Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 4, 1984

УДК 62—50

ИГРОВАЯ ЗАДАЧА СБЛИЖЕНИЯ — УКЛОНЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЕ ИГРОКОВ

Соломатин А. М.

Рассматривается дифференциальная игра сближения — уклонения с интегральными ограничениями на управления игроков. Предлагается позиционная стратегия, доставляющая решение задачи сближения, приводятся условия, при которых множество программного поглощения обладает свойством стабильности.

Исследование этого типа дифференциальных игр было начато в работах [1, 2], где изучалась задача преследования — уклонения для однотипных систем и предлагались вспомогательные программные конструкции, на основе которых была построена позиционная стратегия в форме стратегий экстремального прицеливания. Рассматривались [3] стабильные мосты программного поглощения для линейных, вообще говоря, неоднотипных объектов и указано построение стратегий экстремальных к этим мостам. Было предложено [4] решение задачи сближения в классе позиционных процедур управления с поводырем. Отметим, что вопрос о возможности построения разрешающих позиционных стратегий в дифференциальных играх с интегральными ограничениями оставался открытым.

Работа примыкает к исследованиям [1—8].

1. Пусть движение конфликтно-управляемой системы описывается уравнением

$$\frac{d}{dt}x = A(t)x + B(t)u + C(t)v, \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad x(t_0) = x_0 \tag{1.1}$$

Здесь x — n-мерный фазовый вектор системы, u и v — управляющие воздействия первого и второго игроков соответственно, являющиеся элементами пространств R^p и R^q, $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — матрицы соответствующих размерностей, зависящие от t непрерывно.

Предполагается, что реализации управлений игроков удовлетворяют ограничениям

$$\int_{t_0}^{\vartheta} \| u[\tau] \|^2 d\tau \leqslant \mu_0^2, \quad \int_{t_0}^{\vartheta} \| v[\tau] \|^2 d\tau \leqslant \nu_0^2$$

Полагаем

$$z_1[t] = \mu_0^2 - \int_{t_0}^{t} \| u[\tau] \|^2 d\tau, \quad z_2[t] = \nu_0^2 - \int_{t_0}^{t} \| v[\tau] \|^2 d\tau \tag{1.2}$$

Считаем, что каждому игроку известна текущая позиция игры $(n + 3)$-мерный вектор $(t, z_1[t], z_2[t], x[t])$.

Задача, стоящая перед первым игроком, заключается в том, чтобы выбором управления u обеспечить попадание точки $z[\vartheta] = (z_1[\vartheta], z_2[\vartheta], x[\vartheta])$ на множество $M^* = \{z\colon z = (z_1, z_2, x),\ z_1 \geqslant 0,\ z_2 \geqslant 0,\ x \in M\}$. Здесь M — выпуклый компакт из R^n.

2. Приведем необходимые понятия и обозначения. Символами U_{t_*, z_*}, V_{t_*, z_*}, $R_{(+)}^{n+2}$ обозначим множества, определяемые соотношениями

$$R_{(+)}^{n+2} = \{z : z = (z_1, z_2, x), z_1 \geqslant 0, z_2 \geqslant 0, x \in R^n\}$$

$$U_{t_*, z_*} = \left\{ u(\cdot) : u(\cdot) \in L_2[t_*, \vartheta], \int\limits_{t_*}^{\vartheta} \| u(\tau) \|^2 d\tau \leqslant z_{1*} \right\}$$

$$V_{t_*, z_*} = \left\{ v(\cdot) : v(\cdot) \in L_2[t_*, \vartheta], \int\limits_{t_*}^{\vartheta} \| v(\tau) \|^2 d\tau \leqslant z_{2*} \right\}$$

Здесь $t_* \in [t_0, \vartheta]$, $z_* \in R_{(+)}^{n+2}$. Символом

$$Z(t\colon t_*, z_*, v_*(\cdot)) \quad (t_* \in [t_0, \vartheta]$$
$$z_* \in R_{(+)}^{n+2}, \quad t \in [t_*, \vartheta,] \quad v_*(\cdot) \in V_{t_*, z_*})$$

