уравнению (5.2) при всех x, λ, необходимо, чтобы при всех $x \in R^n$, $\lambda \in R$

$$(5.3) \qquad p_x\Gamma_x \subset \Gamma_p, \quad p_x X^\circ(x) - X^\circ(p) \in \Gamma_p$$

Если $p(\lambda, x)$ непрерывно дифференцируема по x, задает закон умножения $\lambda^{-1} \odot_x (\lambda \odot_x x) \equiv x$, $\lambda \neq 0$, $0 \odot_x x = 0$ и $\operatorname{rank} Y^\circ(x) = m$ при всех $x \in R^n$, то первое условие (5.3) эквивалентно равенству

$$(5.4) \qquad p_x\Gamma_x = \Gamma_p, \quad \lambda \neq 0$$

Обратно, если $p(\lambda, x)$ — непрерывно дифференцируемая по x функция, для которой при всех $x \in R^n$, $\lambda \in R$ выполнены условия (5.3), то найдется функция $q(\lambda, u, x)$, такая, что p, q удовлетворяют (5.2) при всех x, u, λ.

Теорема 5.3. Пусть $Y(x)$ постоянна и выполнены условия (3.11), (3.12). Тогда для дифференцируемой по x функции $p(\lambda, x)$ такой, что $p(0, x) = 0$, условие (5.4) эквивалентно тому, что функции $p_i(\lambda, x)$ при $i \geqslant m+1$ не зависят от $x_1, \ldots, x_m$, т. е.

$$(5.5) \qquad p_i(\lambda, x) = p_i(\lambda, x_{m+1}, \ldots, x_n), \quad m+1 \leqslant i \leqslant n$$

При выполнении (5.5) второе включение (5.3) эквивалентно уравнению

$$(5.6) \qquad p_x^{(z)}(\lambda, x)\, Z(x) = Z(p), \quad p_x^{(z)} = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial p_{m+1}}{\partial x_{m+1}} & \ldots & \dfrac{\partial p_{m+1}}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot \ \cdot \ \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial p_n}{\partial x_{m+1}} & \ldots & \dfrac{\partial p_n}{\partial x_n} \end{matrix} \right\|$$

Доказательства теорем 5.2, 5.3 аналогичны доказательствам теорем 3.2, 3.3.

Будем задавать закон умножения $\odot_x$ по координатам с номерами от $m+1$ до n обычным способом $p_i(\lambda, x) = \lambda x_i$, $m+1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда уравнение (5.6) примет вид

$$(5.7) \qquad \lambda Z(x) = Z(p)$$

Точно так же, как для сложения, вводим уравнение

$$(5.8) \qquad \lambda X(x) = X(p(\lambda, x))$$

где $X(x)$ — та же функция, что и в уравнении (3.17).

Теорема 5.4. Пусть выполнены условия теоремы 3.4 и уравнение (5.8) имеет решение при всех $x \in R^n$, $\lambda \in R$. Тогда операции $\oplus_x$, $\odot_x$ задают на R^n структуру линейного пространства.

Доказательство. Имеем согласно (5.8)

$$X(p(\lambda_1, p(\lambda_2, x))) = \lambda_1 X(p(\lambda_2, x)) = \lambda_1\lambda_2 X(x) = \\ = X(p(\lambda_1\lambda_2, x))$$

откуда согласно условию 2 теоремы 3.4 получаем $p(\lambda_1, p(\lambda_2, x)) = p(\lambda_1\lambda_2, x)$, что в обозначениях $\odot$ перепишется в виде $\lambda_1 \odot (\lambda_2 \odot x) = (\lambda_1\lambda_2) \odot x$. Аналогично $1 \odot x = x$.

Проверим выполнение аксиом дистрибутивности. Согласно (5.8), (3.17)

$$X(p(\lambda_1 + \lambda_2, x)) = (\lambda_1 + \lambda_2)X(x) = \lambda_1 X(x) + \lambda_2 X(x) = \\ = X(p(\lambda_1, x)) + X(p(\lambda_2, x)) = X(\varphi(p(\lambda_1, x), \ p(\lambda_2, x)))$$

В силу условия 2 теоремы 3.4 $p(\lambda_1 + \lambda_2, x) = \varphi(p(\lambda_1, x), \ p(\lambda_2, x))$, что в обозначениях $\oplus$, $\odot$ представится в виде $(\lambda_1 + \lambda_2) \odot x = (\lambda_1 \odot x) \oplus$

$\oplus (\lambda_2 \odot x)$. Согласно (5.8), (3.17)

$$X(p(\lambda, \varphi(x', x''))) = \lambda X(\varphi(x', x'')) = \lambda X(x') + \lambda X(x'') = \\ = X(p(\lambda, x')) + X(p(\lambda, x'')) = X(\varphi(p(\lambda, x'), p(\lambda, x'')))$$

Отсюда в силу условия 2 теоремы 3.4 $p(\lambda, \varphi(x' + x'')) = \varphi(p(\lambda, x'), p(\lambda, x''))$, или $\lambda \odot (x' + x'') = (\lambda \odot x') \oplus (\lambda \odot x'')$.

