

УДК 531.36 + 62—50

## СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ С ДВУМЯ ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Федунов Б. Е., Хлебников С. Н.

Дается синтез оптимального управления системой, которая описывается линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами (колебательное звено) и имеет два ограничения на фазовые координаты (одно из них смешанное). Описываются свойства оптимальных фазовых траекторий.

**1. Постановка задачи.** При конструировании приводов измерительных систем возникает следующая задача. Измерительной системе, предназначенной для слежения за внешним объектом, первоначально дается угловое положение объекта. По полученному сигналу привод системы разворачивает ее визирный луч по заданному направлению. Необходимо обеспечить максимально быстрый разворот визирного луча с учетом ограничения по скорости его движения и максимально допустимой потребляемой мощности.

Из этой постановки выделим задачу синтеза оптимального по быстродействию управления  $\bar{u}^\circ$ , переводящего систему

$$(1.1) \quad \begin{aligned} dy/dt &= -2\xi/Ty - \varphi/T^2 + \bar{u}/T^2, & d\varphi/dt &= y \\ T > 0, & 0 < \xi < 1 \end{aligned}$$

из произвольных допустимых точек  $\varphi, y$  в начало координат, при ограничениях на управление  $\bar{u}$ , на фазовые координаты

$$(1.2) \quad |\bar{u}| \leq \bar{u}_0, \quad |y| \leq 2\bar{y}_0, \quad |y dy/dt| \leq 4\bar{P}_0$$

(второе условие соответствует ограничению по скорости, третье — ограничению по мощности).

Далее рассмотрим случай  $\xi \notin (0,519 \div \sqrt{2}/2)$  (см. п. 5).

Известно [1], что вид искомым оптимальных траекторий при фазовых ограничениях из (1.2) существенно зависит от вида корней характеристического уравнения (1.1)

$$\lambda_{1,2} = \kappa \pm \mu i, \quad \kappa = -\xi/T < 0, \quad \mu = (1 - \xi^2)^{1/2}/T$$

Преобразованием переменных

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \left\| \begin{matrix} z \\ \delta \end{matrix} \right\| &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2\kappa\mu^{-1} & -A \end{pmatrix} \left\| \begin{matrix} y \\ \varphi \end{matrix} \right\|; & \left( A = \frac{\kappa^2 + \mu^2}{2\mu} \right) \end{aligned}$$

приведем систему уравнений (1.1) и ограничений (1.2) к виду, удобному для исследования

$$(1.4) \quad dz/dt = \kappa z + \mu\delta + \mu u, \quad d\delta/dt = -\mu z + \kappa\delta + \kappa u$$

$$(1.5) \quad |u| \leq u_0, \quad u_0 = A\bar{u}_0$$

$$(1.6) \quad |z| \leq y_0, \quad y_0 = \bar{y}_0/2$$

$$(1.7) \quad z(\kappa z + \mu\delta + \mu u) \leq P_0$$

$$(1.8) \quad -P_0 \leq z(\kappa z + \mu\delta + \mu u), \quad P_0 = \bar{P}_0/4$$

Главным отличием сформулированной задачи (1.4)—(1.8) от задачи, рассмотренной в [2], является наличие смешанных фазовых ограничений (1.7), (1.8) и описание системы (1.4) колебательным звеном.

2. Условия оптимальности управления  $u^\circ$  [1, 3, 4]. Существуют: постоянная  $\alpha_J \geq 0$ , функции  $\psi_1, \psi_2, \psi_t, d\mu_1^\pm/dt, d\mu_2^\pm/dt$ , удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_1^\pm}{dt} (\pm z - y_0) &= 0, \quad \frac{d\mu_1^\pm}{dt} \geq 0 \\ \frac{d\mu_2^\pm}{dt} [\pm z (\kappa z + \mu\delta + \mu u) - P_0] &= 0, \quad \frac{d\mu_2^\pm}{dt} \geq 0 \end{aligned}$$

(индекс плюс (минус) соответствует случаю  $z = y_0$  ( $z = -y_0$ ) и равенству (1.7), (1.8)) и сопряженной системе дифференциальных уравнений ( $t_1$  — момент окончания управления)

$$\begin{aligned} (2.1) \quad -\frac{d\psi_1}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial z} = \kappa\psi_1 - \mu\psi_2 - (\pm 1) \frac{d\mu_1^\pm}{dt} - \\ &- \frac{d\mu_2^\pm}{dt} [\pm (\kappa z + \mu\delta + \mu u) \pm \kappa z] \\ -\frac{d\psi_2}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \delta} = \mu\psi_1 + \kappa\psi_2 - \frac{d\mu_2^\pm}{dt} (\pm \mu z) \\ -\frac{d\psi_t}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial t}, \quad \psi_t(t_1) = -\alpha_J \\ H &= \psi_1 (\kappa z + \mu\delta + \mu u) + \psi_2 (-\mu z + \kappa\delta + \kappa u) + \psi_t - \\ &- \frac{d\mu_1^\pm}{dt} (\pm z - y_0) - \frac{d\mu_2^\pm}{dt} [\pm z (\kappa z + \mu\delta + \mu u) - P_0] \end{aligned}$$

На оптимальной фазовой траектории  $z^\circ(t), \delta^\circ(t)$  оптимальное управление  $u^\circ(t)$  обеспечивает в каждый момент  $t$

$$\begin{aligned} (2.2) \quad \max_{u \in V_{z, \delta, t}^*} & [\psi_1 (\kappa z + \mu\delta + \mu u) + \psi_2 (-\mu z + \kappa\delta + \kappa u)] \\ V_{z, \delta, t}^* &= \{u : |z (\kappa z + \mu\delta + \mu u)| - P_0 \leq 0, |u| \leq u_0\} \end{aligned}$$

3. Управление системой внутри фазовых ограничений. Рассмотрим движение системы (1.4) на интервалах времени, где система не выходит на ограничения (1.6), (1.7). Тогда из п. 2 следует, что

$$d\mu_1^\pm/dt \equiv 0, \quad d\mu_2^\pm/dt \equiv 0$$

и приходим к задаче, рассмотренной в [1].

