Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 4, 1984

УДК 62—50

О ПОИСКЕ НЕПОДВИЖНОЙ ЦЕЛИ ДВИЖУЩИМСЯ ОБЪЕКТОМ

Чикрий Г. Ц.

Рассматривается задача поиска неподвижной цели управляемым объектом, движение которого подчинено системе обыкновенных дифференциальных уравнений или линейной дискретной системе с заданной плотностью распределения вероятностей начального положения. Выводятся необходимые условия оптимальности управления, максимизирующего вероятность выхода траектории объекта на заданное целевое множество за фиксированное время.

1. Непрерывный случай. Пусть динамика управляемого объекта задается системой

$$z^{\bullet} = f(z, t, u),\ z \in E^n;\ f(z, t, u) = \operatorname{col}(f_i, (z, t, u)),\ i = 1, 2, \ldots, n \tag{1.1}$$

выполнены предположения, обеспечивающие существование, продолжимость и единственность решения [1]. Задано вероятностное распределение положения объекта в начальный момент времени t_0, имеющее плотность $p_0(z)$. В классе Ω измеримых функций со значениями из множества U ищется управление $u(t)$, $t \in [t_0, T]$, доставляющее максимум вероятности выхода траектории системы (1.1) на заданное множество M, $M \subset E^n$, в фиксированный конечный момент времени T.

Обозначим плотность вероятности распределения объекта в момент времени t через $p(t, z)$, а максимизируемую вероятность — через P. Имеет место формула

$$P(T, M) = \int_M p(t, y)\, dy \tag{1.2}$$

Плотность $p(t, z)$ удовлетворяет уравнению в частных производных (Фоккера — Планка — Колмогорова) [2] с начальным условием

$$\partial p(t, z)/\partial t = -(\nabla, f(z, t, u)\, p(t, z));\ p(0, z) = p_0(z) \tag{1.3}$$
$$\nabla = (\partial/\partial z_1, \ldots, \partial/\partial z_n)$$

Уравнение (1.3) имеет место при любом допустимом управлении $u(\cdot) \in \Omega$ и является квазилинейным уравнением первого порядка с $n+1$ независимыми переменными. Его интегрирование эквивалентно [3] интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1) и уравнения

$$dp(t, z)/dt = -p(t, z)(\nabla, f(z, t, u)) \tag{1.4}$$

Обозначим через $z(t, y)$ кривую, являющуюся решением (1.1) и проходящую в момент T через точку y, т. е. $z(T, y) = y$. Полученное решение подставляем в уравнение (1.4) и решаем его при начальном условии

$$p(t_0, z(t_0, y)) = p_0(z(t_0, y)) \tag{1.5}$$

Подставляя решение задачи (1.4), (1.5) в формулу (1.2), получим

$$P(T, M) = \int_M p_0(z(t_0, y)) \exp\left\{-\int_{t_0}^{T} (\nabla, f(z(\theta, y), \theta, u(\theta)))\, d\theta\right\} dy \tag{1.6}$$

Если правая часть (1.1) не зависит от фазовой переменной z, то формула (1.6) значительно упрощается (экспонента обращается в единицу).

Подробно исследуем случай линейной динамики движущегося объекта

$$z^{\cdot} = Az + u \quad \left((\nabla, f(z, t, u)) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \operatorname{tr} A\right) \tag{1.7}$$

где A — квадратная матрица размером $n \times n$.

Записав согласно формуле Коши решение уравнения (1.7) при условии $z(T, y) = y$ в случае $t_0 = 0$, формулу (1.6) представим в виде

$$P(T, M) = f_0(u) = \exp(-T \operatorname{tr} A) \int_M p_0\Big(\exp(-AT)\, y - \\ - \int_0^T \exp(-A\theta)\, u(\theta)\, d\theta\Big)\, dy \tag{1.8}$$

Предположим, что плотность $p_0(z)$ — непрерывно дифференцируемая функция, множество M выпукло и замкнуто, U — выпуклый компакт. Тогда множество Ω также выпукло.

Прежде чем сформулировать результат, введем необходимые обозначения. Для дифференцируемой функции $f(z)$ величина $\nabla_z f(z)$ будет обозначать ее вектор-градиент. Для выпуклого множеста X символ $K_X(x_0)$ — конус возможных направлений в точке $x_0 \in X$, т. е. выпуклый конус, состоящий из векторов $e \in X$, таких, что $x(\lambda) = x_0 + \lambda e \in X$ для всех λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_1$, при достаточно малом λ_1. Матрицу, транспонированную матрице A, обозначим A^T.

Приведенная ниже теорема — результат применения аппарата необходимых условий [4] к задаче максимизации вероятности (1.8).