Заметим, что здесь условие 4 теоремы 3.4 излишне, так как оно следует из разрешимости (5.8). Более того, в силу разрешимости (5.8) уравнение $X(x_0) = 0$ имеет решение. Помещая начало координат в x_0, получим выполнение условия 3 теоремы 3.4. Поэтому существенны только первые два условия теоремы 3.4.

Теорема 5.4 сводит построение закона $\odot_x$ к решению уравнения (5.8).

Так же как для ψ, можно указать для q явную формулу

(5.9) $$q(\lambda, u, x) = Y^{-1}\{P[X^\circ(x) + Y^\circ u] - F(p(\lambda, x))\}$$

$$P = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial p_1}{\partial x_1} \dots \dfrac{\partial p_1}{\partial x_n} \\ \dots\dots \\ \dfrac{\partial p_m}{\partial x_1} \dots \dfrac{\partial p_m}{\partial x_n} \end{Vmatrix}$$

6. Дифференцируемость функций φ, p. Так как матрицы частных производных по x от функций φ, p входят в основные уравнения (2.6), (4.6), то представляется важным выяснить условия, гарантирующие существование этих производных.

Теорема 6.1. Пусть выполнены условия теоремы 5.4; функция $X(x)$ $l \geqslant 1$ раз непрерывно дифференцируема и при всех $x \in R^n$

(6.1) $$\operatorname{rank} X_x(x) = n$$

Тогда функции $\varphi(x', x'')$, $p(\lambda, x)$, задаваемые как решения уравнений (3.17), (5.8), l раз непрерывно дифференцируемы по всем переменным и справедливы соотношения

(6.2) $$\varphi(x', x'') = x' + x'' + 0(\|x'\| + \|x''\|)$$

(6.3) $$p(\lambda, x) = \lambda x + \lambda\alpha(x) + 0(\lambda[x + \alpha(x)])$$

Здесь $\alpha(x) = 0(\|x\|)$, $\lim \varepsilon^{-1} 0(\varepsilon) = 0$ $(\varepsilon \to 0)$.

Доказательство. Непрерывная дифференцируемость φ, p следует из теоремы о неявной функции. Докажем (6.3). Из (5.8) и дифференцируемости решения уравнения $X(p) = r$, $r = \lambda X(x)$ следует, что

(6.4) $$p(\lambda, x) = X_x^{-1}(0)\, r + 0(r) = X_x^{-1}(0)\, \lambda X(x) + 0(\lambda X(x)) = \\ = \lambda X_x^{-1}(0)[X_x(0)\, x + \theta(x)] + 0([\lambda X_x(0)\, x + \lambda\theta(x)]) = \\ = \lambda x + \lambda X_x^{-1}(0)\, \theta(x) + 0_1(\lambda[x + X_x^{-1}(0)\, \theta(x)])$$

Отсюда следует (6.3). Аналогично доказывается (6.2).

Далее нам понадобятся два отображения $R^n \to R^n$, определенные формулами

(6.5) $$y = \varkappa(x) = \lim_{\lambda\to 0} \lambda^{-1} p(\lambda, x); \quad x = s(y) = \lim_{\lambda\to 0} p(\lambda^{-1}, \lambda y)$$

Теорема 6.2. Пусть выполнены условия теоремы 6.1 и условие

(6.6) $$\|X(x)\| \to \infty \quad \text{при} \quad \|x\| \to \infty$$

Тогда пределы (6.5) существуют; функции $\varkappa(x)$ и $s(y)$ l раз непрерывно дифференцируемы, отображения $\varkappa$, s задают изоморфизмы пространства R^n с операциями $\oplus_x$, $\odot_x$ и R^n с обычными операциями сложения $+$

и умножения на число; отображения $\varkappa$ и s однозначно определяются уравнениями