Из решения (2.1) имеем

$$(3.1) \quad \psi_1(t) = Ce^{-\kappa t} \sin(\mu t + \alpha), \quad \psi_2(t) = Ce^{-\kappa t} \cos(\mu t + \alpha)$$

( $C, \alpha$  — произвольные постоянные интегрирования).

Оптимальное управление

$$(3.2) \quad u^\circ = u_0 \text{sign}(\mu\psi_1 + \kappa\psi_2)$$

сохраняет знак на максимальном временном интервале  $\Delta t = \pi/\mu$ .

Отметим, что внутри фазовых ограничений имеем

$$(3.3) \quad d(\mu\psi_1 + \kappa\psi_2)/dt = -2\kappa(\mu\psi_1 + \kappa\psi_2) + (\mu^2 + \kappa^2)\psi_2$$

Обозначим через  $e_\pm = (a_\pm^{(1)}, a_\pm^{(2)})$  точки покоя системы (1.4) при  $u = \pm u_0$ . Имеем

$$\begin{aligned} \kappa a_\pm^{(2)} + \mu a_\pm^{(1)} + \mu(\pm u_0) &= 0 \\ -\mu a_\pm^{(2)} + \kappa a_\pm^{(1)} + \kappa(\pm u_0) &= 0 \\ a_\pm^{(2)} = 0, \quad a_\pm^{(1)} &= -(\pm u_0) \end{aligned}$$

и относительно этих точек

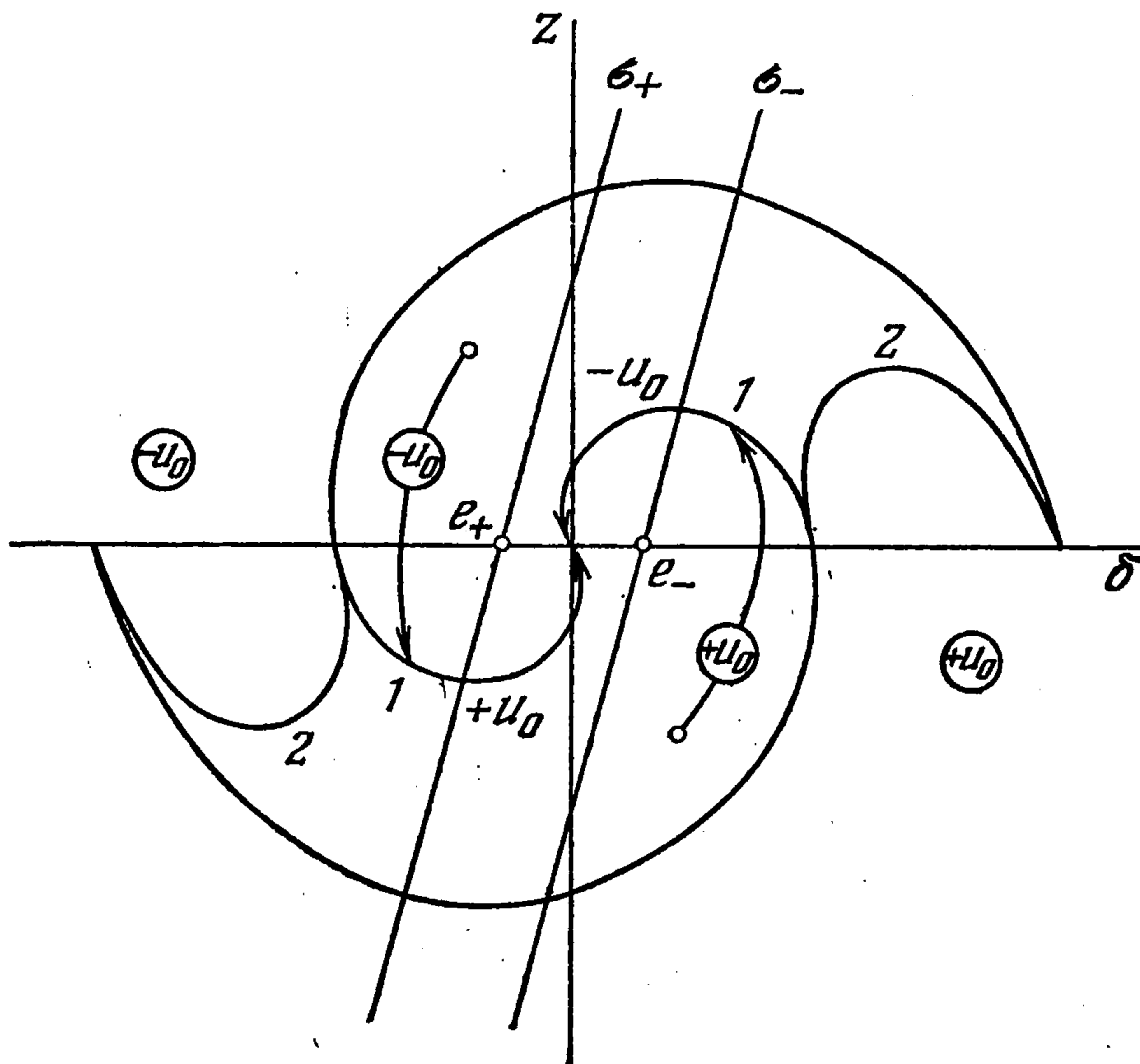
$$(3.4) \quad \begin{aligned} dz/dt &= \kappa z + \mu (\delta - a_{\pm}^{(1)}) \\ d(\delta - a_{\pm}^{(1)})/dt &= -\mu z + \kappa (\delta - a_{\pm}^{(1)}) \end{aligned}$$

или

$$(3.5) \quad z = Ce^{\kappa t} \sin(\mu t + \beta), \quad \delta - a_{\pm}^{(1)} = Ce^{\kappa t} \cos(\mu t + \beta)$$

( $C, \beta$  — произвольные постоянные интегрирования).

