Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 4, 1984

УДК 62—50

ПОЗИЦИОННАЯ l-ПОИМКА В ИГРЕ ОДНОГО УБЕГАЮЩЕГО И НЕСКОЛЬКИХ ПРЕСЛЕДОВАТЕЛЕЙ

Хайдаров Б. К.

Рассматривается дифференциальная игра l-поимки одного убегающего m преследователями с равными скоростями. Строится в явном виде стратегия преследователей, зависящая только от текущих геометрических координат, которая применима и в случае, когда выпуклая оболочка начальных положений преследователей имеет пустую внутренность.

1. Рассмотрим дифференциальную игру m преследователей P_i и одного убегающего E, движения которых описываются соответственно уравнениями

$$x_i^{\cdot} = u_i, \quad y^{\cdot} = v; \quad x_i, y, u_i, v \in R^n \tag{1.1}$$
$$|u_i| \leqslant 1, \ |v| \leqslant 1, \quad i \in I = \{1, 2, \ldots, m\}, \quad |z| = (z, z)^{1/2}$$

Преследование считается законченным, когда в процессе движения впервые осуществляется соотношение

$$|x_i(t) - y(t)| \leqslant l \tag{1.2}$$

хотя бы для одного $i \in I$, l — заданное положительное число.

Разные варианты этой игры рассматривались ранее ([1—9] и др.). Пусть $N_0 = \operatorname{conv}\{x_1(0), x_2(0), \ldots, x_m(0)\}$ — выпуклая оболочка начальных положений преследователей. Было показано [6], что если множество N_0 имеет непустую внутренность (в топологии R^n) и начальное положение убегающего $y(0)$ принадлежит открытой l-окрестности M_0 множества N_0, то в игре (1.1) можно завершить преследование за конечное время. Этот факт в более общей форме следует и из теоремы 2 [8]. Однако в указанных работах предполагалось, что в каждый момент времени $t \geqslant 0$ преследователям становится известным значение $v(t)$ параметра управления убегающего, т. е. предполагалась информационная дискриминация убегающего.

Ниже строится специальная стратегия преследователей, основанная только на позиционной информации, гарантирующая завершение преследования. Кроме того, стратегия U^* применима и в случае, когда множество N_0 имеет пустую внутренность (например, когда $m \leqslant n$).

2. Изложим основные понятия, уточняющие постановку задачи. Пусть $[a, \theta\rangle$ означает отрезок $[a, \theta]$ в случае конечного θ и луч $[a, +\infty)$ в случае $\theta = +\infty$. Рассмотрим дифференциальную игру со следующей динамикой (множества P, Q — компакты):

$$z^{\cdot} = f(z, u, v); \quad z \in R^n, \quad u \in P \subset R^p, \quad v \in Q \subset R^q \tag{2.1}$$

Предположим, что выполнены условия:

1) функция $f(z, u, v)$ непрерывна по z, u, v и на каждом компактном подмножестве R^n по z удовлетворяет условию Липшица;

2) существует такое $c \geqslant 0$, что $(z, f(z, u, v)) \leqslant c(1 + |z|^2)$ для всех $z \in R^n$, $u \in P$, $v \in Q$;

3) терминальное множество M ($\subset R^n$) замкнуто.

Стратегию преследователя определим в виде отображения U, ставящего каждой точке $z \in R^n$ в соответствие пару $U(z) = (D(z), u_z(\cdot))$. Здесь $D(z)$ — открытая область пространства R^n, которая содержит точку z, $u_z(\cdot)$: $[D(z)] \mapsto P$ — непрерывно дифференцируемое отображение (локальный синтез управлений преследователя). Символом $[D(z)]$ обозначается замыкание множества $D(z)$.

Пусть задана начальная точка $z_0 = z(t_0)$ и преследователем выбрана некоторая стратегия U, а убегающим — произвольное измеримое управление $v(t)$, $t \in [t_0, +\infty)$.

