Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 4, 1984

УДК 531.36 + 62—50

ОБ ОЦЕНКЕ ОБЛАСТИ УПРАВЛЯЕМОСТИ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Блинов А. П.

Для некоторого класса нелинейных управляемых систем дается оценка области управляемости, т. е. области фазового пространства, из каждой точки которой эта система может быть переведена в любую другую точку области допустимым управлением.

1. Рассмотрим дифференциальные уравнения возмущенного движения управляемой системы (в векторной записи)

$$x^{\cdot} = \Phi(x, u), \quad \Phi \in C^1(R^n \times Q_0), \quad Q_0 \subseteq R^m \tag{1.1}$$

Здесь u — вектор управляющих воздействий из ограничивающего множества $Q \subseteq Q_0$, для которого вектор $u = 0$ — внутренняя точка; R^n, R^m — вещественные пространства размерности n и m соответственно ($m \leqslant n$).

Следуя [1], определим область нуль управляемости как множество начальных точек $x_0 \in R^n$, из которых систему (1.1) можно привести в точку $x = 0$ посредством ограниченных измеримых управлений $u(t) \in Q$, определенных на некотором конечном отрезке времени.

Известно ([1], с. 432), что если для управляемой системы (1.1) существует определенно-положительная функция Ляпунова $V(x)$ и m-мерная вектор-функция $u_R(x)$ в R^n класса C^1, такие, что

$$\lim_{|x|\to\infty} V(x) = \infty; \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \Phi_i(x, u_R(x)) < 0, \quad x \neq 0$$

$\Phi(0, 0) = 0$, ($|\cdot|$ — длина вектора)
и выполняется условие локальной управляемости

$$\operatorname{rank}[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = n, \quad 0 \in Q, \quad A = \Phi_x(0, 0) \tag{1.2}$$
$$B = \Phi_u(0, 0)$$

то область нуль-управляемости для системы (1.1) совпадает с R^n.

Рассмотрим случай, когда можно дать конструктивную оценку области нуль управляемости.

Пусть для системы (1.1) при отсутствии управлений известна функция Ляпунова $V(x)$, определенно-положительная в области $\Omega_0 \subset R^n$, $0 \in \Omega_0$, производная по времени от которой в силу уравнений (1.1) (при $u \equiv 0$)

$$V_0^{\cdot} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \Phi_i(x, 0)$$

является неположительной функцией в Ω_0.

Возьмем некоторую функцию $U(u) \in C^1(Q_0)$, определенно-положительную относительно $u \in Q_0$, например определенно-положительную квадратичную форму. Составим выражение

$$F_\Sigma(x,u) \equiv \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial V}{\partial x_i}[\Phi_i(x,u) - \Phi_i(x,0)] + U(u) \tag{1.3}$$

и разобьем его на m слагаемых,

$$F_\Sigma(x,u) = \sum_{k=1}^{m} F_k(x,u)$$

$$F_k(x,u) \equiv \sum_{j=1}^{n_k} \frac{\partial V}{\partial x_j}[\Phi_j(x,u) - \Phi_j(x,0)] + U_k(u)$$

$$U_k(u) \geqslant 0; \quad \sum_{k=1}^{m} U_k(u) = U(u); \quad k = 1, \ldots, m; \quad n_1 + \ldots + n_m = n$$

Выделим из функций $F_k(x, u)$ сомножители вида $F_k^{**}(u)$, если таковые имеются, т. е. запишем $F_k(x, u)$ в виде $F_k(x, u) = F_k^*(x, u)\, F_k^{**}(u)$ и рассмотрим систему уравнений

$$F_k^*(x, u) = 0, \quad k = 1, \ldots, m \tag{1.4}$$

Вектор-функция $F^*(x, u)$ определена и непрерывно дифференцируема в области $R^n \times Q$ и $F^*(0, 0) = 0$.

Предположим, что функциональный определитель $|\partial F_k^*(x, u)/\partial u_j|$ отличен от нуля в каждой точке (x, u) открытого множества $S \subset R^n \times Q_0$, содержащего точку $x = 0$, $u = 0$.