Участки фазовых траекторий системы (1.4) с  $\pm u_0$ , проходящие через начало координат, составляют те концевые участки оптимальных фазовых траекторий системы, по которым она непосредственно входит в начало координат. На этих же участках происходит изменение знака оптимального управления. Назовем их первыми участками линии переключения (ЛП). Начало и конец первых участков ЛП находится на прямой  $z = 0$ .



Фиг. 1

Построение непосредственно примыкающих вторых и т. д. участков ЛП производится по правилам из [1]. ЛП с первыми (1) и вторыми (2) участками показана на фиг. 1. В кружках на фигуре отмечены значения оптимального управления в соответствующей области фазового пространства  $(\delta, z)$  — синтез оптимального управления внутри фазовых ограничений.

Отметим, что экстремальные значения координаты  $z$  на ветвях оптимальных траекторий с  $u^0 = \pm u_0$  находятся на прямых

$$(3.6) \quad z = \mu (\delta - a_{\pm}^{(1)})/\kappa$$

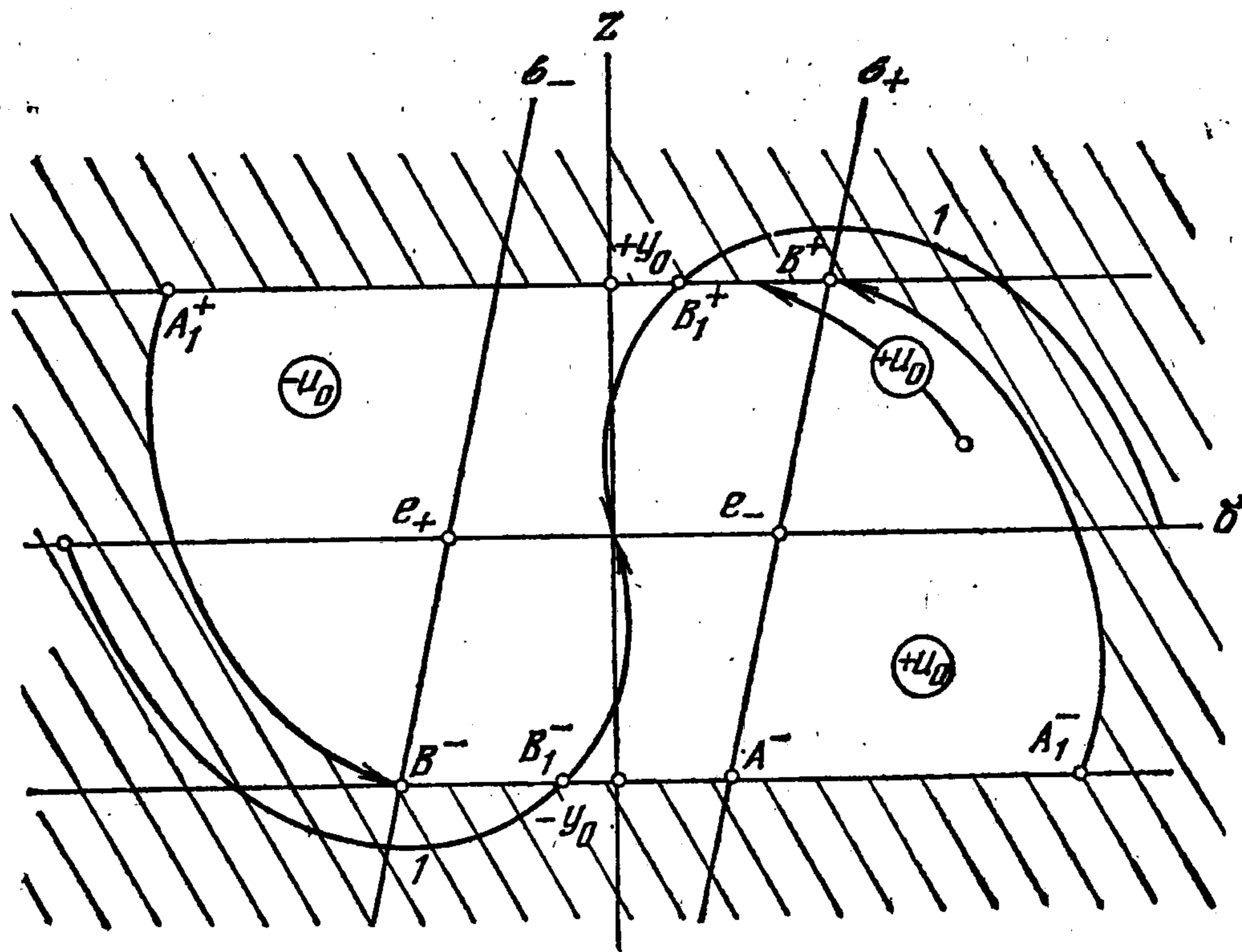
(прямые  $\sigma_+, \sigma_-$  на фиг. 1—6).