(6.7) $\qquad X_x(0)\,\varkappa(x) = X(x)$

(6.8) $\qquad X(s(y)) = X_x(0)\,y$

и имеют место соотношения

(6.9) $\qquad s(\varkappa(x)) \equiv x, \quad \varkappa(s(y)) \equiv y$

(6.10) $\qquad \varkappa_i(x) = x_i, \quad s(y) = y_i, \quad m+1 \leqslant i \leqslant n$

Доказательство. Из (6.1), (6.4) получаем (6.7), откуда следует дифференцируемость $\varkappa$. В силу теоремы 5.4 $\oplus_x$, $\odot_x$ задают на R^n линейное пространство. По определению p, φ — решения уравнений (3.17), (5.8). Поэтому согласно (6.7)

$$X_x(0)\,\varkappa(x' \oplus x'') = X(x' \oplus x'') = X(x') + X(x'') = X_x(0)\,\varkappa(x') + X_x(0)\,\varkappa(x''); \quad X_x(0)\,\varkappa(\lambda \odot x) = X(\lambda \odot x) = \lambda X(x) = X_x(0)\,\lambda\varkappa(x)$$

В силу условия (6.1) отсюда следует, что

$$\varkappa(x' \oplus x'') = \varkappa(x') + \varkappa(x''); \quad \varkappa(\lambda \odot x) = \lambda\varkappa(x)$$

т. е. $\varkappa$ — гомоморфизм векторных пространств.

Согласно (5.8) имеем $X(p(\lambda^{-1}, \lambda y)) = \lambda^{-1}X(\lambda y)$, $\lambda \neq 0$. Отсюда

(6.11) $\qquad X(p(\lambda^{-1}, \lambda y)) = X_x(0)\,y + \lambda^{-1}0(\lambda y)$

Из (6.6) и ограниченности $\lambda^{-1}0(\lambda y)$ при $\lambda \to 0$ вытекает ограниченность $p(\lambda^{-1}, \lambda y)$ при $\lambda \to 0$. Тогда если бы предел $\lim p(\lambda^{-1}, \lambda y)$ при $\lambda \to 0$ отсутствовал, нашли бы две различные предельные при $\lambda \to 0$ точки $x' \neq x''$ у кривой $p(\lambda^{-1}, \lambda y)$. Из (6.11) получим $X(x') = X(x'') = X_x(0)\,y$, откуда согласно условию 2 теоремы 3.4 получили бы $x' = x''$. Противоречие показывает существование и второго предела (6.5). Из (6.11) получаем (6.8).

Из (3.17), (6.8) следует

$$X(s(y') \oplus s(y'')) = X(s(y')) + X(s(y'')) = X_x(0)\,(y' + y'')$$

а из (5.8), (6.8) получаем

$$X(\lambda \odot s(y)) = \lambda X(s(y)) = \lambda X_x(0)\,y = X_x(0)\,(\lambda y)$$

С учетом условия 2 теоремы 3.4 эти равенства означают, что элементам $y' + y''$, λy отвечают элементы $s(y') \oplus s(y'')$ и $\lambda \odot s(y)$ соответственно, т. е. s является гомоморфизмом векторных пространств. Из однозначной разрешимости уравнения (6.7) относительно $\varkappa(x)$ и уравнения (6.8) относительно $s(y)$ следует, что $\varkappa(s(y)) \equiv y$, $s(\varkappa(x)) \equiv x$, т. е. $\varkappa$ и s — изоморфизмы.

7. Синтез систем автоматического управления на основе изоморфизма управляемых динамических систем. Ниже под W понимается совокупность пар функций $x(t)$, $u(t)$, которые удовлетворяют уравнению (1.1) и принадлежат некоторому заранее оговариваемому классу. Подразумевается, что этими классами могут быть:

1) непрерывные функции управления $u(t)$ и непрерывно дифференцируемые траектории $x(t)$;

2) кусочно-непрерывные $u(t)$ и кусочно непрерывно дифференцируемые $x(t)$;

3) суммируемые по Лебегу управления $u(t)$ и абсолютно непрерывные траектории $x(t)$, удовлетворяющие (1.1) почти всюду.

Операциями $\oplus_x$, $\oplus_u$, $\odot_x$, $\odot_u$ на W вводится структура линейного пространства по формулам (2.7), (2.8) для сложения и аналогично для умножения, согласованная с динамикой системы, т. е. такая, в которой система линейна.

Пусть имеются две системы вида (1.1) и линейные пространства для них W^1 и W^2. Будем говорить, что эти системы изоморфны, если линейные пространства W^1 и W^2 изоморфны. Частным случаем здесь служит тот, когда берется одна и та же система (1.1) и $W^1 = W^2 = W$, а изоморфизмом служит автоморфизм линейного пространства W. Тогда говорим об автоморфизме системы. Наиболее важным автоморфизмом здесь является умножение $\lambda \odot$ на число $\lambda \neq 0$.