обозначим множество точек

$$z = (z_1(t), z_2(t), x(t))$$

где

$$(2.1) \qquad z_1(t) = z_{1*} - \int\limits_{t_*}^{t} \| u(\tau) \|^2 d\tau, \quad z_2(t) = z_{2*} - \int\limits_{t_*}^{t} \| v(\tau) \|^2 d\tau$$

$$x(t) = X[t, t_*] x_* + \int\limits_{t_*}^{t} X[t, \tau] (B(\tau) u(\tau) + C(\tau) v(\tau)) d\tau$$

Здесь $X[t, \tau]$ — фундаментальная матрица системы (1.1), $u(\tau)$ ($\tau \in \in [t_*, \vartheta]$) — всевозможные функции из U_{t_*, z_*}.

Определение 2.1. Систему множеств $\{W(t)\colon W(t) \in R_{(+)}^{n+2}, t \in [t_0, \vartheta]\}$ назовем u-стабильным мостом, если выполняются условия:

1) $W(\vartheta) \in M^*$

2) для любых моментов времени t_* и t^* из $[t_0, \vartheta]$ ($t_* < t^*$), любой точки $z_* \in W(t_*)$ и любой функции $v_*(\cdot) \in V_{t_*, z_*}$ верное соотношение

$$Z(t^*\colon t_*, z_*, v_*(\cdot)) \cap W(t^*) \neq \varnothing.$$

Символами T°, T_h ($h > 0$) обозначим отображения множества всех подмножеств пространства $R_{(+)}^{n+2}$ в само себя, определяемые равенствами

$$T^\circ(G) = \bigcup_{\eta \geqslant 0} \overline{\mathrm{co}}\, G\eta, \quad T_h(G) = \bigcup_{z^* \in G} Z(z^*); \quad G \subseteq R_{(+)}^{n+2}$$

Здесь $\overline{\mathrm{co}} G_\eta$ — замыкание выпуклой оболочки [7] множества $G_\eta = \{z\colon z \in G,\ z_2 = \eta\}$, $Z(z^*) = \{z\colon z_1^* \leqslant z_1 \leqslant h,\ 0 \leqslant z_2 \leqslant z_2^*,\ x = x^*\}$.

Пусть $\{W(t)\colon t \in [t_0, \vartheta]\}$ — некоторый u-стабильный мост.

Утверждение 2.1. Системы множеств

$$\{T^\circ(W(t))\colon t \in [t_0, \vartheta]\}, \quad \{T_h(W(t))\colon t \in [t_0, \vartheta]\} \quad (h > 0)$$

являются u-стабильными мостами.

В дальнейших рассуждениях полагаем, что для рассматриваемых u-стабильных мостов выполняется равенство

$$T^\circ(W(t)) = W(t) \quad (t \in [t_0, \vartheta])$$

и, кроме того, найдется такое $h > \mu_0^2$, что верно соотношение

$$T_h(W(t)) = W(t) \quad (t \in [t_0, \vartheta])$$

Также полагаем, что имеют место следующие предположения.

Предположение A. Для любого единичного вектора l ($l \in R^n$, $\| l \| = 1$), любых моментов времени t_* и t^* из $[t_0, \vartheta]$ ($t_* < t^*$) верны неравенства

$$\int\limits_{t_*}^{t^*} \| l' H_i [t^*, \tau] \|^2 d\tau > 0, \quad i = 1, 2$$

Здесь

$$H_1[t^*, \tau] = X[t^*, \tau] B(\tau)$$
$$H_2[t^*, \tau] = X[t^*, \tau] C(\tau)$$

Предположение B. Существует такая константа $\alpha > 0$, что для любого момента времени τ из $[t_0, \vartheta]$ и любого единичного вектора $n = (n_1, 0, n_{(3)})$ внешней нормали множества $W_\eta(\tau)$ $(\eta \geqslant 0,\ W_\eta(\tau) \neq \varnothing)$ в точке z $(z \in \partial W(\tau),\ z_1 > 0)$ выполняется неравенство

$$n_1 \leqslant -\alpha$$

Здесь символ ∂W означает границу множества W.