4. Управление системой на границе фазового ограничения по скорости. При движении системы по границе ограничения (1.6) выход на ограничения (1.7), (1.8) невозможен (так как  $dz/dt = 0$ ). Тогда  $d\mu_{2\pm}/dt = 0$  и из (1.4)

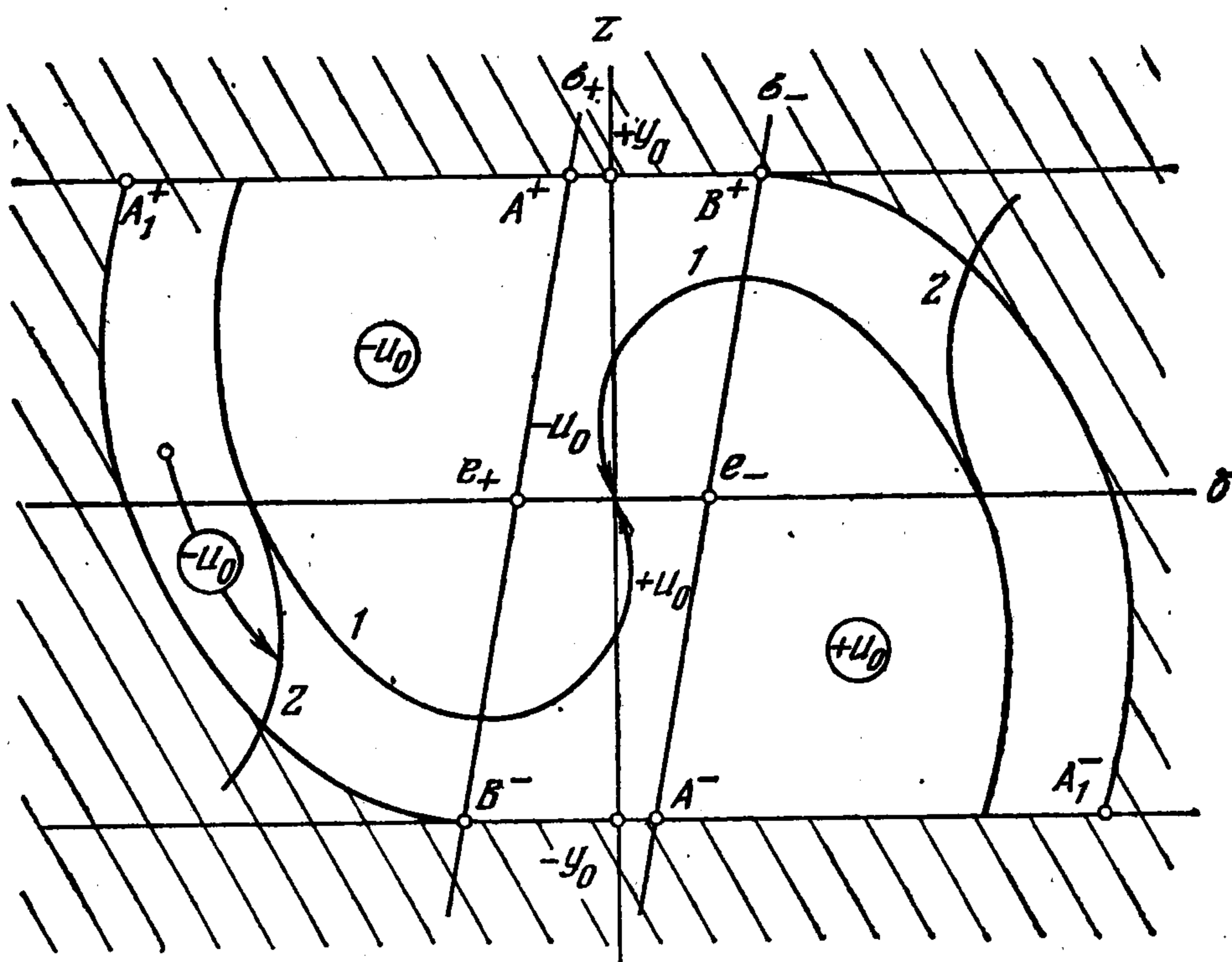
$$(4.1) \quad u^0 = (\kappa (\pm u_0) + \mu \delta)/\mu$$

что влечет за собой выполнение в этих условиях (см. (2.2), (2.1)) следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \mu \psi_1 + \kappa \psi_2 &\equiv 0, \quad d\psi_2/dt \equiv 0 \\ d\psi_1/dt &\equiv 0 = (\kappa^2 + \mu^2) \psi_2/\mu + (\pm 1) d\mu_{1\pm}/dt \end{aligned}$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Так как  $d\mu_{1\pm}/dt \geq 0$ , то при выходе на  $z = y_0$  необходимо  $\psi_2 \leq 0$ , а при выходе на  $z = -y_0$  необходимо  $\psi_2 \geq 0$ .

Рассмотрим выход на  $z = y_0$  ( $z = -y_0$ ). Из (1.4) и (4.1) имеем

$$d\delta/dt = -(\pm y_0)(\mu^2 + \kappa^2)/\mu$$

При движении по границе координата  $\delta$  монотонно убывает (возрастает). Причем диапазон ее изменения определяется ограничениями на управление

$$-u_0 \leq [\kappa(\pm y_0) + \mu\delta]/\mu \leq u_0$$

На фиг. 2, 3 граничные точки допустимого диапазона движения системы по фазовому ограничению  $z = \pm y_0$  обозначены  $A^\pm, B^\pm$ . Эти точки пересечения прямых (3.6) с прямыми  $\dot{z} = \pm y_0$ .

Рассмотрим выход на границу из области точек  $\delta, z$ , лежащих внутри фазовых ограничений задачи (1.4)–(1.8).

Выход возможен на участках  $B^+, B_1^+$  и  $B^-, B_1^-$  для случая, когда первый участок ЛП пересекает фазовое ограничение (фиг. 2), и в точках

$V^+$ ,  $V^-$ , когда не пересекает (фиг. 3). Сход с фазового ограничения в область точек  $\delta$ ,  $z$ , лежащих внутри фазовых ограничений задачи (1.4)–(1.8), происходит из точки границы  $A_1^+$ ,  $B_1^+$  и  $B_1^-$ ,  $A_1^-$  для случая фиг. 2 и из точек границы  $A_1^+$ ,  $V^+$ ,  $A_1^-$ ,  $V^-$  для случая фиг. 3.