Основываясь на изоморфизме, можно для исходной системы находить изоморфную ей систему, но более простую для построения регулятора или программного управления с требуемыми свойствами. Тогда, если сам изоморфизм не обладает какими-то патологиями, можно надеяться, что пересчитанный по изоморфизму на исходную систему регулятор или программное управление обладает теми же свойствами. При этом конкретные заключения на эту тему можно делать, изучив отображение, задающее данный изоморфизм.

Пары функций из W^1 и W^2, переводимые одна в другую изоморфизмом, называем изоморфными относительно этого изоморфизма. Некоторое свойство пары $x^{(1)}(t)$, $u^{(1)}(t)$ из W^1 называем инвариантным относительно рассматриваемого изоморфизма, если из наличия его у $x^{(1)}$, $u^{(1)}$ следует наличие его у изоморфной пары $x^{(2)}(t)$, $u^{(2)}(t)$ из W^2.

Рассмотрим систему (3.1), (3.11) и систему линейного приближения для нее

$$w^{\cdot} = F_x(0)\,y + Yv$$

$$z^{\cdot} = Z_x(0)\,y, \quad y = \begin{Vmatrix} w \\ z \end{Vmatrix}, \quad w \in R^m, \; z \in R^{n-m}, \; v \in R^m \tag{7.1}$$

Для построения изоморфизма систем (3.1) и (7.1) нам потребуется уравнение

$$X_x(x)[X^{\circ}(x) + Y^{\circ}u] = X_x(0) \begin{Vmatrix} F_x(0)\,y + Yv \\ Z(x) \end{Vmatrix} \tag{7.2}$$

Решения (7.2) относительно v или u обозначим $v = v(x, y, u)$ или $u = u(x, y, v)$ соответственно. Изоморфизмы систем (3.1) и (7.1) определим как отображения

$$x(t),\; u(t) \to y(t),\, v(t);\; y(t) = \varkappa(x(t)),\; v(t) = v(x(t), \varkappa(x(t)),\; u(t)) \tag{7.3}$$

$$y(t),\, v(t) \to x(t),\; u(t);\; x(t) = s(y(t)),\; u(t) = u(s(y(t)),\; y(t),\, v(t)) \tag{7.4}$$

т. е. (7.3) (соответственно (7.4)) — это отображение пары векторов x, u (y, v) в пару векторов y, $v(x, u)$, которое индуцирует отображение векторного пространства пар функций W (W°), отвечающего системе (3.1) (системе (7.1)) на W° (W).

Обозначим $D(y)$ локально липшицеву функцию $R^n \to R^m$.

Теорема 7.1. Пусть выполнены условия теоремы 6.2 и функция $X^{\circ}(x)$ непрерывно дифференцируема. При $n < 2(n - m)$ дополнительно предполагаем, что решение (3.17) удовлетворяет (3.16), а решение (5.8) удовлетворяет уравнению (5.7). Тогда

1) отображение $x(t) \to \lambda \odot_x x$; $u(t) \to \lambda \odot_u u(t)$ при $\lambda \neq 0$ является автоморфизмом системы (3.1), (3.11);

2) решения $v(x, y, u)$, $u(x, y, v)$ системы (7.2) существуют, определены однозначно, являются непрерывными функциями и отображения (7.3), (7.4) являются изоморфизмами систем (3.1), (3.11) и (7.1);

3) асимптотическая устойчивость в целом системы (7.1) с регулятором $v = D(y)$ эквивалентна асимптотической устойчивости в целом системы (3.1) с регулятором $u = u(x, \varkappa(x), D(\varkappa(x)))$ полученным с помощью изоморфизма (7.4);

4) следующие свойства инвариантны относительно автоморфизма $\lambda \odot$ и изоморфизмов (7.3), (7.4): а) стремление траектории к началу координат при $t \to \infty$, б) достижение траекторией начала координат за время T.

Доказательство. Из (6.7) следует, что

$$X_x(0)\varkappa_x(x) = X_x(x)$$

В силу (6.1) получим, что (7.2) эквивалентно уравнению

$$\varkappa_x(x)[X^\circ(x) + Y^\circ u] = \left\| \begin{matrix} F_x(0)\,y + Yv \\ Z(x) \end{matrix} \right\| \tag{7.5}$$

Из (6.10), (3.11), (3.12) и обратимости $\varkappa_x(x)$ следует, что (7.5), а следовательно, и (7.2) однозначно разрешимы относительно v или u.