Пусть R_x, R_u — два таких положительных числа, что при $|x| \leqslant R_x$, $|u| \leqslant R_u$ точка (x, u) принадлежит открытому множеству S и для нее выполняется неравенство

$$\left|\frac{\partial}{\partial u_j} g_k(x,u)\right| \leqslant \frac{a}{n^2}, \quad k, j = 1, \ldots, m \tag{1.5}$$

Здесь a — любое число из интервала $(0, 1)$, $g_k(x, u)$ — координата вектор-функции $g(x, u)$

$$g(x, u) = u - B^{-1}F^*(x, u) \tag{1.6}$$

B — матрица коэффициентов $b_{kj} = \partial F_k^*(0, 0)/\partial u_j$.

Тогда из теоремы о неявной функции [2] следует, что существует непрерывное и единственное решение $u = u_c(x)$, $u_c(0) = 0$ уравнения $F^*(x, u) = 0$ на открытом множестве Ω_1, определенном неравенством $|x| < R_{0x} \leqslant R_x$ и

$$|g(x, 0) - g(0, 0)| < (1 - a) R_u \tag{1.7}$$

(В принятых предположениях число R_{0x} обязательно существует и может быть вычислено.)

Некоторый произвол при выборе функции $U(u)$ и при разбиении выражения $F_\Sigma(x, u)$ на слагаемые может быть использован для наиболее легкого определения управления $u_c(x)$.

Например, если функции $\Phi_i(x, u)$ могут быть представлены в виде

$$\Phi_i(x,u) = \Phi_i(x) + \sum_{j=1}^{m} \Phi_{ij}(x) u_j + \sum_{k,j=1}^{m} \Phi_{ikj}(x) u_k u_j \tag{1.8}$$

то, полагая

$$U(u) = \sum_{k,j=1}^{m} \alpha_{kj} u_k u_j$$

получим

$$F_\Sigma(x, u) \equiv \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\Phi_{ij}(x)\right)u_j +$$
$$+\sum_{k,\,j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\Phi_{ikj}(x)+\alpha_{kj}\right)u_k u_j$$

Поэтому слагаемые вида $F_k^*(x, u)$ и уравнения (1.4) здесь получаются естественным образом

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\Phi_{ij}(x)+\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\Phi_{ikj}(x)+\alpha_{kj}\right)u_k=0$$

Таким образом, в рассматриваемом случае задача определения управлений свелась к решению системы линейных уравнений.

Из построения управления $u = u_c(x)$ видно, что оно будет стабилизировать невозмущенное движение $x = 0$ системы (1.1), если, согласно теореме Барбашина — Красовского, многообразие $M \subset R^n$, определяемое выражением $V_0^{\boldsymbol{\cdot}}(x) - U(u_c(x)) = 0$, не содержит целых траекторий системы (1.1).

Пусть ограничивающее множество Q зависит от x и определяется выражением

(1.9) $$Q(x) = \{\,|u_j| \leqslant u_{0j}(x) \subset C(R^n),\ 0 < u^* = \text{const} \leqslant u_{0j}(x) \leqslant \leqslant u^{**} = \text{const},\ j = 1, \ldots, m\}$$

Если $Q_1 \setminus Q \neq 0$, то определим управления

(1.10) $$u_j = u_j^\circ(x) = \begin{cases} u_{0j}(x)\,\operatorname{sign} u_{cj}(x), & |u_{cj}(x)| \geqslant u_{0j}(x)\\ u_{cj}(x), & |u_{cj}(x)| < u_{0j}(x);\ ((u_{c1}, \ldots, u_{cm}) = u_c)\end{cases}$$

Поскольку управления $u_j^\circ(x)$ непрерывны, то производная $V^{\boldsymbol{\cdot}}$ в силу системы (1.1) при $u_j = u_j^\circ(x)$ определена в Ω_1. Пусть каждая из сумм

$$\Sigma_k = \sum_{j=1}^{n_k}\frac{\partial V}{\partial x_j}\Phi_j(x, u), \qquad k = 1, \ldots, m$$

может изменять знак при фиксированном $x \in \Omega_1$ только при одновременном изменении знака всех входящих в Σ_k управлений. Тогда производная $V^{\boldsymbol{\cdot}}$ в силу системы (1.1) при $u_j = u_j^\circ(x)$ может обращаться в нуль только при $x \in M$.

Следовательно, система (1.1) может быть стабилизирована ограниченными управлениями из множества $Q(x)$, т. е. область Ω_1 лежит в области нуль-управляемости системы (1.1). Очевидно, что в случае (1.8) $\Omega_1 = \Omega_0$.