Опишем соответствующее движение фазовой точки. Рассмотрим пару $U(z_0) = (D(z_0), u_{z_0}(\cdot))$. На первом этапе преследования траектория определяется как решение задачи Коши

$$z^{\cdot} = f(z, u_{z_0}(z_0), v(t)), \quad z(t_0) = z_0, \quad z \in [D(z_0)] \tag{2.2}$$

на максимальном интервале $[t_0, \theta\rangle$ времени, на котором выполняется включение $z(t) \in [D(z_0)]$. В силу условий 1) и 2) задача Коши (2.1) имеет единственное решение, продолжимое на $[t_0, +\infty)$ или вплоть до границы $\mathrm{Fr}\, D(z_0)$ множества $D(z_0)$. Тогда возможны два случая: а) $\theta = +\infty$, т. е. $z(t) \in D(z_0)$ при всех $t \geqslant t_0$; б) $\theta < +\infty$, т. е. $z(\theta) \in \mathrm{Fr} D(z_0)$. В случае а) движение на первом этапе определяется полностью. В случае б) при $t = \theta$ положим $z_1 = z(t_1)$ и движение фазовой точки на втором этапе продолжим как решение задачи Коши

$$z^{\cdot} = f(z, u_{z_1}(z), v(t)), \quad z(t_1) = z_1, \quad z \in [D(z_1)]$$

где $D(z_1)$, $u_{z_1}(\cdot)$ — составляющие $U(z_1)$. Повторяя указанный процесс, получим конечные или бесконечные последовательности моментов времени $t_0, t_1, \ldots, t_s, \ldots$ и подмножеств $D(z_0), D(z_1), \ldots, D(z_s), \ldots$, таких, что на каждом интервале $[t_s, t_{s+1}\rangle$ преследователь выбирает свое управление в виде синтезирующей функции $u(z) = u_{z_s}(z)$, $z \in [D(z_s)]$ и траектория $z(t) = z(t; z_0, U, v(\cdot))$ определяется либо на луче $[t_0, +\infty)$, либо на объединении отрезков $[t_0, t_s]$.

Пару $U = (D(z), u_z(\cdot))$ назовем (z_0, T)-допустимой, если она при любом управлении $v(t)$, $t \in [t_0, T\rangle$ убегающего порождает траекторию $z(t; z_0, U, v(t))$, определенную на промежутке $[t_0, T\rangle$. Функцию $z(t)$ будем называть траекторией, соответствующей z_0, U, $v(\cdot)$.

По определению, в игре (2.1) из начальной точки z_0 можно завершить преследование до момента времени T, $T < +\infty$, если существует (z_0, T)-допустимая стратегия U, такая, что при любом измеримом управлении убегающего $v(\cdot)$ траектория $z(t)$, соответствующая z_0, U, $v(t)$, удовлетворяет включению $z(t) \in M$ при некотором $t \leqslant T$.

3. Вернемся к игре (1.1). Обозначим через K множество всех непустых подмножеств множества I, через $d(\pi)$ — число элементов множества $\pi \in K$. Положим $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $z = (x_1, x_2, \ldots, x_m, y)$ (отметим, что $z \in R^{n(m+1)}$). Далее, для каждого $\pi \in K$ и $x \in R^n$ положим

$$N(x, \pi) = \mathrm{conv}\,\{x_i, \ i \in \pi\}, \quad M(x, \pi, l^*) = N(x, \pi) + l^* S$$

где S — открытый единичный шар пространства R^n с центром в начале координат, l^* — положительное число. Через $D(x, \pi, l^*)$ обозначим множество, полученное из $[M(x, \pi, l^*)]$ удалением всех множеств вида $M(x, \pi^*, l^*)$, где π^* — собственное подмножество π, т. е.

$$D(x, \pi, l^*) = [M(x, \pi, l^*)] \setminus \bigcup M(x, \pi^*, l^*)$$

где объединение берется по всем $\pi^* \subset \pi$, $d(\pi^*) < d(\pi)$.

Предполагаем, что $|x_i(0) - y(0)| > l$ для всех $\pi \in K$.

Теорема. Если $y(0) \in M(x(0), \pi, l)$ для некоторого $\pi \in K$, то в игре (1.1) можно завершить преследование в смысле п. 2.