Из (5.7) и равенства $0 \odot x = 0$ следует, что $Z(0) = 0$. Дифференцируемость $X^\circ(x)$ дает $Z(p) = Z_x(0)\,p + 0(p)$. Тогда из (5.7), (6.3), (6.5), (6.9) получим

$$Z_x(0)\,y = Z(x) \tag{7.6}$$

Покажем, что отображение (7.3) переводит пары $x(t)$, $u(t)$, удовлетворяющие (3.1), в пары $y(t)$, $v(t)$, удовлетворяющие (7.1). Поскольку $y = \varkappa(x)$, то получим из (7.3)

$$y^\cdot(t) = \varkappa_x(x)\,x^\cdot(t) = X_x^{-1}(0)\,X_x(0)\,\varkappa_x(x)\,x^\cdot(t) = X_x^{-1}(0)\,X_x(x)\,x^\cdot(t)$$

В силу (3.1), (7.2), (7.6) это дает

$$y^\cdot(t) = X_x^{-1}(0)\,X_x(x)[X^\circ(x) + Y^\circ u] = \left\| \begin{matrix} F_x(0)\,y + Yv \\ Z(x) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} F_x(0)\,y + Yv \\ Z_x(0)\,y \end{matrix} \right\|$$

что совпадает с (7.1).

Покажем, что (7.3) задает гомоморфизм векторных пространств $W \to W^\circ$. Выполним проверку гомоморфности относительно умножения на числа. Пусть отображение (7.3) переводит вектора x, u в y, v. Тогда $\lambda \odot_x x$, $\lambda \odot_u u$ переводятся (7.3) в некоторые вектора y', v'. В силу теоремы 6.2 $y' = \lambda y$. Нам остается показать, что $v' = \lambda v$. Из (7.2) следует

$$X_x(\lambda \odot x)[X^\circ(\lambda \odot x) + Y^\circ(\lambda \odot u)] = X_x(0) \left\| \begin{matrix} F_x(0)\,y' + Yv' \\ Z(\lambda \odot x) \end{matrix} \right\|$$

Тогда с учетом соотношений (5.7) и $y' = \lambda y$ получим

$$X_x(\lambda \odot x)[X^\circ(\lambda \odot x) + Y^\circ(\lambda \odot u)] = X_x(0) \left\| \begin{matrix} \lambda F_x(0)\,y + Yv' \\ \lambda Z(x) \end{matrix} \right\| \tag{7.7}$$

С другой стороны, из (5.8) следует, что $X_x(\lambda \odot x)\,p_x(\lambda, x) = \lambda X_x(x)$.

Умножая (7.2) на λ и учитывая (4.6), получим

$$X_x(0)\left\|\begin{matrix}\lambda F_x(0)y+\lambda Yv\\ \lambda Z(x)\end{matrix}\right\|=\lambda X_x(x)[X^\circ(x)+Y^\circ u]=$$
$$=X_x(\lambda\odot x)\,p_x(\lambda,x)\,[X^\circ(x)+Y^\circ u]=X_x(\lambda\odot x)[X^\circ(\lambda\odot x)+$$
$$+Y^\circ(\lambda\odot u)]$$

Сопоставление этого выражения с (7.7) в силу (6.1), (3.12) дает $v'=\lambda v$, что и требовалось. Проверка для операции сложения аналогична. Тем самым (7.3) — гомоморфизм $W\to W^\circ$. Аналогично доказывается, что (7.4) тоже гомоморфизм $W^\circ\to W$. Из однозначной разрешимости уравнения (7.2) и тождеств $s(\varkappa(x))\equiv x$, $\varkappa(s(y))\equiv y$ следует, что (7.3) и (7.4) — взаимно-обратные изоморфизмы. Остальные утверждения теоремы следуют из дифференциальных свойств изоморфизма $\varkappa$.