Отметим, что использование известной функции Ляпунова для построения оптимальных стабилизирующих управлений для системы (1.1), когда функции $\Phi_i(x, u)$ — многочлены степени первой или второй относительно управлений, было предложено ранее [3, 4].

В некоторых случаях доказательство стабилизируемости невозмущенного движения системы (1.1) в области Ω_0 упрощается введением нового вектора управлений v, связанного с исходным вектором управлений u взаимнооднозначным и непрерывным в окрестностях Q_u, Q_v точек $u = 0$, $v = 0$ соотношением $v = v(u)$, при котором правая часть системы (1.1) приобретает более простой вид, например становится линейной относительно новых управлений, т. е.

$$(1.11)\qquad \Phi_i(x, u(v)) = \Phi_{0i}(x) + \sum_{j=1}^{m} \Phi_{ij}(x) v_j, \quad i = 1, \ldots, n$$

Поясним это замечание примером. В работе [5] рассмотрена задача оптимальной стабилизации стационарного движения спутника относительно центра масс, расположенного в треугольной точке либрации системы двух тел, изменением моментов инерции спутника. Правая часть уравнений возмущенного движения такой управляемой системы имеет вид (1.11).

Устойчивое в области либрационного движения Ω_0 стационарное движение спутника стабилизируемо управлениями v_j ($j = 1, 2, 3$) как без ограничений, так и при ограничениях вида (1.9). В этой задаче управления v_j — функции перемещений u_j центров масс перемещаемых массивных штанг имеют следующий вид:

$$(1.12)\qquad v_1 = \frac{1}{w_1} - \frac{1}{B_0}, \quad v_2 = \frac{w_2}{w_4} - \frac{A_0 - B_0}{A_0 + C_0}, \quad v_3 = \frac{w_3}{w_4} - \frac{A_0 - C_0}{A_0 + C_0}$$

Здесь

$$w_1 = B_0 + \lambda_1 u_1 + \lambda_3 u_3 + m_1 u_1^2 + m_3 u_3^2$$
$$w_2 = A_0 - B_0 + \lambda_2 u_2 - \lambda_3 u_3 + m_2 u_2^2 - m_3 u_3^2$$
$$w_3 = A_0 - C_0 - \lambda_1 u_1 + \lambda_3 u_3 - m_1 u_1^2 + m_3 u_3^2$$
$$w_4 = A_0 + C_0 + \lambda_1 u_1 + 2\lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + m_1 u_1^2 + 2m_2 u_2^2 + m_3 u_3^2$$

$A_0, B_0, C_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, m_1, m_2, m_3$ — положительные постоянные параметры задачи ($B_0 > C_0 > A_0$).

Для оценки областей Q_u и Q_v используем выражения (1.5), (1.6), (1.7), в которых на месте функции $F^*(x, u)$, $g(x, u)$ следует взять соответственно функции $F(v, u)$, $g(v, u)$ с координатами

$$F_j(v, u) = \zeta_j - v_j, \quad g_j(v, u) = u_j - \langle B_j, F(v, u)\rangle$$

$$g_j(0, 0) = 0, \quad g_j(v, 0) = \sum_{k=1}^{3} B_{jk} v_k, \quad j = 1, 2, 3$$

Здесь $B_j = (B_{j1}, B_{j2}, B_{j3})$. B_{jk} — элементы матрицы B^{-1}, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение векторов, ζ_j — соответствующие правые части выражений (1.12).

Так как производные $\partial g_k(v, u)/\partial u_j$ — гладкие, зависящие только от u функции, обращающиеся в нуль при $u = 0$, то после перехода от неравенства вида (1.5) к равенствам (при фиксированном a) получим уравнения поверхностей, ограничивающих область Q_u. Кроме этих поверхностей область Q_u здесь ограничивают также и поверхности, являющиеся границами области определения функций $F_j(v, u)$, описываемые уравнениями $w_1(u) = 0$, $w_4(u) = 0$. Поэтому величина R_u здесь представляет минимальное расстояние от точки $u = 0$ до указанных поверхностей. Неравенства (1.7) имеют вид

$$\left|\sum_{k=1}^{3} B_{jk} v_k\right| < (1 - a) R_u, \quad j = 1, 2, 3$$

Таким образом, область Q_v ограничена плоскостями

$$\sum_{k=1}^{3} B_{jk} v_k = \pm (1 - a) R_u, \quad j = 1, 2, 3$$

Если R_{0v} — минимальное расстояние от этих плоскостей до точки $v = 0$, то выполнение условия $u^{**} < {}^2/_3 R_{0v}$ гарантирует решение задачи стабилизации стационарного движения спутника управлениями u_1, u_2, u_3 с ограничениями вида (1.9).