Лемма 2.1. Существует такая константа $L > 0$, что для любых моментов времени t_* и t^* $(t_* < t^*)$ из $[t_0, \vartheta]$ любой точки z_* из $W(t_*)$, любой функции $v_*(\cdot) \in V_{t_*, z_*}$ найдется такая функция $u(\cdot) \in U_{t_*, z_*}$, что

$$\int_{t_*}^{t^*} \| u(\tau) \|^2 d\tau \leqslant L(t^* - t_*)$$

и выполняется включение

$$z(t^*: t_*, z_*;\ u(\cdot), v(\cdot)) \in W(t^*)$$

Здесь $z(t^*: t_*, z_*: u(\cdot),\ v(\cdot)) = (z_1(t^*), z_2(t^*),\ x(t^*))$ определяется уравнениями (2.1).

3. *Определение 3.1*. Под допустимой позиционной стратегией U первого игрока будем понимать отображение $U(t, z) = u_{t,z}(\cdot)$ пространства позиций (t, z) $(t \in [t_0, \vartheta],\ z \in R_{(+)}^{n+2})$ в множество $U_{t,z}$.

Обозначим через $\Gamma = \{\tau_i: t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_s = \vartheta\}$ некоторое произвольное разбиение отрезка $[t_0, \vartheta]$.

Определение 3.2. Назовем ломаной Эйлера $y_\Gamma[t] = y_\Gamma[t: t_0, y_0, U, v[\cdot]]$, отвечающей позиционной стратегии U первого игрока и порожденной разбиением Γ и реализацией управления $v[\cdot]$ второго игрока $(v[\cdot] \in V_{t_0, y_0})$, решение системы уравнений

$$\frac{d}{dt} z_{1\Gamma} = -\| U(\tau_i, y_i) \|^2, \qquad \frac{d}{dt} z_{2\Gamma} = -\| v[t] \|^2$$
$$\frac{d}{dt} x_\Gamma = A(t) x_\Gamma + B(t) U(\tau_i, y_i) + C(t) v[t]$$
$$\tau_i \in \Gamma, \quad y_i = y_\Gamma[\tau_i] \quad (i = 0, 1, \ldots, s), \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$$
$$(i = 0, 1, \ldots, s-1), \quad y_\Gamma(t_0) = y_0, \quad y = (z_1, z_2, x)$$

Определение 3.3. Функцию $x[t] = x[t: t_0, y_0, U]$ будем называть движением системы (1.1), отвечающим допустимой стратегии U первого игрока и выходящим из начальной точки $y_0 = (\mu_0^2, \nu_0^2, x_0)$ в начальный момент t_0, если найдется последовательность ломаных Эйлера

$$y_{\Gamma(k)}[t] = y_{\Gamma(k)}[t: t_0(\mu_0^2, \nu_0^2, x_k), U, v_k[\cdot]] \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

удовлетворяющих условиям

$$x_k \to x_0, \quad \max_{\tau_i, \tau_{i+1} \in \Gamma(k)} (\tau_{i+1} - \tau_i) \to 0,$$
$$\max_{t \in [t_0, \vartheta]} \| x_{\Gamma(k)}[t] - x[t] \| \to 0 \quad (k \to \infty)$$

Существование движений вытекает из теоремы Арцелла [8], поскольку множество функций $\{x_{\Gamma(k)}[\cdot]\}$ равноограниченно и равностепенно непрерывно.

Пусть позиция (t_*, z_*) удовлетворяет условиям

$$t_* \in [t_0, \vartheta], \quad z_* \in \{R^{n+2}_{(+)} \setminus W(t_*)\}, \quad W_{z_{2*}}(t_*) \neq \varnothing.$$

$$G \setminus F = \{z\colon z \in G, z \notin F\}$$

Рассмотрим точку z^*, определенную соотношением

$$\| z_* - z^* \| = \min_{z \in W_{z_{2*}}(t_*)} \| z_* - z \|$$

В силу выпуклости множества $W_{z_{2*}}(t_*)$ имеет место равенство $z_* - z^* = n^* \| z_* - z^* \|$; здесь $n^* = (n_1^*, 0, n_{(3)}^*)$ — подходящий единичный вектор внешней нормали к множеству $W_{z_{2*}}(t_*)$ в точке z^*.