Рассмотрим, как при помощи автоморфизма $\lambda\odot$ может решаться задача синтеза регулятора. Для удобства обозначим $x_\lambda=\lambda\odot_x x$, $u_\lambda=\lambda\odot_u u$. Допустим, что в окрестности состояния равновесия $x=0$ регулятор $u=D(x)$ системы (3.1) уже построен и обеспечивает асимптотическую устойчивость состояния $x=0$. Пусть $x(t)$ — текущее состояние системы. Мы продолжим регулятор $u=D(x)$ так, чтобы он охватывал и состояние $x(t)$. Выберем $\lambda\neq 0$ достаточно малым по абсолютной величине так, чтобы вектор $x_\lambda(t)$ попал в зону действия регулятора $u=D(x)$. Полученным изоморфным траекториям $x_\lambda(t)$ и $x(t)$ отвечают изоморфные управления $u_\lambda=D(x_\lambda(t))$ и

(7.8) $$u(t)=\lambda^{-1}\odot_u D(x_\lambda(t))=\lambda^{-1}\odot_u D(\lambda\odot_x x(t))$$

Поскольку регулятор $D(x)$ обеспечивает асимптотическую устойчивость состояния равновесия, то $x_\lambda(t)\to 0$ при $t\to\infty$. Тогда для непрерывной функции $p(\lambda,x)$, $p(\lambda,0)=0$, получим $x(t)=\lambda^{-1}\odot_x x_\lambda(t)=p(\lambda^{-1},x_\lambda(t))\to 0$ при $t\to\infty$. Величина λ выбиралась малой. Поэтому выглядит естественным переход в (7.8) к пределу

(7.9) $$u(x)=\lim_{\lambda\to 0}\lambda^{-1}\odot_u D(\lambda\odot_x x)$$

Найдем связь регулятора (7.9) с регулятором, получаемым по изоморфизму системы (3.1) со своей линейной частью (7.1), определенному уравнением (7.2). Согласно (5.2) имеем

(7.10) $$X^\circ(p(\lambda^{-1},x_\lambda))+Y^\circ q(\lambda^{-1},x_\lambda,u_\lambda)=p_x(\lambda^{-1},x_\lambda)\,[X^\circ(x_\lambda)+Y^\circ u_\lambda]$$

Поскольку $p(\lambda^{-1},x_\lambda)=\lambda^{-1}\odot\lambda\odot x=x$, то домножение (7.10) слева на $X_x(x)$ с учетом равенства $\lambda^{-1}X_x(x_\lambda)=X_x(x)\,p_x(\lambda^{-1},x_\lambda)$, вытекающего из (5.8), дает

$$X_x(x)\,[X^\circ(x)+Y^\circ u]=\lambda^{-1}X_x(x_\lambda)\,[X^\circ(x_\lambda)+Y^\circ u_\lambda]$$

Подставляя сюда регулятор $u_\lambda=D(x_\lambda(t))$ при наличии предела $\lim\lambda^{-1}D(\lambda\odot x)$ $(\lambda\to 0)$ получаем с учетом (6.5) и того, что $x_\lambda\to 0$ при $\lambda\to 0$

$$X_x(x)\,[X^\circ(x)+Y^\circ u]=X_x(0)\,[X_x^\circ(0)\,y+Y^\circ\lim_{\lambda\to 0}\lambda^{-1}D(\lambda\odot x)]$$

где $\lim\lambda^{-1}X^\circ(x_\lambda)=\lim\lambda^{-1}X_x^\circ(0)\,x_\lambda=\lim X_x^\circ(0)\,\lambda^{-1}p(\lambda,x)=X_x^\circ(0)\,y$ $(\lambda\to 0)$. Сопоставление этого уравнения с (7.2) показывает, что при $v=\lim\lambda^{-1}D(\lambda\odot x)$ $(\lambda\to 0)$ это уравнение совпадает с (7.2).

Отсюда регулятор (7.9) может быть выражен через решение $u(x, \varkappa(x), v)$ уравнения (7.2) в виде