Доказательство. Из условия теоремы следует существование таких $\pi_0 \subset \pi$ и $l_0 < l$, что $y(0) \in D(x(0), \pi_0, l_0)$. Предполагаем, что $d(\pi_0) = n + 1$ (если $d(\pi_0) > n + 1$, то по теореме Каратеодори $y(0) \in D(x(0), \pi^\circ, l_0)$ для некоторого $\pi^\circ \subset \pi_0$, $d(\pi^\circ) = n + 1$, а случай $d(\pi_0) \leqslant n$ будет рассмотрен ниже).

В начале движения преследователи P_i, $i \in \pi_0$ будут двигаться с единичной скоростью в направлении начального положения $y(0)$ убегающего, а остальные преследователи остаются на своих местах и в игре вообще не будут участвовать, т. е.

$$(3.1)\qquad u_i(z) = \begin{cases} (y(0) - x_i(0))/|y(0) - x_i(0)|, & i \in \pi_0 \\ 0, & i \overline{\in} \pi_0 \end{cases}$$

Тогда в некоторый конечный момент времени $t_1 > 0$ будем иметь $y(t_1) \in \operatorname{Fr} D(x(t_1), \pi_0, l_0)$, в силу предположения $d(\pi_0) = n + 1$.

Следовательно, для некоторого l_1, $0 < l_1 < l$ и $\pi_0{}^* \subset \pi_0$, $d(\pi_0{}^*) < d(\pi_0)$ выполняется соотношение $y(t_1) \in M(x(t_1), \pi_0{}^*, l_1)$, т. е. точка $y(t_1)$ попадает в l_1-окрестность выпуклой оболочки меньшего числа преследователей P_i, $i \in \pi_0{}^*$, $d(\pi_0{}^*) < n + 1$. Но тогда существует такое $\pi_1 \subset \pi_0{}^*$, что $y(t_1) \in D(x(t_1), \pi_1, l_1)$.

Начиная с момента времени $t_1 > 0$ преследователям предпишем следующий локальный синтез, определенный в области

$$D = \{z : y \in D(x, \pi_1, l_1)\}:$$

$$(3.2)\qquad u_i(z) = \begin{cases} (1 - \varphi^2(h))^{1/2} e_i(z) + \varphi(z) e_0(z), & i \in \pi_1 \\ 0, & i \overline{\in} \pi_1 \end{cases}$$

$$e_0(z) = \begin{cases} h(z)/|h(z)|, & h(z) \neq 0 \\ 0, & h(z) = 0 \end{cases}$$

$$e_i(z) = \begin{cases} (x_i - x_j)/|x_t - x_j|, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases}$$

$$\varphi(h) = 1 - (1 - |h|/l_1)^2$$

Здесь $h = h(z)$ — вектор, ортогональный к $N(x, \pi_1)$ и направленный в сторону y, длина которого равна расстоянию от y до множества $N(x, \pi_1)$, j — фиксированный элемент π_1.

Можно показать, что $(e_0(z), e_i(z)) = 0$ при всех $z \in D$ и $i \in \pi_1$.

Пусть убегающий применяет произвольное измеримое управление $v = v(t)$, $t \geqslant t_1$. Тогда уравнения движений преследователей P_i, $i \in \pi_1$ и убегающего примут вид

$$(3.3)\qquad \begin{aligned} x_i^\cdot &= (1 - \varphi^2(h))^{1/2} e_i(z) + \varphi(h) e_0(z), \quad x_i(t_1) = x_{i1} \\ y^\cdot &= v, \quad y(t_1) = y_1 \end{aligned}$$

Пусть $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{m_1}(t), y(t)$ — решение этой задачи Коши ($m_1 = d(\pi_1)$). Тогда в процессе движения несущая плоскость выпуклого множества $N(x(t), \pi)$, $t \geqslant t_1$ перемещается в пространстве R^n, оставаясь параллельной к состоянию при $t = t_1$. Следовательно, пока $y(t) \in D(x(t), \pi_1, l_1)$, $t \geqslant t_1$, вектор $e_0(z(t))$ тоже останется параллельным $e_0(z(t_1))$ и длина вектора $h(z(t))$ определяется формулой

$$(3.4)\qquad |h(z(t))| = (y(t) - x_i(t), e_0(t_1)), \quad t \geqslant t_1, \quad i \in \pi_1$$