Область допустимых начальных условий системы, из которой ее без нарушения условия (1.6) можно перевести в начало координат без учета ограничений (1.7), (1.8), на фиг. 2, 3 не заштрихована (остальные обозначения, как на фиг. 1). В общем случае на фиг. 3 внутри этих границ может быть еще несколько участков ЛП.

5. Управление системой на границе фазового ограничения по мощности. Непосредственно видно, что одновременного движения по границам (1.7), (1.8) и (1.6) быть не может, т. е.  $d\mu_{1\pm}/dt = 0$ .

Для движения по границе (1.7), (1.8) необходимо

$$(5.1) \quad u^\circ = \pm P_0/\mu z - \kappa z/\mu - \delta$$

(знак плюс (минус) относится к движению по границе (1.7), (1.8)). При этом фазовая траектория системы удовлетворяет уравнениям

$$(5.2) \quad dz/dt = \pm P_0/z, \quad d\delta/dt = \pm \kappa P_0/\mu z - z(\kappa^2 + \mu^2)/\mu$$

Из (5.2) непосредственно получим ( $C_\delta$  — постоянная интегрирования)

$$(5.3) \quad \delta(z) = \kappa z/\mu - (\pm 1) z^3 (\mu^2 + \kappa^2)/(3\mu P_0) + C_\delta$$

При движении по (1.7) (см. (5.2)) в верхней (нижней) полуплоскости  $z > 0$  ( $z < 0$ ) координата  $z$  (см. фиг. 4) монотонно возрастает (убывает), а координата  $\delta$  — монотонно убывает (возрастает). Из (5.1) и (5.3) находим, что в верхней (нижней) полуплоскости

$$d^2u^\circ/dz^2 > 0 \quad (d^2u^\circ/dz^2 < 0)$$

и в единственной точке стационарности ( $du^\circ/dz = 0$ ) функции  $u^\circ(z)$

$$(5.4) \quad z_{\min}^+ = \pm [P_0(\kappa + (2\kappa^2 + \mu^2)^{1/2})/(\mu^2 + \kappa^2)]^{1/2}$$

(перед скобками «плюс» относится к верхней, а «минус» к нижней полуплоскости) управление достигает минимума (максимума). Это экстремальное значение должно принадлежать  $[-u_0, +u_0]$ , поэтому прямую  $z = z_{\min}^+$  ( $z = z_{\max}^+$ ) фазовые траектории системы могут пересекать только на отрезке

$$\frac{P_0}{\mu z_{\min}^+} - \frac{\kappa}{\mu} z_{\min}^+ - u_0 \leq \delta \leq -u_0 + \frac{P_0}{\mu z_{\min}^+} - \frac{\kappa}{\mu} z_{\min}^+$$

Такие предельные траектории системы (5.2) нанесены на фиг. 4. Штрихами отмечена траектория (5.3), проходящая целиком, кроме одной своей точки, внутри (1.7). Множество точек, удовлетворяющих условию

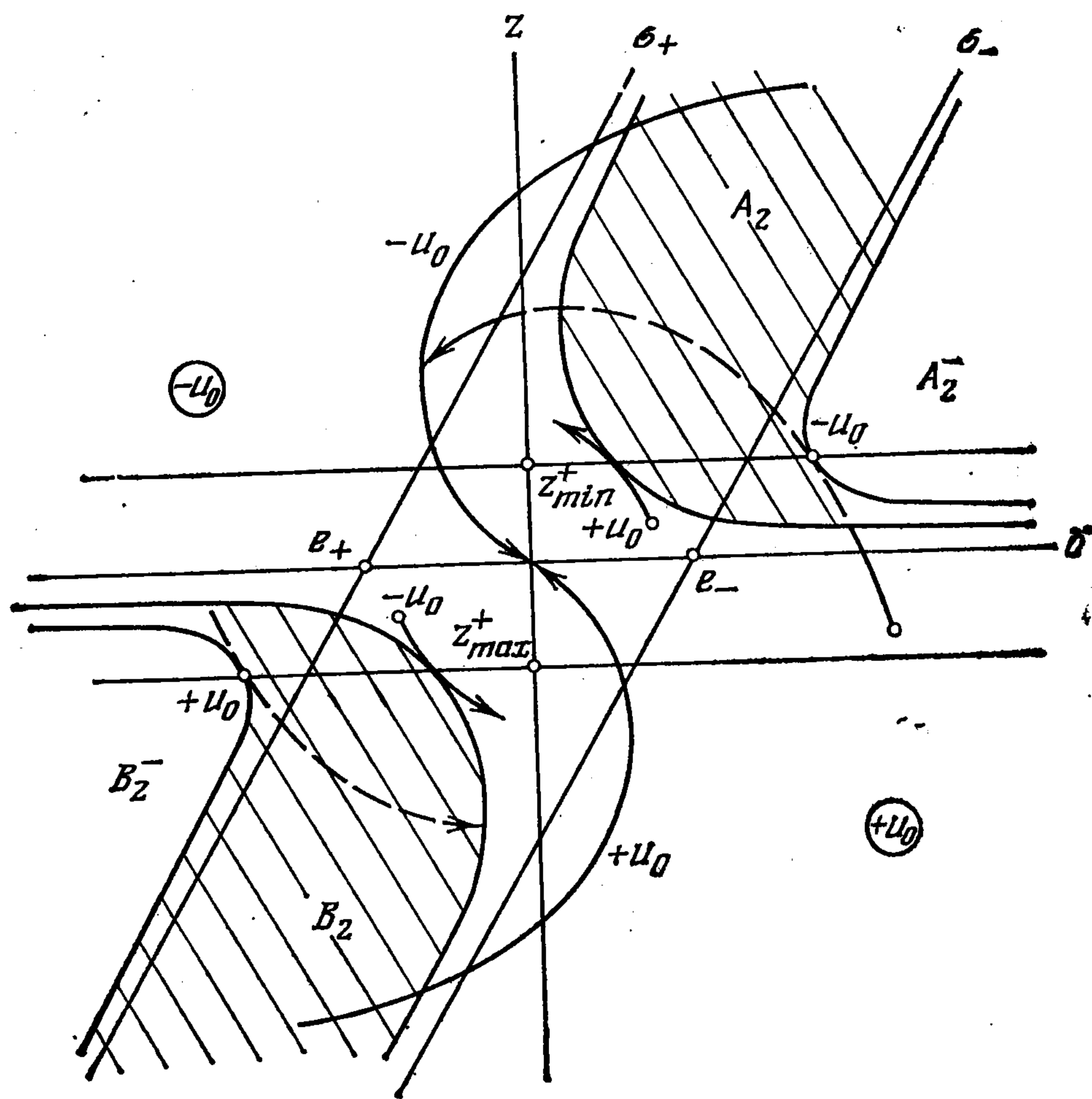
$$z(\kappa z + \mu\delta + \mu u) = P_0, \quad |u| \leq u_0$$