Теорема 1. Пусть $u_0(\cdot) \in \Omega$ — управление, доставляющее максимум функции $f_0(u)$. Тогда с необходимостью будет выполнено неравенство

$$\int_0^T \Big(\exp(-A^T\theta) \int_M \nabla_z p_0\Big(\exp(-AT)\, y - \\ - \int_0^T \exp(-A\theta_1)\, u_0(\theta_1)\, d\theta_1\Big)\, dy, \Delta u\Big)\, d\theta \geqslant 0, \quad \forall \Delta u \in K_\Omega(u_0)$$

Доказательство. Так как

$$\max_{u \in \Omega} f_0(u) = -\min_{u \in \Omega}(-f_0(u))$$

то задача максимизации вероятности (1.8) сводится к минимизации функции $-f_0(u)$ по $u \in \Omega$.

Функция $f_0(u)$ с точностью до положительного коэффициента является суперпозицией функции $f(x)$, определенной на E^n, и оператора $\mathrm{A}u$, где

$$f(x) = \int_M p_0(\exp(-AT)\, y - x)\, dy, \quad \mathrm{A}u = \int_0^T \exp(-A\theta)\, u(\theta)\, d\theta$$

Функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема и удовлетворяет условию Липшица в ограниченной области своего определения в силу предложений о функции $p_0(x)$ и множестве U. Оператор $\mathrm{A}u$: $L_\infty[0, T] \to E^n$ — дифференцируемый по Гато оператор (здесь $L_\infty[0, T]$ — пространство ограниченных измеримых функций, определенных на $[0, T]$, являющееся полным нормированным (банаховым) пространством [5]).

В таком случае применима теорема 3.1 ([4], с. 58) о суперпозиции квазидифференцируемой функции и дифференцируемого по Гато оператора. В силу этой теоремы функции $f(\mathrm{A}u)$ и $f_0(u)$ квазидифференцируемы и удовлетворяют условию Липшица. Поэтому применимы результаты ([4], с. 69), из которых следует, что необходимые условия минимума функции $-f_0(u)$ в точке u_0 имеют вид неравенства

$$f_0'(u_0, \Delta u) \leqslant 0 \tag{1.9}$$

которое должно выполняться для всех $\Delta u \in K_\Omega(u_0)$. Здесь $f_0'(u_0, \Delta u)$ — производная функции $f_0(u)$ по направлению Δu в точке u_0.

Из этой же теоремы следует, что

$$f_0'(u_0, \Delta u) = (\mathrm{A}_0')^* \nabla_x f(\mathrm{A}u_0)(\Delta u) \tag{1.10}$$

где A_0' — производная Гато оператора $\mathrm{A}u$ в точке u_0, A_0' — оператор, сопряженный оператору A_0', а $\nabla_x f(\mathrm{A}u_0)(\cdot)$ — линейный функционал, при каждом $x \in E^n$ принимающий значение $(\nabla_x f(\mathrm{A}u_0), x)$, $\mathrm{A}u$ — линейный ограниченный оператор, $\mathrm{A}_0' = \mathrm{A}$. Оператор A^* ставит в соответствие каждому функционалу $\varphi(x) = (\varphi, x)$, определенному на E^n, $\varphi \in E^n$, некоторый функционал $\mathrm{A}^*\varphi$, определенный на $L_\infty[0, T]$, такой, что $\mathrm{A}^*\varphi(u) = \varphi(\mathrm{A}u)$. Учитывая конкретный вид оператора $\mathrm{A}u$, после преобразований получим

$$\mathrm{A}^*\varphi(\Delta u) = \int_0^T (\exp(-A^T\theta)\varphi, \Delta u(\theta))\, d\theta$$

В формуле (1.10) оператор A^* применен к функционалу $\nabla_x f(\mathrm{A}u_0)$ поэтому

$$\mathrm{A}^*\nabla_x f(\mathrm{A}u_0)(\Delta u) = -\int_0^T \Big(\exp(-A^T\theta) \int_M \nabla_z p_0\Big(\exp(-AT)\,y - \\ - \int_0^T \exp(-A\theta_1)\, u_0(\theta_1)\, d\theta_1\Big) dy, \Delta u(\theta)\Big) d\theta \tag{1.11}$$

Из формул (1.8) — (1.11) следует утверждение теоремы.

Пример. Рассмотрим простое движение на плоскости

$$y^{\cdot} = u, \quad y = (y_1, y_2)^T, \quad y_0 = (y_0', y_0'')^T, \quad M = \{y\colon \|y - y_0\| \leqslant \varepsilon\}, \quad \|u\| \leqslant a$$

Начальное распределение — нормальное $N(0,1)$ с плотностью

$$p_0(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y_1^2 + y_2^2}{2}\right)$$

Оптимизируемая вероятность имеет вид

$$P(T, M) = \iint\limits_{y_0 + S_0(\varepsilon)} \exp\left\{-\frac{1}{2}[(y_1 - Tu_1)^2 + (y_2 - Tu_2)^2]\right\} dy_1\, dy_2 \tag{1.12}$$

где $S_0(\varepsilon)$ — шар радиуса ε с центром в начале координат.