Оказывается, что при всех $t \geqslant t_1$

(3.5) $$|h(z(t))| \leqslant l_1$$

Предположим противное. Пусть неравенство (3.5) верно только на конечном интервале времени $[t_1, \tau_1)$, $\tau_1 > t_1$ и $|h(z(\tau_1))| = l_1$ (такой интервал времени всегда существует, так как функция $h(z)$ непрерывна по z и в начальный момент времени $|h(z(t_1))| < l_1$).

Тогда в силу (3.3) и (3.4) для всех $t \in [t_1, \tau_1)$ имеем

$$d|h(z(t))|/dt = (y^{\cdot}(t), e_0(t_1)) - (x_i^{\cdot}(t), e_0(t_1)) =$$
$$= (v(t), e_0(t_1)) - (1 - \varphi^2(h(z(t))))^{1/2}(e_i(t), e_0(t_1)) -$$
$$- \varphi(h(z(t)))(e_0(t), e_0(t_1)) \leqslant 1 - \varphi(h(z(t))) = (1 - |h(z(t))|/l_1)^2$$

Отсюда получаем

(3.6) $$|h(z(t))| \leqslant l_1 \{1 - [(1 - |h(z(t))|/l_1)^{-1} + t/l_1]^{-1}\}$$

Из (3.6) и непрерывности функции $h(z)$ следует, что $|h(z(t))| < l$ вопреки предположению. Таким образом, неравенство (3.5) верно при всех $t \geqslant t_1$.

Далее, расстояния между преследователями P_i, $i \in \pi_1 \setminus \{j\}$ и преследователем P_j монотонно стремится к нулю. Действительно, если полагать $\rho_i(t) = x_j(t) - x_i(t)$, то в силу (3.3)

$$d\rho_i^2(t)/dt = 2(\rho_i^{\cdot}(t), \rho_i(t)) = -2(1 - \varphi^2(h(z(t))))^{1/2} \times$$
$$\times |\rho_i(t)|, \quad i \in \pi_1 \setminus \{j\}$$

Учитывая (3.6), из последнего соотношения получаем

$$d\rho_i^2(t)/dt = -2(1 - \varphi^2(h(z(t))))^{1/2}|\rho_i(t)| =$$
$$= -2(1 - |h(z(t))|/l_1)|\rho_i(t)| \leqslant -2\{[t/l_1 +$$
$$+ (1 + |h(z(t_1))|/l_1)^{-1}]^{-1}\}|\rho_i(t)|$$

Интегрируя, находим

(3.7) $$|\rho_i(t)| \leqslant |\rho_i(t_1)| - l_1\{\ln[t/l + (1 - |h(z(t_1))|/l_1)^{-1}] -$$
$$-\ln[t/l + (1 - |h(z(t_1))|/l_1)^{-1}]\}$$

Из неравенства (3.7) следует, что через некоторое конечное время $T_1 > t_1$ по крайней мере одна из функций $\rho_i(t)$ $i \in \pi_1 \setminus \{j\}$ обратится в нуль, т. е. $x_i(T_1) = x_j(T_1)$. Следовательно, через некоторое время $t_2 < T_1$ убегающий обязательно попадет на границу множества $D(x(t_2), \pi_1, l_1)$, т. е. $y(t_2) \in FrD(x(t_2), \pi_1, l_1)$.

Поэтому при некоторых l_2, $l_1 < l_2 < l$ и $\pi_2 \subset \pi_1$, $d(\pi_2) < d(\pi_1)$ точка $y(t_2)$ попадает в l_2-окрестность выпуклой оболочки еще меньшего числа преследователей P_i, $i \in \pi_2$.