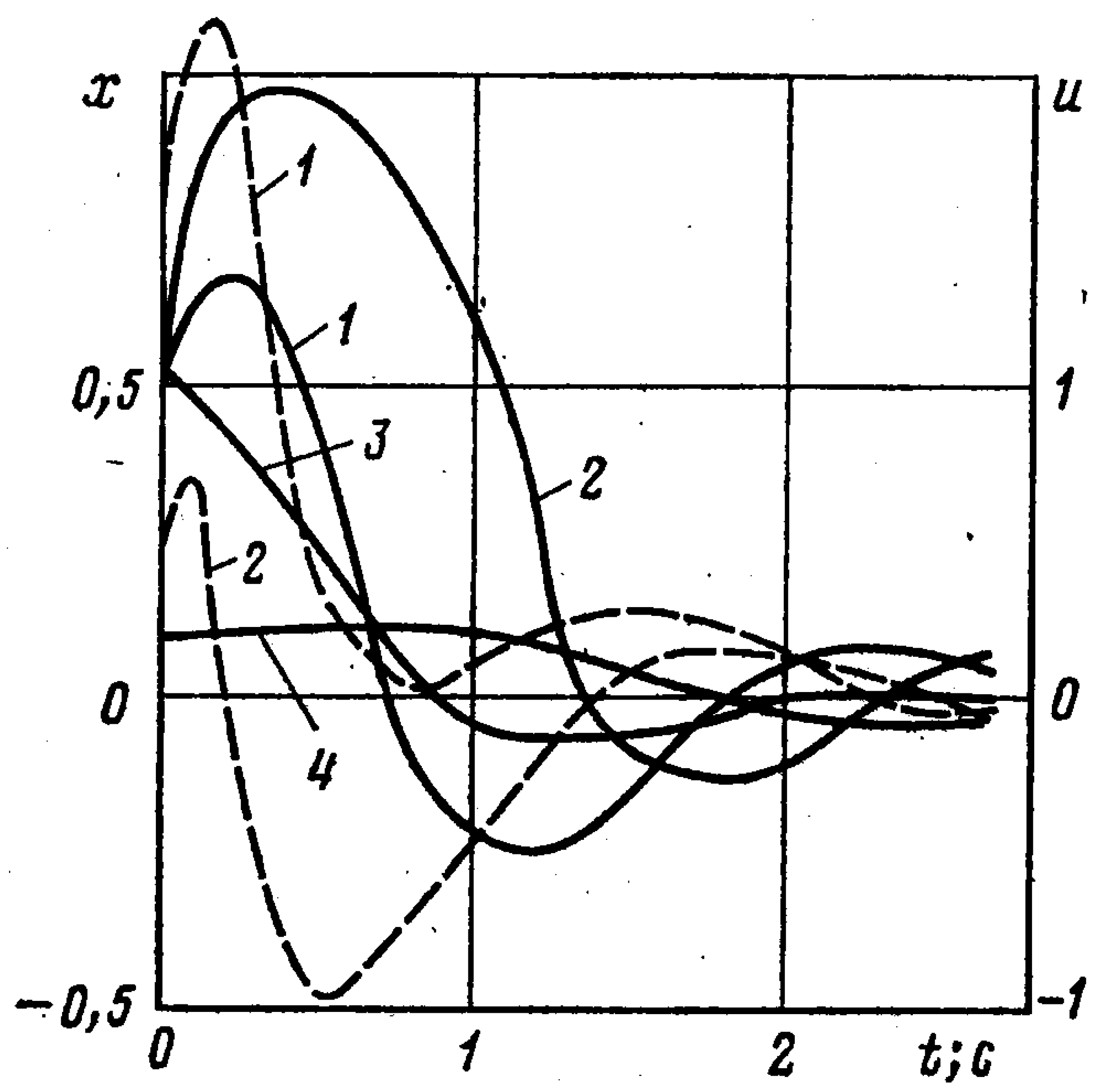
$$(7.11) \qquad u(x) = u\left(x, \varkappa(x), \lim_{\lambda\to 0} \lambda^{-1} D(\lambda \odot x)\right)$$

8. Пример. Рассмотрим управляемое вращение спутника, динамика которого описывается системой [1]

$$(8.1) \qquad x^{\cdot} = X^{\circ}(x) + u_1 Y_1^{\circ} + u_2 Y_2^{\circ}, \quad \omega(x) = [1 - (x_3^2 + x_4^2)]^{1/2}$$

$$x = \begin{Vmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_4 \end{Vmatrix}, \quad X^{\circ}(x) = \begin{Vmatrix} -2x_2 \\ 2x_1 \\ -x_2\omega(x) + x_4 \\ x_1\omega(x) - x_3 \end{Vmatrix}, \quad Y_1^{\circ} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad Y_2^{\circ} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

Координаты x_1, x_2 — компоненты спин-вектора, x_3, x_4 — компоненты некоторого вспомогательного вектора единичной длины, возникающего при переходе к инерционной системе координат из системы, жестко связанной со спутником. В качестве u_1, u_2 выступают моменты, создаваемые двумя реактивными двигателями. Ставится задача стабилизации вращения, т. е. желаемым состоянием служит вращение спутника вокруг неподвижной оси. Оно соответствует тому, что $x = 0$. Получаем стандартную задачу стабилизации нулевого состояния. Поставим задачу построения регулятора $u = u(x)$, обеспечивающего асимптотическую устойчивость в большом.



Отметим, что по определению x_3, x_4 удовлетворяют неравенству $x_3^2 + x_4^2 \leqslant 1$, поэтому процесс будем рассматривать только в этой области.