(области  $A_2$ ,  $B_2$  на фиг. 4) является областью, где с помощью управления система может двигаться по границе (1.7). В области  $A_2^-$ ,  $B_2^-$  (фиг. 4) движение с выполнением условия (1.7) невозможно. Здесь фазовое ограничение (1.7) будет нарушено. Причем область  $A_2^-$  определяется ограничением на управление снизу, а область  $B_2^-$  — сверху.

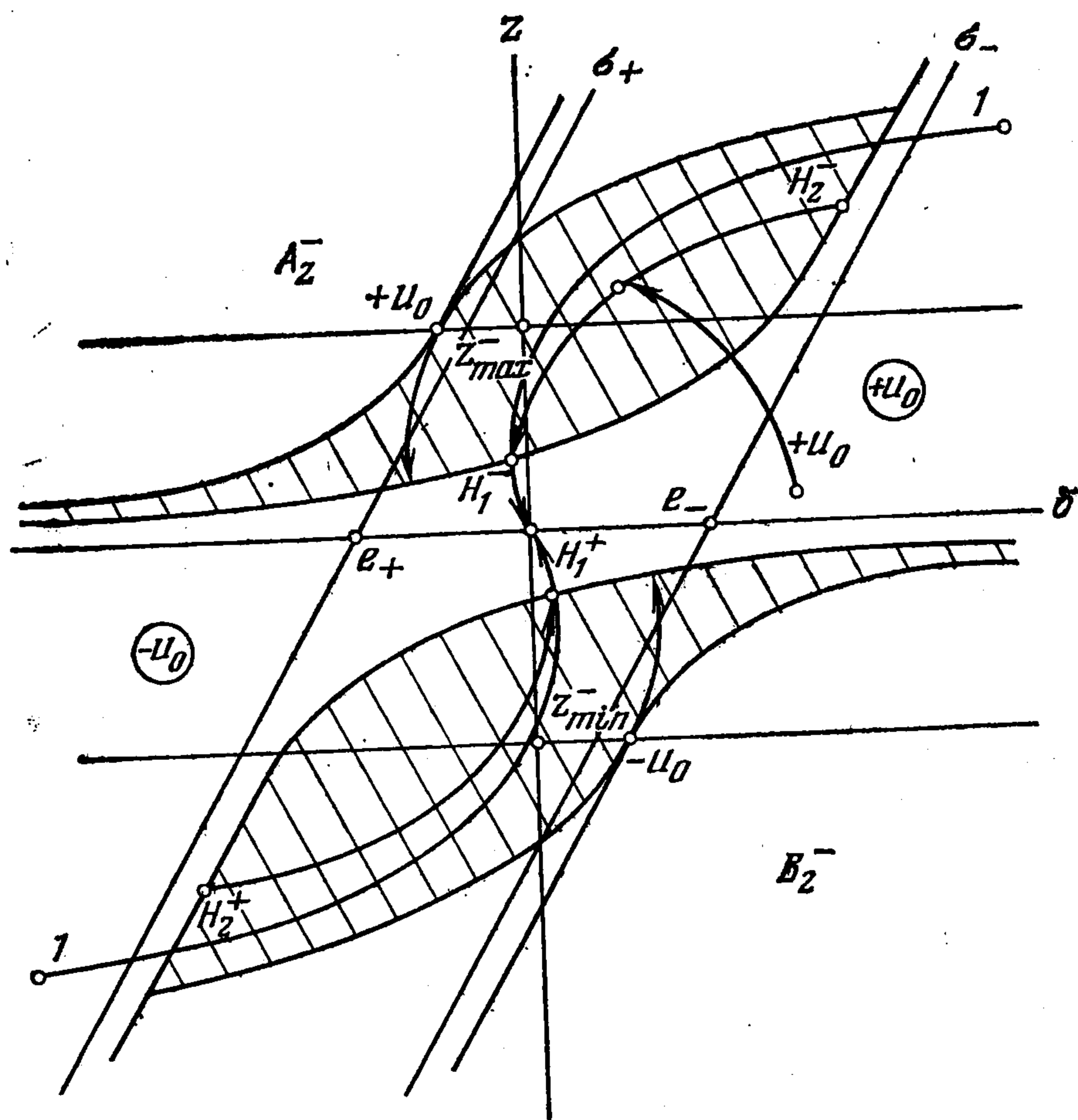
При движении (см. (5.2)) по (1.8) в верхней (нижней) полуплоскости  $z > 0$  ( $z < 0$ ) координата  $z$  убывает (возрастает), а координата  $\delta$  на прямых

$$(5.5) \quad z_\delta = \pm [-\kappa P_0/(\mu^2 + \kappa^2)]^{1/2}$$

меняет знак скорости своего изменения (фиг. 5).