Возвращаясь к общему случаю, будем считать, что для управляемой системы (1.1) оценка области Ω_1 известна.

Если для такой системы выполняется и условие (1.2), то согласно теореме 1 ([1], с. 399) ее область нуль-управляемости открыта в R^n. Следовательно, любая точка области Ω_1 допустимым управлением, т. е. измеримой функцией $u(t) \in Q(x)$, может быть переведена в начало координат за конечное время.

Отметим следующие свойства управляемой системы (1.1), (1.2), (1.9).

Множество $Q(x)$ замкнуто, ограничено и, в силу непрерывности ограничивающих функций $u_{0j}(x)$, полунепрерывно сверху относительно включения (по x), т. е. справедливо предложение

$$(\forall x \in R^n)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta = \delta(\varepsilon, x) > 0)\,(\forall x', \, |x - x'| < \delta) : Q(x') \in Q_\varepsilon(x)$$

Здесь $Q_\varepsilon(x)$ — ε — окрестность множества $Q(x)$.

Когда вектор u пробегает множество $Q(x)$, тогда вектор-функция $\Phi(x, u)$ пробегает некоторое множество $R(x)$, которое также полунепрерывно сверху относительно включения.

Кроме того, в случае линейной зависимости $\Phi(x, u)$ от u множество $R(x)$ выпукло (при любом $x \in R^n$).

Пусть для системы (1.1), кроме перечисленных свойств, множество $R(x)$ выпукло и выполняется неравенство [6]

$$\langle x, \Phi(x, u)\rangle \leqslant c\,(|x|^2 + 1), \qquad c = \mathrm{const}, \qquad u \in Q(x)$$

Тогда для каждой точки $x \in R^n$ будут выполняться условия теоремы 1 [6], из которой следует, что для каждой точки области Ω_1 существует допустимое управление, переводящее эту точку в начало координат за наименьшее возможное время.

2. Рассмотрим теперь задачу оценки области нуль-управляемости для управляемой автономной системы, записанной в форме уравнений Лагранжа

$$(2.1) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i^{\cdot}} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{m} F_{ij}(q)\, u_j$$

не предполагая стационарное движение $q_i = 0$, $q_i^{\cdot} = 0$, $(i = 1, \ldots, n)$ устойчивым при $u_j \equiv 0$ $(j = 1, \ldots m)$.

Пусть при $q = 0$ потенциальная энергия системы (2.1) имеет максимум, равный нулю: $\Pi(0) = 0$, а ограничивающие функции от обобщенных скоростей не зависят, т. е. в условиях (1.9) $u_{0j} = u_{0j}(q)$.

Представим управления в виде

$$(2.2) \qquad u_j = v_j + w_j, \quad |v_j| \leqslant \mu u_{0j}(q), \quad \mu \in (0, 1)$$

$$\sum_{j=1}^{m} F_{ij}(q)\, w_j = (1 + \mu)\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \qquad i = 1, \ldots, n$$

и предположим, что уравнения (2.2) совместны и допускают решения $w_j = w_j^*(q)$, $w_j^*(0) = 0$ в области G_F, содержащей точку $q = 0$ конфигурационного пространства G. В области G_F определим поверхности γ_j^+, γ_j^- соответственно уравнениями $\pm(1 - \mu)\, u_{0j}(q) = w_j^*(q)$. (Если для некоторых j эти уравнения не имеют решений, то соответствующие поверхности отсутствуют.)

Область G_μ, содержащая точку $q = 0$ и ограниченная поверхностями γ_j^+, γ_j^- и границей области G_F, очевидно, не пуста для достаточно малых μ. На ограниченном множестве $\mu \in (0, 1)$ существует значение $\mu = \mu^*$, при котором область G_μ будет содержать наиболее удаленную от начала координат замкнутую поверхность постоянного уровня функции $(-\mu^*\Pi)$, описываемую уравнением $-\mu^*\Pi = \Pi^*$, $\Pi^* = \mathrm{const} > 0$.