Если $d(\pi_2) = 1$, то преследование завершается. Если $d(\pi_2) > 1$, то с этого момента времени преследование продолжит только группа преследователей P_i, $i \in \pi_2$, а остальные остаются на своих местах. Для этой группы преследователей повторим аналогичные построения и в итоге через некоторое конечное время t_3, $t_3 > t_2 > 0$ получим включение

$$y(t_3) \in M(x(t_3), \pi_3, l_3), \quad 0 < l_2 < l_1 < l$$
$$\pi_3 \subset \pi_2, \quad d(\pi_3) < d(\pi_2)$$

Если $d(\pi_3) = 1$, то преследование завершается.

В случае $d(\pi_3) > 1$ продолжим описанный процесс преследования, уменьшая тем самым число $d(\pi_s)$ преследователей P_i, $i \in \pi_s$, для которых

(3.8) $$y(t_s) \in M(x(t_s), \pi_s, l_s), \quad 0 < l_{s-1} < l_s < l$$

где s — целое положительное число, не превосходящее m.

Следовательно, после конечного числа повторений этой процедуры включение (3.8) выполняется для одноэлементного множества π_s, т. е. игра завершается. Теорема доказана.

4. Покажем, что конструкция п. 3 в самом деле определяет (z_0, T)-допустимую стратегию с некоторым $T < +\infty$. В фазовых координатах $z = (x_1, x_2, \ldots, x_m, y)$ пространства $R^{n(m+1)}$ уравнения движений имеют вид

$$(4.1) \qquad \dot{z} = u + v, \quad z_0 = (x_1(0),\ x_2(0),\ \ldots,\ x_m(0),\ y(0))$$

Области управлений для переменных u и v и терминальное множество соответственно таковы:

$$P = \{u \in R^{n(m+1)}\colon u = (u_1, u_2, \ldots, u_m, 0),\ u_i \in R^n,\ |u_i| \leqslant 1\}$$
$$Q = \{v \in R^{n(m+1)}\colon v = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ v),\ v \in R^n,\ |v| \leqslant 1\}$$
$$M = \bigcup_{i=1}^{m} \{z \in R^{n(m+1)}\colon\ |x_i - y| \leqslant l\}$$

В пространстве $R^{n(m+1)}$ выделим множество (l^* — положительное число)

$$D^*(z,\ \pi,\ l^*) = \{z \in R^{n(m+1)}\colon\ y \in D\ (x,\ \pi,\ l^*)\},\ \pi \in K$$

Если $z_0 \in D^*(z, \pi_0, l_0)$ для некоторого $\pi_0 \in K$, $l_0 < l$ и $d(\pi_0) = n + 1$, то каждой $z \in [D^*(z, \pi_0, l_0)]$ пространства $R^{n(m+1)}$ ставим в соответствие пару, состоящую из области $D(z_0) = \{z \in R^{n(m+1)}\colon\ y \in N(x,\ \pi_0)\}$ и локального синтеза $u_{z_0}(z) = (u_1^\circ(z), u_2^\circ(z), \ldots, u_m^\circ(z), 0)$, где $u_i^\circ(z) = u_i(z)$, если $i \in \pi_0$ и $u_i^\circ(z) = 0$, если $i \,\overline{\in}\, \pi_0$, а функции $u_i(z)$, $i \in \pi_0$ определяются из (3.1) (первый этап преследования).

Как явствует из п. 3, при таком ходе преследования через некоторое конечное время $t = t_1 > 0$ будет иметь место включение $z(t_1) \in D^*(z, \pi_1,\ l_1)$, $0 < l_0 < l_1 < l$, $\pi_1 \subset \pi_0$, $d(\pi_1) < d(\pi_0) = n + 1$, где $z(t_1)$ — состояние фазовой точки системы (4.1) в момент времени $t = t_1$. Поэтому, если $z_0 \in D^*(z, \pi_0, l_0)$ и $d(\pi_0) < n + 1$, то преследование из точки z_0 начинается аналогично второму этапу преследования из п. 3.

Каждой точке $z \in [D^*(z, \pi_1, l_1)]$ $(\subset R^{n(m+1)})$ ставим в соответствие пару, состоящую из области $D(z_0) = D^*(z, \pi_1, l_1)$ и локального синтеза $u_{z_1}(z) = (u_1^1(z), u_2^1(z), \ldots, u_m^1(z), 0)$, где $u_i^1(z) = u_i(z)$, если $i \in \pi_1$, $u_i^1(z) = 0$, если $i \,\overline{\in}\, \pi_1$, а функции $u_i(z)$, $i \in \pi_1$ определяются из (3.2).