Определим вектор $u_*(t_*, z_*) = u_*$ из равенства

$$\min_{u \in R^p} n^{*\prime} \cdot f(t_*, z_*, u, v) = n^{*\prime} \cdot f(t_*, z_*, u_*, v)$$

$$f(t, z, u, v) = \begin{Vmatrix} -\| u \|^2 \\ -\| v \|^2 \\ A(t_*)x_* + B(t_*)u + C(t_*)v \end{Vmatrix}$$

Можно показать, что

$$u_x' = n^{*\prime} \cdot B(t_*)/n_1^*$$

В силу предположения B найдется такая постоянная K $(K > 0)$, что для любых (t_*, z_*) $(t_* \in [t_0, \vartheta],\ z_* \in \{R^{n+2}_{(+)} \setminus W(t_*),\ z_1 > 0,\ W_{z_2*} = \varnothing\})$ выполняется неравенство

$$\| u_*(t_*, z_*) \| \leqslant K$$

Определение 3.4. Под допустимой экстремальной стратегией $U^{(e)}$ первого игрока будем понимать следующее отображение $U^{(e)} \doteq u_{t,z}(\cdot)$:

1) если $z \in W(t)$, то

$$u_{t,z}(\tau) = 0, \quad (\tau \in [t, \vartheta])$$

2) если $z \notin W(t)$, $W_{z_2}(t) \neq \varnothing$, то

$$u_{t,z}(\tau) = \begin{cases} u_*(t, z), & z_1 - \| u_*(t, z) \|^2 (\tau - t) \geqslant 0 \\ 0, & z_1 - \| u_*(t, z) \|^2 (\tau - t) < 0 \end{cases}$$

$$(\tau \in [t, \vartheta])$$

3) если $z \notin W(t)$, $W_{z_2}(t) = \varnothing$, то

$$u_{t,z}(\tau) = 0 \quad (\tau \in [t, \vartheta])$$

Теорема 3.1. Если начальное состояние игры таково, что точка $y_0 = (\mu_0^2, \nu_0^2, x_0)$ содержится во множестве $W(t_0)$, то экстремальная стратегия $U^{(e)}$ приводит всякое движение $x[t] = x[t\colon t_0, y_0, U^{(e)}]$ в момент ϑ на целевое множество M.

В основе доказательства теоремы лежит оценка расстояния в евклидовой метрике между ломаной Эйлера и u-стабильным мостом $\{W(t)\colon t \in [t_0, \vartheta]\}$.

Показывается, что ломаная Эйлера, порожденная разбиением Γ отрезка $[t_0, \vartheta]$ и реализацией управления $v[\cdot]$ второго игрока $(v[\cdot] \in V_{t_0, (\mu_0^2, \nu_0^2, x)})$ удовлетворяет одному из неравенств

$$\varepsilon^2 [x_\Gamma[\vartheta]] \leqslant \gamma$$

$$\varepsilon [x_\Gamma[\vartheta]] \leqslant \gamma^{1/2} \max_{t \in [t_0, \vartheta]} \| X[\vartheta, t] \| +$$

$$+ \left(\int_{t_0}^{\vartheta} \| H_1[\vartheta, \tau] \|^2 d\tau \right)^{1/2} \{2K^2 \max_{\tau_i, \tau_{i+1} \in \Gamma} (\tau_{i+1} - \tau_i) + \gamma^{1/2}\}$$

Здесь

$$\varepsilon[x_*] = \min_{m\in M} \| x_* - m \|$$

$$\gamma = [\| x_0 - x \|^2 + (\vartheta - t_0)\varphi] \exp[\beta(\vartheta - t_0)]$$

$$\beta = 2 \max_{t\in[t_0,\vartheta]} \| A(t) \|, \quad \varphi = \max_{\tau_i,\tau_{i+1}\in\Gamma} \varphi(\tau_{i+1} - \tau_i)$$

$\varphi(\delta)$ — некоторая функция, непрерывная в окрестности 0 и $\lim \varphi(\delta) = 0$ $(\delta \to 0)$.