Запишем уравнения, соответствующие управляемой системе (2.1) после перехода к новым управлениям

$$(2.3) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i^{\cdot}} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \mu\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{m} F_{ij}(q)\, v_j$$

Для любых начальных возмущений из области Ω^* фазового пространства R^{2n}, ограниченной поверхностью интегрального многообразия системы (2.3) при $u \equiv 0$

$$H(q, q^{\cdot}) \equiv T(q, q^{\cdot}) - \mu\Pi(q) = \Pi^*$$

невозмущенное движение $q = 0$, $p = 0$ устойчиво и стабилизируемо непрерывным, ограниченным управлением. Следовательно, при дополнительных предположениях, определенных в п. 1 область Ω^* может служить оценкой области нуль-управляемости.

Отметим, что добавление к системе (2.1) непотенциальных сил, обращающихся в нуль в начале координат, не вносит принципиальных затруднений при определении области Ω^*.

Одноопорная ходьба плоской нелинейной модели шагающего аппарата по горизонтальной плоскости описывается [7] системой пяти дифференциальных уравнений вида (2.3). Может представлять интерес задача наибыстрейшего приведения аппарата в верхнее неустойчивое положение равновесия. Поскольку размерность вектора управления здесь равна числу уравнений, то система вида (2.2) совместна.

В линейном приближении уравнения движения шагающего аппарата в окрестности верхнего неустойчивого положения равновесия имеют вид

$$\sum_{j=1}^{5} a_{ij}q_j^{\cdot\cdot} = \sum_{j=1}^{5} b_{ij}q_j + u_i, \quad b_{ij} = b_{ji}, \quad i, j = 1, \ldots, 5 \tag{2.4}$$

Так как размерность вектора управления равна числу уравнений, условия управляемости системы (2.4) выполняются. (В случае скалярного управления условия управляемости системы вида (2.4) получены в работе [8].) Другие условия существования области Ω^* (п. 1) здесь также выполняются.

3. Рассмотрим теперь задачу оценки области полной управляемости системы (1.1), т. е. такого множества, из любой точки которого допустимым управлением фазовая точка может быть переведена за конечное время в любую точку этого множества.

Пусть $D(t)$ — множество точек $x \in R^n$, в которые фазовая точка может быть переведена из начального положения $x = 0$ при $t = 0$ при помощи допустимого управления за время $t > 0$, т. е. $D(t)$ — область нуль-достижимости [1].

Для линейных управляемых систем установлено ([1], с. 78, 92), что при условии (1.2) множество $D(t)$ компактно, выпукло и непрерывно зависит от t. Используя метод теоремы 1 ([1], с. 399), можно установить, что при выполнении условия локальной управляемости системы (1.1) множество $D(t)$ имеет открытую окрестность E, содержащую точку $x = 0$. Кроме того, множество $D(t)$ связно и $D(t_1) \subseteq D(t_2)$, если $t_1 \leqslant t_2$. Оценки таких множеств получены в [9].

Пусть D_∞ — объединение всех множеств $D(t)$ для $t < \infty$.

Покажем, что для гамильтоновой управляемой системы

$$q^{\cdot} = \partial H(q, p)/\partial p, \; p^{\cdot} = -\partial H(q, p)/\partial q + F(q, p)u, \; (q, p) \in R^{2n} \tag{3.1}$$

удовлетворяющей требованиям п. 1, множество D_∞ содержит область Ω_0 (п. 1).

Если система (3.1) стабилизируема непрерывным допустимым управлением $u = u_c$ и $M \cap \Omega_0 = 0$, то утверждение очевидно.

Пусть $M \cap \Omega_0 \neq 0$. Предположим, что $\Gamma = \Omega_0 \setminus D_\infty \neq 0$. Рассмотрим последовательность интегральных многообразий $I(h)$ системы (3.1) ($u \equiv 0$), соответствующих интегралам энергии $H(q, p) = h$, $H(0, 0) = 0$ при $h \to 0$, ($h \geqslant 0$) и содержащих точки множества Γ. В силу существования открытой окрестности $E \subset D_\infty$ должно выполняться неравенство $\inf h = h_* > 0$.