Фиг. 4



Фиг. 5

В верхней (нижней) полуплоскости

$$d^2u^0/dz^2 < 0 \quad (d^2u^0/dz^2 > 0)$$

и в единственной точке стационарности  $du^0/dz = 0$ )

$$(5.6) \quad z_{\min}^{\pm} = \pm [-P_0(\kappa - (2\kappa^2 + \mu^2)^{1/2})/(\mu^2 + \kappa^2)]^{1/2}$$

(где перед скобками «плюс» относится к верхней, а «минус» к нижней полуплоскости) управление  $u^0$  достигает максимума (минимума). Получаем, что прямую  $z = z_{\max}^{\pm}$  ( $z = z_{\min}^{\pm}$ ) фазовые траектории системы могут пере-

секать только на отрезке

$$-\frac{P_0}{\mu z_{\max}^-} - \frac{\kappa}{\mu} z_{\max}^- - u_0 \leq \delta \leq u_0 - \frac{P_0}{\mu z_{\max}^-} - \frac{\kappa}{\mu} z_{\max}^-$$

По аналогии с предыдущим на фиг. 5 нанесены  $A_2$ ,  $B_2$  — области, где с помощью управления (5.1) система может двигаться по границе фазового ограничения (1.8).  $A_2^-$ ,  $B_2^-$  — области, где ограничение нарушается, причем  $A_2^-$  определяется ограничениями на управление сверху, а  $B_2^-$  — снизу.

В подобласти областей  $A_2$  и  $B_2$  (фиг. 4, 5), покрытой кривой штриховкой, система после выхода на границу (1.8) при управлении (5.1) движется по границе без ее нарушения и через некоторое время покидает ограничение. При сделанных ограничениях на  $\xi$  система не выходит за границы заштрихованной области.

Непосредственным сравнением  $d\delta/dz$  на траекториях, проходящих по границам фазовых ограничений (1.7), (1.8), и на траекториях, выходящих на границы из области внутри фазовых ограничений, показывается, что в момент выхода и входа траектории касаются друг друга. При переходе траекторий из (1.7) на (1.8) наблюдается излом.

Отметим, что точки с  $d\delta/dz = 0$  на оптимальных траекториях внутри фазовых ограничений находятся на прямых

$$-\mu z + \kappa (\delta - u_0) = 0, \quad z > 0$$

$$-\mu z + \kappa (\delta + u_0) = 0, \quad z < 0$$

которые пересекают границу (1.8) в точках с координатой

$$z_0 = \pm [-\kappa P_0 / (\kappa^2 + \mu^2)]^{1/2}$$

**6. Синтез оптимального управления.** Результаты изучения свойств оптимального управления, полученные в пп. 3—5, позволяют построить синтез оптимального управления — зависимости величины  $u^\circ$  от текущих значений фазовых координат  $z$ ,  $\delta$  системы.

В самом деле. Если в произвольный момент  $t$  фазовая точка находится внутри фазового ограничения  $|z| \leq y_0$  и  $V_{z, \delta, t}^* = \{|u| \leq u_0\}$ , то величина  $u^\circ = \pm u_0$  и оптимальное движение для таких  $t$  подчиняется законам, установленным в п. 3. При выходе в некоторый момент времени  $t$  фазовой точки на ограничение (1.6) или (1.7), (1.8) оптимальное движение системы должно подчиняться законам, установленным в п. 4 или 5 соответственно. Оптимальный момент схода фазовой точки с этих ограничений (а одновременно на ограничениях (1.6) и (1.7), (1.8) фазовая точка находится не может) однозначно определяется тем фактом, что после выхода системы из ограничений (1.6) и (1.7), (1.8) оптимальное управление принимает только предельные значения  $\pm u_0$  и до достижения начала координат знака не меняет.