4. Введем новый фазовый вектор $x^{(1)}$, связанный с вектором x равенством

(4.1) $$x^{(1)} = X[\vartheta, t]\, x$$

Можно показать, что в новых переменных дифференциальное уравнение (1.1) примет вид

(4.2) $$\frac{d}{dt} x^{(1)} = X[\vartheta, t] B(t) u + X[\vartheta, t] C(t) v$$

$$t \in [t_0, \vartheta], \quad x^{(1)}(t_0) = X[\vartheta, t_0]\, x_0$$

Поскольку $X[\vartheta, \vartheta] = E$, то целевым множеством для системы (4.2) должно быть множество M^*. Переобозначив матрицы $X[\vartheta, t]\, B(t)$, $X[\vartheta, t]\, C(t)$, вектор $x^{(1)}$ символами $B(t)$, $C(t)$ и x, получим исходную систему (1.1), где $A(t) = 0$ $(t \in [t_0, \vartheta])$.

В дальнейших рассуждениях полагаем, что множество M определяется соотношением

$$M = \{x\colon x \in R^n, \| x \| \leqslant d\} \quad (d \geqslant 0).$$

Пусть выполняется следующее условие C: для любых моментов времени t_* и t^* $(t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta)$, любого вектора l $(l \in R^n, \| l \| = 1)$ матрицы-функции $C(\cdot)$, $B(\cdot)$ удовлетворяют неравенству

$$\left[\int_{t_*}^{\vartheta} \| l'C(\tau) \|^2 d\tau\right]^{1/2} \int_{t^*}^{\vartheta} \| l'B(\tau) \|^2 d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_{t^*}^{\vartheta} \| l'C(\tau) \|^2 d\tau\right]^{1/2} \int_{t_*}^{\vartheta} \| l'B(\tau) \|^2 d\tau$$

Теорема 4.1. Система множеств $\{W(t\colon \vartheta, M^*)\colon t \in [t_0, \vartheta]\}$ является максимальным u-стабильным мостом для множества M^*.

Здесь

$$W(t\colon \vartheta, M^*) = \{z\colon z = (\mu^2, \nu^2, x), \quad \mu \geqslant 0, \quad \nu \geqslant 0, \quad x \in R^n$$

$$\max_{l\in R^n,\, \|l\|=1} \left[-\mu\left(\int_t^{\vartheta} \| l'B(\tau) \|^2 d\tau\right)^{1/2} + \nu\left(\int_t^{\vartheta} \| l'C(\tau) \|^2 d\tau\right)^{1/2} + l'x\right] \leqslant d\}$$

Доказательство теоремы основывается на следующей лемме.

Лемма 4.1. Пусть $n = p = q = 1$ и для любых моментов времени t_* и t^* $(t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta)$ функции $C(\cdot)$, $B(\cdot)$ удовлетворяют неравенству

$$\left[\int_{t_*}^{\vartheta} C^2(\tau)\, d\tau\right]^{1/2} \int_{t^*}^{\vartheta} B^2(\tau)\, d\tau \geqslant \left[\int_{t^*}^{\vartheta} C^2(\tau)\, d\tau\right]^{1/2} \int_{t_*}^{\vartheta} B^2(\tau)\, d\tau$$

Тогда система множеств $\{W(t\colon \vartheta, M^*)\colon t \in [t_0, \vartheta]\}$ является максимальным u-стабильным мостом для множества M^*.

Доказательство леммы основывается на доказательстве соотношения

$$\partial W(t^*\colon \vartheta, M^*) \cap \{Z(t^*\colon t_*, z_*, v_*(\cdot)) \,|\, \mathrm{ri}\, Z(t^*\colon t_*, z_*, v_*(\cdot))\} \neq \varnothing$$

для любых моментов t_* и t^* ($t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta$), любой точки z_* ($z_* \in W(t_*: \vartheta, M^*)$), произвольной функции $v_*(\cdot)$ ($v_*(\cdot) \in V_{t_*, z_*}$).

Здесь $\mathrm{ri}\, Z$ — относительная внутренность [7] множества Z. Максимальность следует из того факта, что $W(t: \vartheta, M^*)$ — множество программного поглощения [3] для M^* на промежутке времени $[t, \vartheta]$.