Выберем последовательность точек $x_h \in I(h) \cap \Gamma$, сходящуюся к точке $x_* \in I(h_*)$ при $h \to h_*$. Так как при замене стабилизирующего управления $u = u_c$ на управление $u = -u_c$ фазовые точки будут двигаться к границе области Ω_0, пересекая поверхность $I(h_*)$ под углами, отличными от нуля, за исключением точек многообразия M, то $x_* \in M$.

Точка x_* не может принадлежать множеству Γ, так как через конечное время она должна покинуть множество M при $u \equiv 0$ (поскольку M целых траекторий не содержит) и через конечное время должна попасть в точку x_H поверхности $I(h_*)$, через которую проходит траектория, пересекающая поверхность $I(h_*)$ без касания при $u = -u_c$. По свойству непрерывной зависимости решений от начальных условий существует окрестность σ точки x_H, в которой траектории при $u = -u_c$ пересекают интегральные поверхности без касания.

Поскольку x_* — точка прикосновения множества Γ, то для любого числа $\varepsilon > 0$ существует столь малое число $\delta > 0$, при котором интегральное многообразие $I(h_* + \delta)$ содержит точку $x_\delta \in \Gamma$, $|x_H - x_\delta| < \varepsilon$. Очевидно, траектория γ, проходящая через точку x_δ^* при $u \equiv 0$, целиком принадлежит множеству Γ. По свойству непрерывной зависимости решений от начальных условий (при $u \equiv 0$) при достаточно малом ε эта траектория должна пересечь окрестность σ. Следовательно, фазовый поток системы 3.1) при $u = -u_c$ перемещает некоторые точки множества D_∞ в некоторые точки траектории γ, что по предположению невозможно. Следовательно, множество Γ пусто и $\Omega_0 \subseteq D_\infty$.

(По аналогии для п. 2 имеем $\Omega^* \subseteq D_\infty$.)

Полученный результат может быть использован, в частности, для перевода фазовой точки из одного устойчивого положения равновесия в другое устойчивое или неустойчивое положение равновесия, если соответствующие границы областей Ω_0 имеют общую точку, в которой выполняется свойство локальной управляемости. Такие условия выполняются, например, в задаче об оптимальной переориентации спутника [10].

Рассмотрим еще пример. Известно [11], что гироскопический маятник может быть стабилизирован в верхнем неустойчивом положении равновесия лишь одним управляющим моментом, направленным по оси вращения карданной рамки. Можно проверить, что здесь область Ω_0, содержащая нижнее устойчивое положение равновесия гиромаятника, граничит с неустойчивым верхним положением равновесия, в котором выполняется условие локальной управляемости. Следовательно, из любой точки области Ω_0, в частности из нижнего положения равновесия, гиромаятник может быть переведен допустимым управлением в верхнее положение равновесия за минимально возможное время.

Автор благодарит В. А. Самсонова за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
2. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974, 332 с.

3. *Румянцев В. В.* Об оптимальной стабилизации управляемых систем.— ПММ, 1970, т. 34, вып. 3, с. 440—456.
4. *Румянцев В. В.* Об управлении и стабилизации систем с циклическими координатами.— ПММ, 1972, т. 36, вып. 6, с. 966—976.
5. *Блинов А. П.* К оптимальной стабилизации управляемых систем.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 3, с. 366—373.
6. *Филиппов А. Ф.* О некоторых вопросах теории оптимального управления.— Вестн. МГУ, 1959, № 2, с. 25—32.
7. *Белецкий В. В., Бербюк В. Е., Самсонов В. А.* Параметрическая оптимизация движений двуногого шагающего аппарата.— Изв. АН СССР, МТТ, 1982, № 1, с. 28—40.
8. *Габриелян М. С.* О стабилизации неустойчивых движений механических систем.— ПММ, 1964, т. 28, вып. 3, с. 493—501.
9. *Овсеевич А. И., Черноусько Ф. Л.* Двусторонние оценки областей достижимости управляемых систем.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 5, с. 737—745.
10. *Анчев А. А., Меликян А. А.* Об оптимальной переориентации спутника на круговой орбите.— Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 6, с. 37—42.
11. *Красовский Н. Н.* Обобщение теорем второго метода Ляпунова.— В кн.: Малкин Н. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966, с. 463—474.

Москва

Поступила в редакцию
22.IV.1983