Определим $X(x)$ согласно (3.18), (3.19) как $X_1 = -x_2\omega(x) + x_4$, $X_2 = x_1\omega(x) - x_3$, $X_3 = x_3$, $X_4 = x_4$. Выполнены условия теоремы 7.1. Уравнения (3.16) примут вид

$$-x_2'\omega(x') + x_4' - x_2''\omega(x'') + x_4'' = -(x' \oplus x'')_2\, \omega(x' \oplus x'') + (x' \oplus x'')_4$$
$$x_1'\omega(x') - x_3' + x_1''\omega(x'') - x_3'' = (x' \oplus x'')_1\, \omega(x' \oplus x'') - (x' \oplus x'')_3$$

Учитывая, что согласно (3.15) $(x' \oplus x'')_3 = x_3' + x_3''$, $(x' \oplus x'')_4 = x_4' + x_4''$, получаем отсюда законы сложения для первых двух компонент векторов состояний

$$(x' \oplus x'')_k = \omega^{-1}(x' \oplus x'')[x_k'\omega(x') + x_k''\omega(x'')]; \quad k = 1, 2$$
$$\omega(x' \oplus x'') = [1 - (x_3' + x_3'')^2 - (x_4' + x_4'')^2]^{1/2}$$

Аналогично из (5.8) получим закон умножения

$$\lambda \odot x_k = [1 - \lambda^2 (x_3^2 + x_4^2)]^{-1/2} \lambda x_k \omega(x); \quad k = 1, 2; \quad \lambda \odot x_i = \lambda x_i; \ i = 3, 4$$

Отображение (6.5) $x \to \varkappa(x)$ будет иметь вид

$$y_k = \varkappa_k(x) = \lim_{\lambda\to 0} \lambda^{-1}(\lambda \odot x)_k = x_k\omega(x); \quad k = 1, 2; \quad y_3 = x_3; \quad y_4 = x_4$$

Система линейного приближения (7.1) для (8.1) запишется как

$$(8.2) \qquad y_1^{\cdot} = -2y_2 + v_1, \quad y_2^{\cdot} = 2y_1 + v_2$$
$$y_3^{\cdot} = -y_2 + y_4, \quad y_4^{\cdot} = y_1 - y_3$$

Для этой системы выбираем регулятор, обеспечивающий асимптотическую устойчивость, в виде

$$(8.3) \qquad v_1 = D_1(y) = -2y_1 + ay_3 + by_4; \quad v_2 = D_2(y) = -2y_2 + cy_3$$
$$a = 3\sqrt{5}; \quad b = -3{,}75; \quad c = 3{,}75$$

Решая уравнение (7.2), получаем регулятор, изоморфный регулятору (8.3)

$$(8.4) \qquad u_1 = -2x_1 + \omega^{-1}(x)(ax_3 + bx_4 - x_1x_2x_3 + x_1^2x_4)$$
$$u_2 = -2x_2 + \omega^{-1}(x)(cx_3 + x_1x_2x_4 - x_2^2x_3)$$

Тот же регулятор получится согласно (7.9) при

$$D_1(\lambda \odot_x x) = -2(\lambda \odot x)_1 + a(\lambda \odot x)_3 + b(\lambda \odot x)_4;\ D_2 = = -2(\lambda \odot x)_2 + c(\lambda \odot x)_3$$

Проводилось моделирование системы (8.1) с найденным регулятором (8.4) результаты которого представлены на фигуре. Сплошным кривым *1—4* соответствуют: x_1, x_2, x_3, x_4. Штриховыми кривыми *1*, *2* показаны u_1, u_2. По результатам моделирования с различными начальными условиями сделан вывод, что полученная замкнутая система устойчива в большом и характер переходных процессов для нее такой же, как у линеаризованной системы (8.2).

Отметим, что иногда оказывается полезным понизить размерность решаемой задачи ([2], § 20).

Если $Y(x)$ непрерывно зависит от x и всюду выполнено (3.6), то заменой вектора управления u на $Y(x)$ u приводим систему к виду (3.1), (3.11), т. е. зависимость $Y(x)$ от x не является препятствием для предложенного метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hermes H.* On a stabilizing feedback attitude control.— J. Optimizat. Theory and Appl., 1980, v. 31, No. 3, p. 373—384.
2. *Панасюк А. И., Панасюк В. И.* Асимптотическая оптимизация нелинейных систем управления. Минск: Изд-во БГУ, 1977. 204 с.

Поступила в редакцию 28.V.1982

Минск