Условие C носит достаточный характер, поскольку, если $B(t) = \mathrm{const}$, $C(t) = \mathrm{const}$, то известно, что система множеств $\{W(t: \vartheta, M^*): t \in [t_0, \vartheta]\}$ является максимальным u-стабильным мостом [3], но, очевидно, условие C не выполняется.

Пример. Пусть динамика управляемой системы описывается уравнением

$$\ddot{y}_1 = y_3, \quad \dot{y}_2 = y_4, \quad \dot{y}_3 = v_1, \quad \dot{y}_4 = v_2, \quad \dot{x}_1 = u_1, \quad \dot{x}_2 = u_2$$
$$t \in [t_0, \vartheta], \quad y_i[t_0] = y_i^\circ, \quad x_j[t_0] = x_j^\circ \quad (i = 1, \ldots, 4;\ j = 1, 2) \tag{4.3}$$

Здесь $y = (y_1, y_2)$ — координаты материальной точки $m^{(1)}$, (y_3, y_4) — компоненты скорости этой точки, $v = (v_1, v_2)$ — управляющая сила, которая прикладывается к инерциальной точке $m^{(1)}$, $x = (x_1, x_2)$ — координаты безынерционной точки $m^{(2)}$, управление которой осуществляется выбором скорости $u = (u_1, u_2)$. Игроку, распоряжающемуся управлением u, необходимо добиться, чтобы в момент ϑ выполнялось неравенство

$$\| x[\vartheta] - y[\vartheta] \| \leqslant d \quad (d > 0)$$

при любом способе управления v. На реализации управлений $u[\cdot]$, $v[\cdot]$ игроков наложены ограничения

$$\int_{t_0}^{\vartheta} \| u[\tau] \|^2 d\tau \leqslant \mu_0^2, \quad \int_{t_0}^{\vartheta} \| v[\tau] \|^2 d\tau \leqslant \nu_0^2$$

Используя преобразование (4.1), перейдем к новым переменным

$$x_1^* = y_1 - x_1 + (\vartheta - t)\, y_3, \quad x_2 = y_2 - x_2 + (\vartheta - t)\, y_4$$

изменения которых описываются уравнениями

$$\frac{d}{dt} x_1^* = (\vartheta - t)\, v_1 - u_1, \quad \frac{d}{dt} x_2^* = (\vartheta - t)\, v_2 - u_2$$
$$x_1^*[t_0] = y_1^\circ - x_1^\circ + (\vartheta - t_0)\, y_3^\circ, \quad x_2^\circ[t_0] = y_2^\circ - x_2^\circ + (\vartheta - t_0)\, y_4^\circ \tag{4.4}$$

Очевидно, что выполняется равенство

$$\| x^*[\vartheta] \| = \| y[\vartheta] - x[\vartheta] \|, \quad x^* = (x_1^*, x_2^*).$$

Можно проверить, что система (4.4), эквивалентна системе (4.3), удовлетворяет условию C.

В заключение отметим, что система множеств $\{W(t: \vartheta, M^*): t \in [t_0, \vartheta - \delta]\}$ ($0 < \delta < \vartheta - t_0$) из теоремы 4.1 удовлетворяет предположению B.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
2. *Красовский Н. Н., Третьяков В. Е.* К задаче о встрече движений.— Докл. АН СССР, 1967, т. 173, № 2, с. 285—287.
3. *Ушаков В. Н.* Экстремальные стратегии в дифференциальных играх с интегральными ограничениями. — В сб.: Дифференциальные игры и задачи управления. Свердловск: Тр. Ин. матем. и механ., 1975, вып. 15, с. 244—263.
4. *Субботин А. И., Ушаков В. Н.* Альтернатива для дифференциальной игры сближения — уклонения при интегральных ограничениях на управления игроков.— ПММ, 1975, т. 39, вып. 3, с. 387—396.
5. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 455 с.
6. *Пшеничный Б. Н., Онопчук Ю. Н.* Линейные дифференциальные игры с интегральными ограничениями.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1968, № 1, с. 13—22.
7. *Рокафеллар Р. Т.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.
8. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теорий функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.

Свердловск

Поступила в редакцию 2.IX.1981