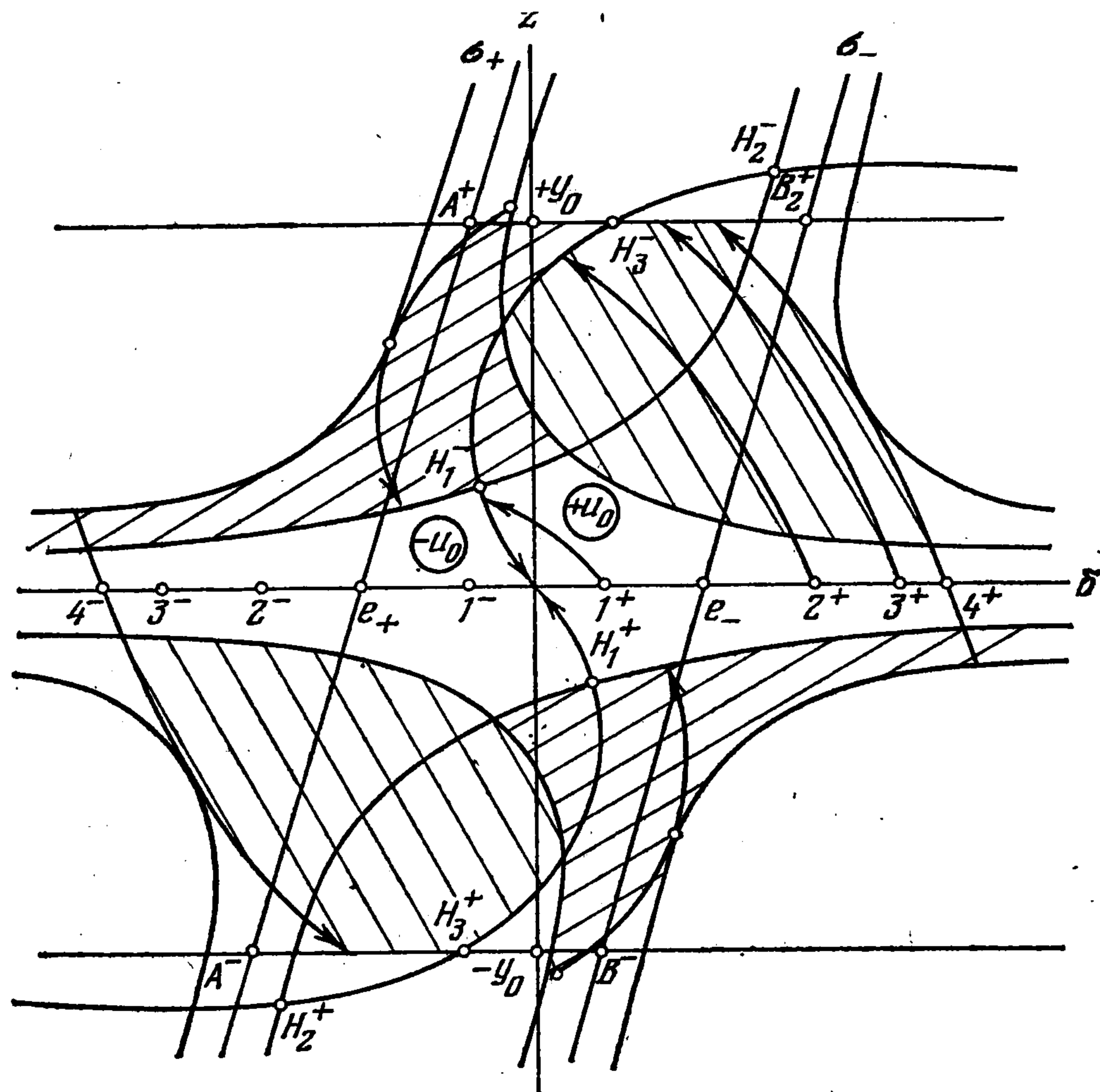
Отметим, что существуют два качественно различных вида систем: ЛП пересекает границу (1.8) (см. фиг. 6), ЛП не пересекает границу (1.8).

Произведем синтез управления для систем первого вида как наиболее сложных, и пусть взаимное расположение ограничений таково, что возможен выход на ограничение (1.6) и на ограничение (1.7), (1.8) (см. фиг. 6).

Пусть начальное положение фазовой точки находится строго внутри ограничений, т. е.  $|z| \leq y_0$ ,  $V_{z, \delta, t} = \{|u| \leq u_0\}$  (для определенности на оси  $\delta$  и внутри первого участка ЛП). Так как картина фазовой плоскости и точки  $1^\pm - 4^\pm$  симметричны относительно нуля, то на фиг. 6 изображены траектории движения системы только для точек  $1^+ - 4^+$ .

При движении системы из начальных точек типа  $1^\pm$  система не выходит на ограничения (1.6)–(1.8) (случай изучен в п. 3). Двигаясь с управлением  $\pm u_0$  (принцип выбора знака ясен из фиг. 6), она достигает ЛП, по которой и приходит в начало координат.

При движении системы из точек типа  $2^\pm$  (случай изучен в пп. 3, 5) система с управлением  $\pm u_0$  движется до границы (1.7). По ней происходит движение системы с управлением (5.1) и  $P_0 = \pm P_0$  до выхода на ограничение (1.8). Выход происходит на линии  $H_1^\pm, H_3^\pm$  (ограничения по



Фиг. 6

скорости не достигаются), причем  $H_1^\pm$  — точка пересечения границы (1.8) с конечным участком ЛП, а  $H_3^\pm$  — точка пересечения границы (1.6) с траекторией движения системы по границе (1.8), проходящей через точку  $H_1^\pm$ . Двигаясь по  $H_1^\pm H_3^\pm$  до точки  $H_1^\pm$  с управлением (5.1) при  $P_0 = -P_0$  (управление достигает значения  $\pm u_0$  в точке  $H_1^\pm$ ), система в точке  $H_1^\pm$  выходит на конечный участок ЛП и далее по нему попадает в начало координат.

Оптимальное движение из начальных точек типа  $3^\pm$  отличается от оптимального движения из точек типа  $2^\pm$  тем, что после выхода системы на ограничение (1.7) и движения по нему в течение некоторого времени (здесь синтез управления по правилу п. 5) система выходит на фазовое ограничение (1.6) (синтез оптимального управления на нем производится по правилам п. 4). Причем выход на это ограничение не может происходить вне отрезка  $A^+B^+(A^-B^-)$ . Система движется по фазовому ограничению

к точке  $H_3^\pm$ . В момент достижения точки  $H_3^\pm$  происходит переключение на управление, обеспечивающее движение системы по траектории  $H_3^\pm H_1^\pm$  (синтез оптимального управления осуществляется по правилам п. 5). Дальнейшее движение системы совпадает с рассмотренным выше.

Точка  $4^\pm$  является предельной точкой для множества точек типа  $3^\pm$ . Движение из всех точек правее ее, для  $\delta > 0$ , и левее ее, для  $\delta < 0$ , приводит к нарушению ограничения по мощности (1.7). Движение из этой точки осуществляется по законам, описанным для оптимальных движений из начальных точек типа  $3^\pm$ .

Постановка задачи принадлежит В. Г. Разумову и В. В. Слатину.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
2. Федунев Б. Е. Синтез управления в задаче с фазовыми ограничениями.— ПММ, 1973, т. 37, вып. 1, с. 23—31.
3. Дубовицкий А. Я., Милютин А. А. Задачи на экстремум при наличии ограничений.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 3, с. 395—453.
4. Дубовицкий А. Я., Милютин А. А. Необходимые условия слабого экстремума в задачах оптимального управления со смешанными ограничениями типа неравенства.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1968, т. 8, № 4, с. 725—779.

Москва

Поступила в редакцию  
15.I.1982