Необходимое условие оптимальности управления $u_0 = (u_0^1, u_0^2)^T$ таково:

$$\iint\limits_{S_0(\varepsilon)} \exp\left\{-\frac{1}{2}[(y_1 + y_0' - Tu_0^1)^2 + (y_2 + y_0'' - Tu_0^2)^2]\right\} \times \\ \times [(y_1 + y_0' - Tu_0^1)\,\Delta u_1 + (y_2 + y_0'' - Tu_0^2)\,\Delta u_2]\, dy_1\, dy_2 \geqslant 0$$

и из-за симметрии области интегрирования достаточно его выполнения в начале координат. Этому условию удовлетворяет управление u_0 при $u_0^1 = y_0'/T$, $u_0^2 = y_0''/T$ при $T \geqslant \|y_0\|/a$.

Сказанное согласуется со следующими геометрическими соображениями. Интеграл в (1.12) — объем тела, отсекаемого поверхностью $z = p_0(y)$ от цилиндра с кругом радиуса ε в качестве основания, и будет максимальным, если центр этого круга передвинуть в начало координат.

2. Дискретный случай. Движение поискового объекта подчиневсистеме разностных уравнений

(2.1) $$x_{k+1} = Ax_k + u_k, \quad x_k \in E^n$$

где x_k — положение объекта на шаге k, u_k — управление, выбираемое на шаге k из множества U, U — выпуклый компакт, A — матрица размером $n \times n$. Задано вероятностное распределение положения объекта в начальный момент времени, имеющее плотность $p_0(x)$.

Требуется путем выбора управлений $u_1, \ldots, u_k$ максимизировать вероятность выхода объекта за k шагов на заданное множество M, $M \subset E^n$.

Согласно (2.1), при фиксированных $u_1, \ldots, u_k$ положение объекта на шаге k выражается через начальное положение следующим образом:

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{i=1}^{k} A^{k-i} u_i$$

Отсюда, в предположении существования матрицы A^{-1}, обратной матрице A, имеем

$$P(x_k \in M) = \int\limits_{\Lambda(M)} p_0(z)\,dz, \quad \Lambda(M) = (A^{-1})^k M - \sum_{i=1}^{k} (A^{-1})^i u_i$$

Сделаем следующую замену переменных под знаком интеграла: $z = \Lambda(z_1)$ и введем в рассмотрение вектор и матрицу

$$u = \operatorname{col}(u_1, \ldots, u_k), \quad A_k = (A^{-1} \ \ldots \ (A^{-1})^k)$$

Выражение для вероятности $P(x_k \in M)$ принимает вид

$$P(x_k \in M) = |A^{-1}|^k \int\limits_M p_0((A^{-1})^k z - A_k u)\,dz \quad (|A^{-1}| = \det A^{-1})$$

и в множестве $U^k = U \times \ldots \times U$ (k сомножителей) ищется управление u, доставляющее максимум этому выражению.

Теорема 2. Пусть управление $u_0 \in U^k$ доставляет максимум вероятности успешного поиска за k шагов. Тогда

(2.2) $$\left(A_k{}^T |A^{-1}|^k \int\limits_M \nabla_x p_0((A^{-1})^k z - A_k u_0)\,dz, \Delta u\right) \geqslant 0$$

$$\forall \Delta u \in K_{u^k}(u_0)$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Представляет интерес задача поиска в игровой ситуации, т. е. когда поисковый объект движется под действием двух управлений u и v: $z_{k+1} = Az_k + u_k + v_k$ и игрок, распоряжающийся управлением v, $v \in V$, стремится избежать встречи поискового объекта с множеством M. Утверждение теоремы в этом случае остается справедливым, только интегрирование в неравенстве (2.2) должно производиться по множеству $M \overset{*}{-} A_k V^k$, где $\overset{*}{-}$ — операция геометрического вычитания множеств [6], в предположении, что множество $M \overset{*}{-} A_k V^k$ непусто и V^k — выпуклый компакт.

Автор благодарит Б. Н. Пшеничного за замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. *Дуб Д.* Вероятностные процессы. М.: Изд-во иностр. лит., 1956. 605 с.
3. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
4. *Пшеничный Б. Н.* Необходимые условия экстремума. М.: Наука, 1982. 143 с.
5. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.
6. *Понтрягин Л. С.* О линейных дифференциальных играх. I.— Докл. АН СССР, 1967, т. 174, № 6, с. 1278—1280.

Киев

Поступила в редакцию 5.IX.1983