Рассуждения п. 3 показывают, что наступает такой момент времени $t = t_2$, когда $z(t_2) \in D^*(z, \pi_2, l_2)$, где $0 < l_1 < l_2 < l$, $\pi_2 \subset \pi_1$, $d(\pi_2) < d(\pi_1)$.

Далее, каждой точке $z \in D^*(z, \pi_2, l_2)$ $(\subset R^{n(m+1)})$ ставим в соответствие пару $U(z)$ аналогично второму этапу и т. д. Повторяя указанный способ построения, получим конечные последовательности моментов времени 0, $t_1, \ldots, t_s$, подмножеств $D(z_0), D(z_1), \ldots, D(z_s)$ и синтезирующих функций $u_{z_0}(\cdot)$, $u_{z_1}(\cdot)$, $\ldots$, $u_{z_s}(\cdot)$, которые действительно определяют (z_0, T)-допустимую стратегию U^*.

Замечания 1°. Если $z_0 \,\overline{\in}\, D^*(z, \pi_0, l_0)$ при всех $\pi_0 \in K$ и l_0, $0 < l_0 < l$ (другими словами, $y(0) \,\overline{\in}\, M(x(0), I, l)$), то можно убедиться, что в игре (4.1) (или в игре (1.1)) возможно убегание.

2°. Если $z_0 \in \{z\colon y \in N\ (x, \pi)\}$ (или $y(0) \in N(x(0), \pi)$) для некоторого $\pi \in K$, то очевидно, $z_0 \in D^*(z, \pi_0, \varepsilon)$, $\pi_0 \subset \pi$ для любого ε, $\varepsilon > 0$. Следовательно, для таких начальных положений имеем более сильное утверждение: если $z_0 \in \{z\colon y \in N\ (x(0), \pi)\}$ (или $y(0) \in N(x(0), \pi)$) для некоторого $\pi \in K$, то в игре (4.1), или в игре (1.1) можно завершить преследование за конечное время $T > 0$ в следующем смысле. Каким бы ни было положительное число $\varepsilon > 0$, существует такая (z_0, T)-допустимая стратегия что при любом измеримом управлении убегающего $v(\cdot)$ траектория $z(t)$, соответствующая z_0, U, $v(\cdot)$, удовлетворяет соотношению $|x_i(t) - y(t)| < \varepsilon$ при некотором значении индекса $i \in \pi$ и времени $t \leqslant T$.

Автор благодарит Н. Сатимова, за внимание к работе и А. Азамова за обсуждение результата.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
2. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. *Черноусько Ф. Л.* Одна задача уклонения от многих преследователей.— ПММ, 1976, т. 40, вып. 1, с. 14—24.
4. *Пшеничный Б. Н.* Простое преследование несколькими объектами.— Кибернетика, 1976, № 3, с. 145—146.
5. *Петросян Л. А.* Дифференциальные игры преследования. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. 222 с.
6. *Соловьева О. А.* Простое преследование одного объекта m объектами.— В кн.: Дифференциальные бескоалиционные кооперативные и статические игры. Калинин: Изд-е Калининск. ун-та, 1979, с. 94—98.
7. *Сатимов Н., Азамов А.* О задачах преследования и убегания в дифференциальных играх с произвольным числом игроков.— Докл. АН УзССР, 1979, № 10, с. 6—7.
8. *Пшеничный Б. Н., Чикрий А. А., Раппопорт И. С.* Эффективный метод решения дифференциальных игр со многими преследователями.— Докл. АН СССР, 1981, т. 256, № 3, с. 530—535.
9. *Иванов Р. П., Ледяев Ю. С.* Оптимальность времени преследования в дифференциальной игре многих объектов с простым движением.— Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1981, т. 158, с. 87—97.

Ташкент

Поступила в редакцию
13.VII.1983